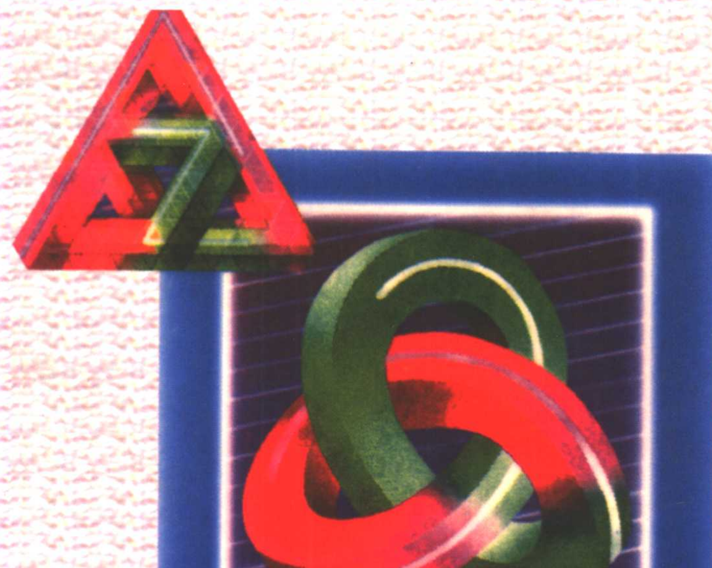
现代数学基础丛书

随机分析学基础

（第二版）

● 黄志远 著



科学出版社

中国科学院科学出版基金资助出版

现代数学基础丛书

随机分析学基础

(第二版)

黄志远 著

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书在一般测度论观点下的概率论和随机过程初步知识的基础上，介绍了随机分析学的基础及较新成果. 全书分五章：第一章是预备知识，包括随机过程一般理论和鞅论初步；第二章是近代随机积分理论；第三章讨论连续半鞅的随机微分、伊藤公式及其应用；第四章介绍随机微分方程的现代理论；第五章是 Malliavin 随机分析.

本书可作为高等院校概率论及有关领域的研究生教材，也可作为有关专业研究工作者和高等院校有关专业教师的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

随机分析学基础(第二版)/黄志远著 . -北京：科学出版社，2001.3

(现代数学基础丛书)

ISBN 7-03-008750-X

Ⅰ. 随… Ⅱ. 黄… Ⅲ. 随机过程 Ⅳ. 0211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 42740 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2001 年 3 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

2001 年 3 月第一次印刷 印张：11⅛

印数：1－3 500 字数：291 000

定价：23.00 元

《现代数学基础丛书》编委会

第 二 版 序

本书第一版出版至今已过去了 12 年. 10 多年来, 随机分析学的理论获得了巨大的发展, 其应用领域日益广泛, 和数学各分支的联系也日益密切, 因此, 受到了众多研究领域学者的关注. 本书曾被许多大学和科研院、所选为研究生教材或参考书, 为了适应读者需要, 作者在第一版的基础上作了修订. 主要是对 Malliavin 随机分析部分 (第五章) 作了较大的修改, 例如对 Meyer 不等式及 Hörmander 定理分别采用了 Pisier 及 Norris 提出的简洁的证明. 此外, 还增加了像 Burkholder-Davis-Gundy 不等式等重要内容, 改正了第一版中的某些错误, 补充了一些最新的参考文献.

本书新版改由科学出版社出版, 并得到了国家自然科学基金 (项目编号 19631030) 及中国科学院科学出版基金的资助. 从第一版到第二版的写作过程中, 作者始终得到王梓坤、严加安、马志明院士和齐民友、梁之舜、侯振挺教授等的关心和支持, 严加安院士和任佳刚教授提出了许多宝贵的意见, 特此表示感谢.

黄志远

2000 年于华中科技大学

第一版序

这本书是作者在 1984 年及 1987 年两次为武汉大学数学系研究生讲课的讲稿基础上形成的. 随机分析学是近代概率论中最活跃的分支之一. 它的发展十分迅速, 内容也极其丰富. 为了力图做到在不需要很多准备知识的基础上, 以较短的篇幅, 介绍这一分支的核心内容和发展主流, 作者选择了从伊藤随机分析到 Malliavin 随机分析这一历史的和逻辑的发展线索, 在作者工作的基础上重新改写了随机积分这一章, 并增加了 Malliavin 随机分析的内容. 在写作过程中, 和 K. Itô (伊藤清) 、 P. Malliavin 、 P. A. Meyer 、 S. Watanabe (渡边信三) 以及其他一些国内外概率论学者的讨论曾给作者以很大的启发, 并参考了 H. Kunita (国田宽) 关于随机流以及 I. Shigekawa (重川一郎) 关于 Malliavin 随机分析的讲义. 中国科学院应用数学研究所研究员严加安同志仔细审阅了全部书稿, 并提出了许多宝贵意见, 作者在此深表谢意. 但由于作者水平、所涉及的主题及篇幅所限, 本书没有包括像极限理论、边界理论、稳定性理论等重要内容, 也不能全面地反映国内同志在这一领域的许多工作, 缺点和错误在所难免, 衷心希望读者批评指正.

黄志远

1988 年 1 月于武汉大学

目　录

引　　论

概率论在它发展的早期，和分析是两个迥然不同的领域，一些人甚至认为，概率论是否是数学或物理学的一部分还是一个疑问. 直到 1933 年 Kolmogorov 建立了概率论的公理基础，才使它成为一个严密的数学分支. 此后又有些人认为，概率论不过是分析的一部分，它的任何命题都可以翻译成分析的语言，因而不存在什么单独的概率方法，科学历史的发展证明这种观点是完全错误的. 本世纪 40 年代到 50 年代间，这两个领域之间的关系发生了一个戏剧性的变化：如果说以前人们关心的是如何用分析方法来解答概率问题，那么在这以后更感兴趣的是如何用概率方法来解决分析问题. 在它们之间迅速地发展着一门新的学科 —— **随机分析学**.

那么，什么是概率方法？它解决分析问题的奥妙何在？我们最好先考察几个典型的例子.

例 1 证明连续函数可以用足够高次的多项式均匀逼近 (Weierstrass 定理).

这是一个纯分析的命题. 1912 年 Bernstein[1] 基于概率的想法构造了这种多项式：设 $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$, 考虑其成功概率为 x 的 n 次 Bernoulli 试验，其成功次数 S_n 服从二项分布，由大数定律 S_n/n 依概率收敛于 x, 因而 $f(S_n/n)$ 依概率收敛于 $f(x)$. 但

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(S_n/n)] &= \sum_{k=0}^{n} f(k/n)P(S_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}
\end{aligned}
$$

为一 n 次多项式，记为 $p_n(x)$. 设 M 为 $|f(x)|$ 之上界，对任给 $\varepsilon > 0$

可选 $\delta > 0$ 使当 $|y - x| < \delta$ 时有 $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, 于是

$$\begin{aligned}|p_n(x) - f(x)| &= \left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right]\right| \\ &\le 2MP\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \ge \delta\right\} + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

由 Chebyshev 不等式

$$\begin{aligned}P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \ge \delta\right\} &\le \delta^{-2}\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \delta^{-2}n^{-1}x(1-x) \\ &\le \frac{1}{4n\delta^2},\end{aligned}$$

因而可选 n 足够大 (不依赖于 x) 使 $M/n\delta^2 < \varepsilon$, 这样就证明了均匀逼近性质.

当然我们可以不用概率语言而用纯分析语言来定义这种多项式, 把期望改成求和或积分, 用纯分析方法给出证明. 但是, 这样一来, 隐藏在概率语言后面的那种为概率论所特有的思维方式却无法翻译过来, 因而使得在概率论看来十分自然的东西却变得莫明其妙.

例 2 构造一个处处不可微的连续函数.

在很长一段时间里, 分析学家们相信连续函数一般都可微, 只可能在某些特殊的与孤立的点有例外. 1872 年 Weierstrass 构造了一个处处连续但处处不可微的函数:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\lambda_n x + \varphi_n),$$

其中 $\lambda_{n+1}/\lambda_n > q > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$, $\overline{\lim}_{n\longrightarrow\infty}|a_n|\lambda_n > 0$. 1904 年 Von Koch 给出了这种曲线的几何构造. 而对于这类函数性质的研究, 至今仍延绵不断.

然而我们知道, 早在 1827 年, 英国植物学家 Brown 就在显微镜下观察到了花粉粒子在静水中的奇怪的不规则的运动. 1905 年,

Einstein 对这种现象作了物理解释. 1923 年, Wiener[1] 构造了它的数学模型, 这就是我们现在称之为 **Brown 运动** 或 **Wiener 过程** 的随机过程.

按照 Wiener 的定义, 一维 Brown 运动 $W = \{W(t), t \geq 0\}$ 是具有以下性质的随机过程:

1° $W(0) = 0$;

2° $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \{W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \cdots, W(t_n) - W(t_{n-1})\}$ 为相互独立随机变量族;

3° $0 \leq s < t \Longrightarrow W(t) - W(s)$ 服从正态 $N(0, \sigma^2(t-s))$ 分布, 其中 $\sigma > 0$ 为一常数.

当 $\sigma^2 = 1$ 时, 称为标准 Brown 运动 (或简称为 Brown 运动). 取值于 $\mathbb{R}^d$ 的 d 维随机过程 $W(t) = (W^1(t), W^2(t), \cdots, W^d(t))$, 若 $\{W^j(t), t \geq 0\}_{j=1,2,\cdots,d}$ 为 d 个相互独立的一维 Brown 运动, 称为 d 维 Brown 运动.

在今天, Brown 运动已不仅是花粉粒子运动的模型, 它描述了像热电子运动、通信噪声、市场价格波动以及许多动态系统的随机干扰等等物理现象, 它的轨道的分析性质也是许多分析家注意的对象.

例如考察一维 Brown 运动, 由性质 3° 可知

$$\mathbb{E}[|W((t) - W(s)|^4] = 3|t-s|^2,$$

根据著名的 Kolmogorov 定理, 存在等价的随机过程, 其一切轨道为连续函数. 今后, 我们所说的 Brown 运动均指这样的连续过程. 现在我们要证明 Brown 运动几乎所有轨道是处处不可微的连续函数.

为叙述简单起见, 只考虑 [0,1] 区间. 若轨道 $W(\cdot, \omega)$ 在某点 $t \in [0,1)$ 可微, 必然在 t 点存在有限的右导数, 因而存在足够大的正整数 m 及 k, 使 $|W(t+h, \omega) - W(t, \omega)| \leq mh$ 对一切 $h \in \left[0, \frac{1}{k}\right)$ 成立. 令

$$A(m,k) \equiv \{\omega; \quad \exists t \in [0,1), \quad \forall h \in [0, 1/k),$$

$$|W(t+h,\omega)-W(t,\omega)|\leq mh\},$$

于是，“至少在某点 $t\in[0,1)$ 处可微”的轨道集合含于集合 $\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}A(m,k)$ 之中. 此集合未必可测，为证几乎所有轨道的处处不可微性，只要证明对一切正整数 m 及 k，存在一个包含 $A(m,k)$ 的零概率集合 $B(m,k)$.

设 $n\geq 4k$，将 [0,1) 区间 n 等分. 若 $\omega\in A(m,k)$，则必有 $t\in\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right)$ 对某个 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 成立，且对 $j=0,1,2$ 均有

$$\begin{aligned}
&\left|W\left(\frac{i+j+1}{n},\omega\right)-W\left(\frac{i+j}{n},\omega\right)\right|\\
&\leq\left|W\left(\frac{i+j+1}{n},\omega\right)-W(t,\omega)\right|+\left|W\left(\frac{i+j}{n},\omega\right)-W(t,\omega)\right|\\
&\leq\left(\frac{j+2}{n}\right)m+\left(\frac{j+1}{n}\right)m=\left(\frac{2j+3}{n}\right)m.
\end{aligned}$$

因为当 $n\geq 4k$ 时，上述区间最大者 $\left[t,\ \frac{i+3}{n}\right)$，其长度不超过 $\frac{1}{k}$. 记

$$\begin{aligned}
C(i,m,n)\equiv\bigcap_{j=0}^{2}\Big\{\omega;\Big|W\left(\frac{i+j+1}{n},\omega\right)&\\
-W\left(\frac{i+j}{n},\omega\right)\Big|\leq\left(\frac{2j+3}{n}\right)m\Big\},&
\end{aligned}$$

$$B(m,k)\equiv\bigcap_{n=4k}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n}C(i,m,n),$$

则 $B(m,k)$ 为可测集，且 $B(m,k)\supset A(m,k)$.

为计算 $C(i,m,n)$ 之概率，利用 Brown 运动的性质 2° 及 3°，由于 $W\left(\frac{i+j+1}{n}\right)-W\left(\frac{i+1}{n}\right)$ 为正态 $N(0,n^{-1})$ 分布，除以 $n^{-1/2}$ 后为标准正态分布，其绝对值不超过 ε 之概率最多是 ε，故

$$P\{C(i,m,n)\}\leq 3\cdot 5\cdot 7\cdot m^3n^{-3/2},$$

$$P\{B(m,k)\}\leq\lim_{n\to\infty}(3\cdot 5\cdot 7m^3n^{-1/2})=0,$$

这就证明了几乎所有轨道的处处不可微性. 由于有界变差函数几乎处处可微, 因而其几乎所有轨道在任一有限区间上的变差都是无界的. 此外, Brown 运动的轨道还有许多有趣的分析性质: 例如其零点集合为一完备疏朗集, 具有连续统的势但其 Lebesgue 测度为 0 (如同 Cantor 集合那样); 当 $\alpha < \frac{1}{2}$ 时它是 α-Hölder 连续; 当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, 它不是 α-Hölder 连续. 对几乎所有 ω, 有

$$\overline{\lim}_{t\downarrow 0} W(t,\omega)/\sqrt{2t\log\log(t^{-1})} = 1, \tag{0.1}$$

$$\underline{\lim}_{t\downarrow 0} W(t,\omega)/\sqrt{2t\log\log(t^{-1})} = -1, \tag{0.2}$$

$$\overline{\lim}_{t\uparrow \infty} W(t,\omega)/\sqrt{2t\log\log t} = 1, \tag{0.3}$$

$$\underline{\lim}_{t\uparrow \infty} W(t,\omega)/\sqrt{2t\log\log t} = -1. \tag{0.4}$$

而且有如下的 Fourier 展式:

$$\begin{aligned} W(t,\omega) =& t\xi_0(\omega) + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\xi_k(\omega)\frac{(\cos 2k\pi t - 1)}{2k\pi} \\ &+ \eta_k(\omega)\frac{\sin 2k\pi t}{2k\pi}\Big] \qquad (0 \le t \le 1), \end{aligned} \tag{0.5}$$

其中 $\{\xi_0, \xi_1, \cdots ;\ \eta_1, \eta_2, \cdots\}$ 为相互独立的 $N(0,1)$ 随机变量序列. 有关 Brown 运动轨道性质的详尽讨论, 读者可参看 Itô-Mckean[1] 或 Hida[1]. 有趣的是, 表示式 (0.5) 和 Weierstrass 构造的函数颇为相似.

例 3 构造某些数学物理方程边值问题的显式解.

当 Brown 1827 年在显微镜下发现花粉粒子的奇怪运动时, 他没有料到在下一世纪, 这种现象竟给数学和物理学的许多分支的发展以强有力的刺激和推动.

我们知道, Brown 运动是一个马氏过程. d 维 Brown 运动 W 的转移概率密度

$$p(t,x,y) = (2\pi t)^{-d/2}\exp\{-|x-y|^2/2t\}$$

$$(t > 0; \qquad x, y \in \mathbb{R}^d) \tag{0.6}$$

正好是热方程

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{1}{2}\Delta u(t,x) \tag{0.7}$$

的基本解. 对 $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, 函数

$$u(t,x) \equiv \mathbb{E}[f(W(t)+x)] \tag{0.8}$$

是方程 (0.7) 的 Cauchy 问题:

$$u(0,x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{0.9}$$

的唯一解. 这样, 人们就得到了纯分析问题的解的概率表示. 再考虑 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in G, \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial G, \end{cases} \tag{0.10}$$

其中 G 是 $\mathbb{R}^d$ 中某个区域, ∂G 为其边界, φ 为定义在边界上的某个函数. 问题是要寻求这样的函数 $u(x)$: 它在 G 内调和, 在 $G \cup \partial G$ 连续且当 x 趋于边界点 $x_0 \in \partial G$ 时有 $u(x) \longrightarrow \varphi(x_0)$. 一般说来, 甚至当 φ 在 ∂G 上有界连续时, 问题也不一定有解; 若解存在, 除非 G 为有界区域, 也可能不唯一. 而利用 Brown 运动作为工具, 可以研究任意开集 G 中的 Dirichlet 问题, 且允许 φ 在 ∂G 的一个很小的集合 (这个集合 Brown 运动的轨道实际上不能达到) 上不连续.

设 $x \in G, \tau_x$ 为自 x 出发的 d 维 Brown 运动 $W(t)+x$ 首次到达边界 ∂G 的时刻. 那么, 在关于边界及边界函数相当宽的条件下可以证明函数

$$u(x) \equiv \mathbb{E}[\varphi(W(\tau_x)+x)] \tag{0.11}$$

是 Dirichlet 问题 (0.10) 的唯一解.

以上事实揭示了 Brown 运动和古典位势理论的深刻联系. 利用 Brown 运动的轨道, 可以构造出与 Laplace 算子 Δ 有关的许多

不同边值问题的显式解. 人们自然要问, 对于一般的二阶椭圆微分算子:

$$L \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}(x)\partial_i\partial_j + \sum_{i=1}^{m} b^i(x)\partial_i \tag{0.12}$$

是否有类似的结果呢? 正是这个问题, 引导到 20 世纪 40 年代日本数学家伊藤清 (K. Itô) (参看 Itô[1,2], 与此同时还有前苏联数学家 Gihman[1]) 创立随机积分和随机微分方程的理论. 在那里, 代替 Brown 运动的是一般的扩散过程, 它是以下随机方程的解:

$$X^i(t) = x_i + \int_0^t b^i(X(s))ds + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \sigma_j^i(X(s))dW^j(s)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m), \tag{0.13}$$

其中 $x = (x_1, \cdots, x_m) \in I\!R^m$, $W(t) = (W^1(t), \cdots, W^d(t))$ 为 d 维 Brown 运动, 矩阵 $\boldsymbol{\sigma}(x) = (\sigma_j^i(x))_{1\le i\le m, 1\le j\le d}$ 为矩阵 $\boldsymbol{a}(x) = (a^{ij}(x))_{1\le i,j\le m}$ 的平方根: $\boldsymbol{a}(x) = \boldsymbol{\sigma}(x)\boldsymbol{\sigma}(x)^*$. 在系统满足一定条件时, (0.13) 存在唯一解 $X(t) = (X^1(t), \cdots, X^m(t))$, 它是轨道连续的 m 维强马氏过程, 以 L 为生成算子, 称为 L- 扩散过程. 特别当 $m = d$, $b^i(x) = 0$, $a^{ij}(x) = \delta_{ij}$ 即 $\boldsymbol{a}(x) = I$(单位矩阵) 时, L 化为 $\frac{1}{2}\Delta$, $X(t)$ 就是自 x 出发的 m 维 Brown 运动.

伊藤随机分析提供了直接构造 L- 扩散过程轨道的方法, 因而得到了与二阶椭圆微分算子 L 有关的许多问题的概率解, 在处理具有退化、无界或不光滑系数的椭圆、抛物型方程时, 更显出它的优越性. 例如 Freidlin[1,2] 关于具有无界系数的退化椭圆、抛物型方程在无界区域中的边值问题可解性的结果, Krylov[1,2] 关于 Bellman 型非线性抛物与椭圆型方程的理论, 都是应用概率方法研究分析问题的范例. 特别是 1976 年法国数学家 P.Malliavin[2] 建立了一套对 Brown 运动轨道泛函的微分运算, 创立了 **随机变分学**(Malliavin calculus, 或称 **Malliavin 随机分析**), 用概率方法证明并改进了关于偏微分算子亚椭圆性的著名的 Hörmander 定理, 开辟了用概率方

法解决分析问题的一个崭新领域，成为随机分析发展史上一个新的里程碑.

为何概率方法有如此的威力？其主要原因之一在于它的明显的直观性. 分析中处理的宏观量常常是物理中微观量的统计平均，这些微观量比宏观量更接近物理实际. 然而概率的直观又不同于物理的直观，它是建立在严格的数学基础之上的，它不仅启发人们的思维，引导到新的发现，而且它的证明也是十分严格的. 可以说，概率方法是兼有物理直观性和数学严密性的一种科学分析方法.

随机分析学，按照伊藤清 [6] 的说法，是“增添了随机风趣的分析学”. 在他被授于 1987 年 Wolf 数学奖时，对他的贡献的评价是：“他使我们对 Markov 样本路径的无穷小发展有了一个完全的认识. 他的随机分析可以看作随机王国中的牛顿定律，它提供了支配自然现象的偏微分方程和隐藏着的概率机制之间的直接翻译过程，其主要成分是对 Brown 运动的函数的微分和积分运算，由此而产生的理论是近代纯粹与应用概率论的基石.” (Notices of AMS, Vol.34, No.2, p.286, 1987). 因此，也可以说，随机分析学是关于随机函数 (或随机过程) 轨道的无穷小分析学.

研究随机过程，有三种不同的观点：

一、按古典的定义，随机过程 $X=\{X_t(\omega),t\in T\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的一族随机变量. 这里 T 是实数轴 $\mathbb{R}$ 中的子集，一般是正整数集或区间. 每固定 $t\in T$, 得到一个随机变量 $X_t(\cdot)$. 若以 $L^0(\Omega)$ 表示由全体随机变量所构成的线性空间，并在其中定义准范数：

$$\|\xi\|_{L^0}\equiv \mathbb{E}[|\xi|\wedge 1], \tag{0.14}$$

则 $L^0(\Omega)$ 为一 Fréchet 空间. 因此，一个随机过程可以看作 **定义于 T 上取值于 $L^0(\Omega)$ 的抽象函数**. 由于在 $L^0(\Omega)$ 中对 a.s. 相等的随机变量不加区别，所以在这种观点下，若过程 $X=\{X_t,t\in T\}$ 和 $Y=\{Y_t,t\in T\}$ 满足：

$$P\{X_t=Y_t\}=1,\qquad \forall t\in T, \tag{0.15}$$

就称 X 与 Y**随机等价** 或互为 **修正**. 在这种观点下, 对随机过程的微积分运算即取值于线性拓扑空间的抽象函数的微积分运算. 其中特别常见的情形是所谓二阶矩过程, 即取值于 $L^2(\Omega)$ 的抽象函数, 这里 $L^2(\Omega)$ 是二阶矩存在的随机变量 (等价类) 所构成的 Hilbert 空间, 其中内积由

$$(\xi,\eta)_{L^2}\equiv \mathbb{E}[\xi\eta] \tag{0.16}$$

定义. 因此, 二阶矩过程不外是 Hilbert**空间**$L^2(\Omega)$**中的一条曲线**. 按这种观点发展的一套微积分学就是所谓均方微积分. 然而, 从本质上说来, 它只是泛函分析的一部分, 没有什么“随机风趣”, 因此我们不打算在本书中介绍.

二、随机过程 $X=\{X_t(\omega),t\in T\}$, 每固定 $\omega\in\Omega$, 得到一个普通的实函数 $X.(\omega)$, 称为 **样本函数** 或 **轨道**, 若以 $\mathbb{R}^T$ 表示定义在 T 上的实值函数全体所构成的空间, 即无穷维乘积空间, 以 $\mathcal{B}^T$ 表示其乘积 $\sigma-$ 代数, 则过程 $X:(\Omega,\mathcal{F})\longrightarrow(\mathbb{R}^T,\mathcal{B}^T)$ 可以看作一个 **取值于可测空间**$(\mathbb{R}^T,\mathcal{B}^T)$ **的随机变量**. 在这种观点下, 相应于随机变量的 a.s. 相等和同分布, 随机过程也有两种不同的等价性:

1° 若过程 X 与 Y 几乎所有样本函数重合, 即

$$P\{X_t=Y_t,\ \forall t\in T\}=1, \tag{0.17}$$

则称 X 与 Y**无区别**.

随机过程 X 既然作为 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 到 $(\mathbb{R}^T,\mathcal{B}^T)$ 的可测映象, 它就在 $(\mathbb{R}^T,\mathcal{B}^T)$ 上产生一个概率测度:

$$\widehat{\mu}_X(B)\equiv P\circ X^{-1}(B)\equiv P\{\omega;X.(\omega)\in B\},\qquad B\in\mathcal{B}^T, \tag{0.18}$$

称为 X 的分布.

2° 若过程 X 与 Y 有相同的分布: $\widehat{\mu}_X=\widehat{\mu}_Y$, 则称 X 与 Y**弱等价**.

由 Kolmogorov 构造定理可知, 过程的分布由其有限维分布族所唯一确定, 因此, X 与 Y 弱等价也就是 X 与 Y 具有相同的有限维分布族. 显然, 若 X 与 Y 无区别, 必随机等价, 因而弱等价,