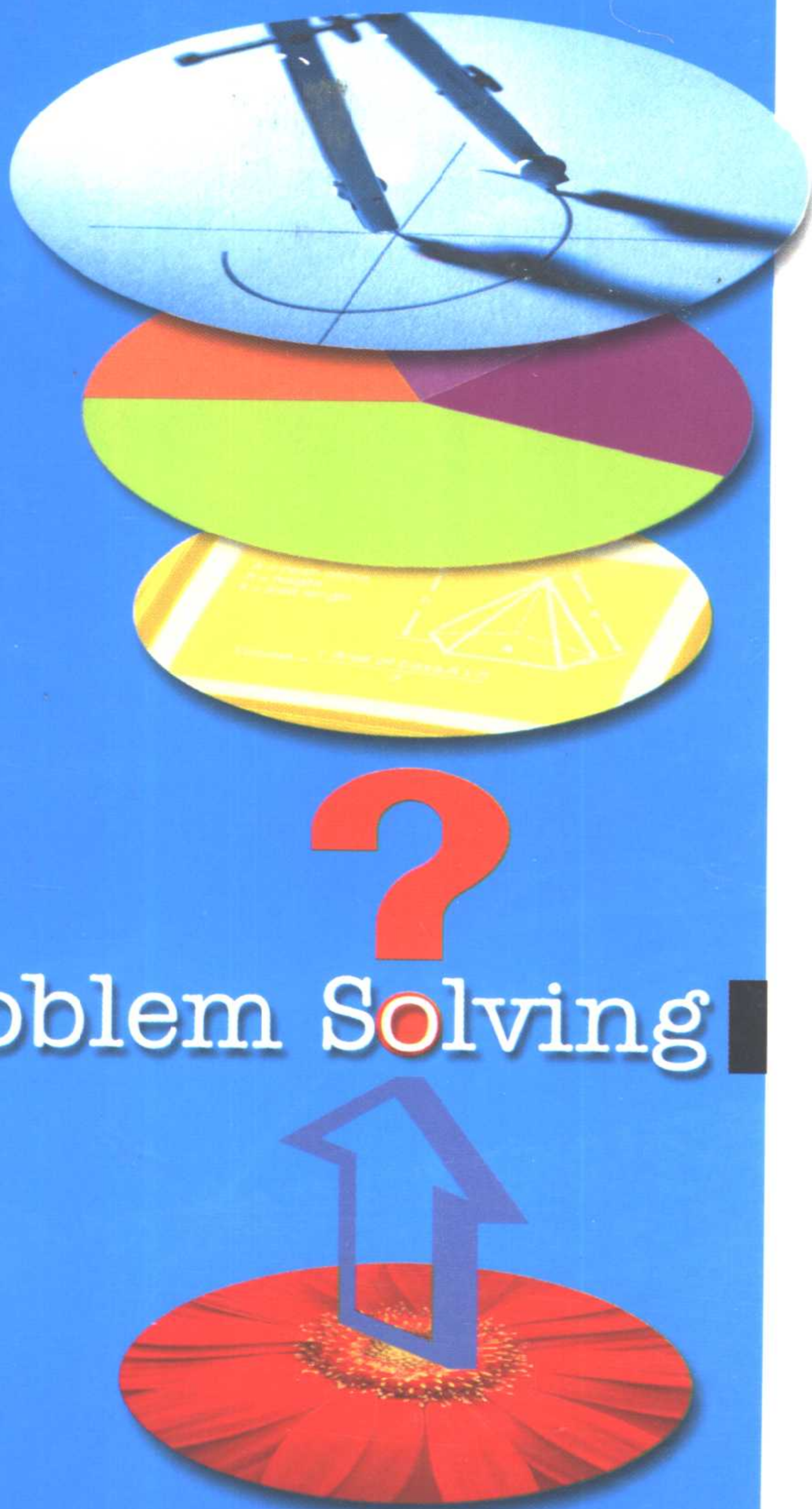


小学数学问题解决

郜舒竹 编著

实例分析

Problem Solving



1. 什么是“问题”？
2. “问题”来源于哪里？
3. 什么样的问题是“好问题”？
4. 什么是“问题解决”？
5. 如何进行“问题解决”？
6. “问题解决”有什么用？

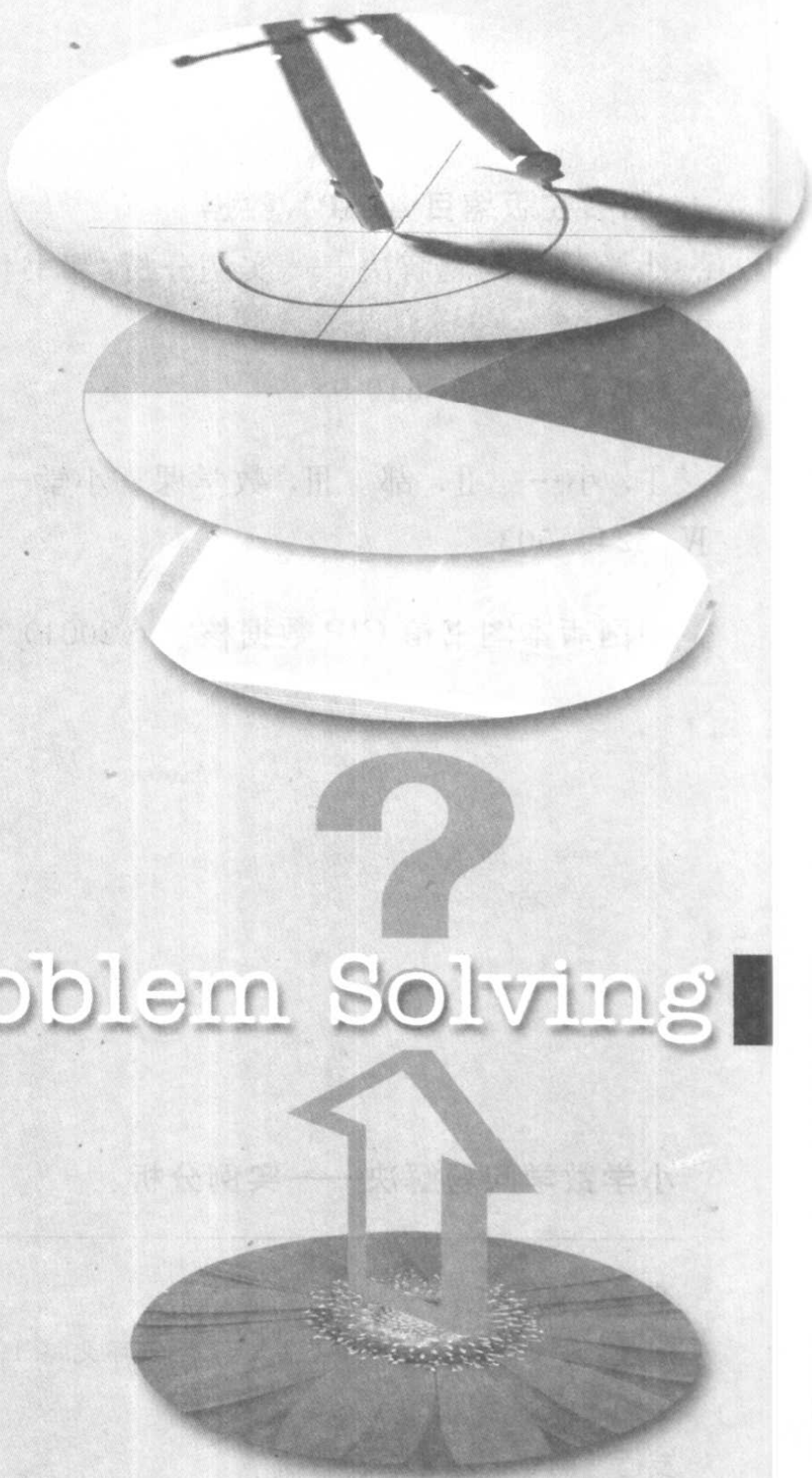
开明出版社

小学数学问题解决

郇舒竹 编著

实例分析

Problem Solving



1. 什么是“问题”？
2. “问题”来源于哪里？
3. 什么样的问题是“好问题”？
4. 什么是“问题解决”？
5. 如何进行“问题解决”？
6. “问题解决”有什么用？

开明出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

小学数学问题解决——实例分析/郜书竹编著. —北京: 开明出版社, 2002

ISBN 7-80133-610-0

I. 小… II. 郜 III. 数学课—小学—教学参考资料
IV. 624. 503

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 094153 号

小学数学问题解决——实例分析

BA57/OP

编著 郜舒竹

出版 开明出版社 (北京海淀区西三环北路 19 号)

印刷 保定市印刷厂

发行 新华书店北京发行所

开本 880×1230 毫米 特 1/32 开 印张 5.75 字数 139 千

版次 2002 年 1 月第 1 版 2002 年 1 月第 1 次印刷

书号 ISBN-80133-610-0 / G · 536

印数 00001—5000 册

定价 9.00 元

序 言

国家教育部 2001 年 7 月最新颁布的《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》中，把“问题解决”作为课程的目标之一。明确规定：初步学会从数学的角度提出问题、理解问题，并能综合应用所学的知识和技能解决问题，发展应用意识。形成解决问题的一些基本策略，体验解决问题策略的多样性，发展实践能力与创新精神。学会与人合作，并能与他人交流思维的过程和结果。初步形成评价与反思的意识。

本书内容源于作者多年来从事小学数学师资培训教学工作，在所教多门课程中进行尝试和积累的一些有关“问题解决”的素材，这些“问题解决的实例”在教学中受到普遍好评。所以本书既可以作为小学数学教师培训内容的参考，也可以作为小学数学教师从事教学、科研工作的资料。

另外，本书大部分内容所涉及的数学知识不超出小学数学范围，而且行文是针对小学生的。所以本书也可以作为学有余力的小学生的课外读物，特别是参加数学竞赛的赛前培训教材。

把本书定名为《小学数学问题解决——实例分析》是基于如下的考虑：

1. “问题解决（Problem Solving）”是近年来数学教育改革的热点话题。在我国数学教育领域，特别是小学数学教育领域，这方面的研究尚处在理论探讨阶段，缺少对“问题解决”内容的挖掘。本书试图对此作一尝试，以期成为“引玉之砖”。

2. 美国著名数学教育家波利亚有一句名言：“好的数学教师首先应该是一名解题高手。”数学教师的教学和科研工作离不开好的问题，因此希望本书成为小学数学教师案头的“问题手册”。

3. “问题”是学习数学最好的载体。“问题解决”是学生思维发展的最高层次。希望本书还能够成为学生锻炼思维的“操场”。

本书在内容的选取上力求体现“新、全、好、要”四字方针。“新”，指的是尽量回避其他文献中经常出现的内容；“全”，指的是书中所有内容几乎覆盖了小学数学的全部重要知识点；“好”，是指书中出现的问题都应该是“好题”，当然什么样的问题是好题，众说不一，还需要读者去评判；“要”，是指问题解决的过程要尽量体现最基本、最重要的思想和方法。

本书的行文改变了传统的“例题→分析→解答”三步曲的方式，力求展示问题发生、发展的全过程。特别是一个问题的解决过程中所反映出的思想和方法，以及所引申出来的新问题等，这些内容或许就是“问题解决”的真谛。

在阅读本书的过程中，建议读者不断地思考以下几个关于“问题解决”的问题：

1. 什么是“问题”？
2. “问题”来源于哪里？
3. 什么样的问题是“好问题”？
4. 什么是“问题解决”？
5. 如何进行“问题解决”？
6. “问题解决”有什么用？

不要以为这些是可笑的问题，也不要以为这些问题容易回答。不同的专家、学者给出的答案都不一样，甚至是互相矛盾的。也许你的答案最贴近“真”的答案。

最后，向读者透露两个阅读本书的窍门：一是“学的最好方法是做”，二是“风吹哪页读哪页”。聪明的读者一定能够领会这两句话的含义。

本书得以顺利出版，要感谢开明出版社焦向英社长的远见卓识和责任编辑刘维维的辛勤工作。

郜舒竹

2002年1月

目 录

与整数有关的问题	(1)
关于记数法的问答	(3)
关于两位数的研究	(9)
从一个排队问题想到对三位数的一种分类	(14)
约数的个数	(20)
图形填数问题的研究	(26)
图形填数问题的再研究	(32)
 与分数有关的问题	 (37)
学会用“1”	(39)
量等率不等	(42)
“化假分数为带分数”的作用	(50)
借助“第三者”，巧妙比大小	(53)
 与几何有关的问题	 (55)
已知整体求局部（一）	(57)
已知整体求局部（二）	(67)
从三角形的中位线说起	(74)
旋转的线段	(83)

与方法有关的问题	(89)
基本概念很关键	(91)
用先抓“嫌疑犯”的办法解题	(94)
由特殊想一般	(97)
联想出问题	(102)
再谈“联想出问题”	(108)
反其道而行之	(113)
解题之后“回头看”	(119)
 与生活有关的问题	 (125)
会不会是星期日	(127)
“八字眉”是“8点20分”吗	(130)
钟表上的特殊时刻	(134)
走时不准的表	(137)
貌似“相遇”，实为“追及”	(140)
不必非要列方程	(144)
“和差问题”真有用	(147)
车少人多巧安排（一）	(151)
车少人多巧安排（二）	(156)
不同之处是关键	(163)
上山、下山的行程问题（一）	(168)
上山、下山的行程问题（二）	(174)

与整数有关的问题

任何一种东西之所以被认识，是由于它包含着一种数；没有这种数，心灵什么东西也不能思考，什么东西也不能认识。

如果认为对数的认知，仅仅是由于记数和计算的需要，那就错了。原始数论就出自于人类对希望的祈求和对恐惧的回避。

助读指南

- 关于记数法的问答
数字符号和记数法是构成自然数大家庭的两个要素。
- 关于两位数的研究
充分地认识两位数是了解数的基础。因为两位数是包括自然数两要素最简单的数。
- 从一个排队问题想到对三位数的一种分类
认识的过程是发现和整理的过程。分类就是整理的一种方法。
- 约数的个数
认识一个对象的最好办法是认识与之相关的其他对象。
- 图形填数问题的研究
追求美是人的本性，数与形的结合蕴含着美。
- 图形填数问题的再研究
任何问题的研究都不会戛然而止。

关于记数法的问答

先请同学们回答下面两个问题：

(1) 四位数 1995 表示什么意思？

(答：四位数 1995 表示 1000 个 1、100 个 9、10 个 9 和 1 个 5 的和。也就是 $1995 = 1 \times 1000 + 9 \times 100 + 9 \times 10 + 5 \times 1$ 。)

(2) 如果用字母表示每一位上的数字，例如四位数 $abcd$ 表示什么意思？

(答： $abcd = 1000a + 100b + 10c + d$ 。)

下面我们通过一些问题来学习如何利用记数法解决问题。

有一个三位数，减去它的各位数字之和，其差还是一个三位数 $\overline{46x}$ ，求字母 x 表示哪一个数字？

如果设这个三位数为 abc ，那么这个三位数可以写成怎样的表达式？

(答： $abc = 100a + 10b + c$ 。)

再请同学们想一想，什么叫这个三位数的各位数字之和？应该怎样表示？

(答：这个三位数的各位数字之和为 $a + b + c$ 。)

回答了以上问题，根据已知条件就可以列出一个含有

a 、 b 、 c 和 x 的等式。请大家想一想怎样列？

(答: $100a + 10b + c - (a + b + c) = 46x$ 。)

像这样含有多个未知数的等式，叫做不定方程，不定方程的解法有很多，通常都要具体问题具体分析。下面来看应该怎样求 x 的值。先把上面等式变化一种形式：

$$99a + 9b = 459 + (1 + x)$$

观察一下，其中的 $99a$ 、 $9b$ 和 459 这三个数有什么共同的特点？

(答: $99a$ 、 $9b$ 、 459 这三个数都是 9 的倍数。)

这时 $1 + x$ 应该满足什么条件？

(答: $1 + x$ 也必须是 9 的倍数。)

现在你能看出 x 等于几了吗？

(答: 由于 x 是从 0 至 9 的一个整数，因此要使 $1 + x$ 是 9 的倍数， x 只能是 8。)

这道题到这儿就解完了。我们再来回顾一下，在解决问题的过程中，两次利用了记数法的表达式，一次是将设出的三位数 abc 写为 $100a + 10b + c$ ，另一次是将三位数 $46x$ 表示为 $460 + x$ 。要注意使用记数法的表达式通常都是将字母分离出来。

一个两位数，个位与十位上的数字之和为 8，如果把这两个位数的十位与个位数字对调，得到的新两位数比原两位数大 18。求原两位数。

如果设这个两位数为 ab ，那么它可以写为怎样的形式？

(答: 可以写为 $\overline{ab} = 10a + b$ 。)

把这个两位数的十位数字与个位数字对调之后所得

的两位数可以写为怎样的形式？

(答： $ba=10b+a$ 。)

这个两位数的十位数字与个位数字之和为 8 应该怎样表示？

(答： $a+b=8$ 。)

现在请同学们想一想这道题可以怎样解答？

如果设这个两位数为 ab ，则有下列等式成立：

$$\begin{cases} 10b+a-(10a+b)=18 \\ a+b=8 \end{cases}$$

化简可得：

$$\begin{cases} b-a=2 \\ b+a=8 \end{cases}$$

根据和差问题的求解公式得：

$$b=(2+8)\div 2$$

$$=5$$

$$a=(8-2)\div 2$$

$$=3$$

答：原两位数为 35。

一个三位数的各位数字之和是 20，其中十位数字比个位数字大 1，如果把这个三位数的个位数字与百位数字对调位置，则得到一个新的三位数，这个新三位数比原三位数大 198。求原来的三位数是多少？

与前面一样，设原三位数为 abc ，则有：

$$\overline{abc}=100a+10b+c$$

用与前面类似的方法就可以解出 a, b, c 。

设原三位数为 abc ，则有：

$$100c + 10b + a - (100a + 10b + c) = 198$$

也就是： $99c - 99a = 198$

约去 99 得： $c - a = 2$

同时还有： $a + b + c = 20$

$$b - c = 1$$

由这三个等式可以得到：

$$a + (a + 3) + (a + 2) = 20$$

$$3a + 5 = 20$$

$$a = 5$$

$$c = 7$$

$$b = 8$$

所以，原三位数为 587。

有一个人是在某年 1 月 1 日出生的，他在 1997 年的年龄恰好是他出生年份数的各位数字之和。
求：这个人在 1997 年时的年龄是多少岁。

先请同学们想一想，要想求出这个人在 1997 年的年龄，关键是求出哪一个数量？

（答：关键是求出这个人的出生年份数。）

如果设这个人的出生年份数为 $1abc$ ，根据已知条件我们可以列出怎样的等式？

（答： $1997 - (1000 + 100a + 10b + c) = 1 + a + b + c$ 。）

下面，请同学们自己解答。以下的解答供参考。

设这个人的出生年份数为 $1abc$ 则有：

$$1997 - (1000 + 100a + 10b + c) = 1 + a + b + c$$

化简可得： $101a + 11b + 2c = 996$

试验这个不定方程的解发现 $a = 9$ ，这时：

$$11b + 2c = 996 - 909$$

即 $11b + 2c = 87$

再对 b 进行试验，发现 $b = 7$ ，这时：

$$2c = 87 - 77$$

$$2c = 10$$

$$c = 5$$

因此，这个人的出生年份数为 1975 年，从而，他在 1997 年的年龄为：

$$1997 - 1975 = 22 \text{ (岁)}$$

所以，这个人 1997 年时的年龄为 22 岁

这道题所用的方法是数学中常用的，当我们所研究的对象有多种可能性，一时不能确定它的答案时，就可以一一进行试验。例如在前面求 a 的值时， a 可能是 0 至 9 的整数之一。通过试验发现 a 的取值只能是 9。这种方法看起来有点儿“笨”，可是它在日常生活和科学研究中，经常用到

练习

1. 一个两位数，各位数字之和的 5 倍比原数大 4，求这个两位数
2. 有一个两位数，如果把数字 1 加在它的前面 可以得到一个三位数，加在它的后面也得到一个三位数，这两个三位数之差为 414。求：原来的两位数是多少？
3. 一个三位数的各位数字之和是 12，其中百位数字与个位数字

之和等于十位数字。如果把把这个三位数的个位数字放到百位数字之前，得到一个新的三位数，已知新的三位数比原三位数大 351。求：原来的三位数是多少。

4. 有一个两位数，如果把数字 3 加在它的前面可以得到一个三位数，加在它的后面也可以得到一个三位数，在它的前后各加一个 3 可以得到一个四位数，这两个三位数和一个四位数之和等于 3600。求原两位数

5. 某人在 2000 年的年龄恰好是他出生年份数的各位数字之和，求这个人 2000 年时的年龄。（假定这个人是在 1 月 1 日出生的）



关于两位数的研究

人类思维的创造性体现在对“未知”的探索。而这种探索的开端就是“提问题”，有了问题，探索就有了目标。在此，我们提出一个口号：想知道什么就问什么。为了说明这种想法，让我们从“关于两位数，我想知道什么”开始，尽可能多地提出与两位数有关的问题。比如我们可以提出如下问题：

1. 一共有多少个两位数？所有两位数的和是多少？
2. 两位数中有多少个奇数？它们的和是多少？
3. 两位数中有多少个偶数？它们的和是多少？
4. 两位数中有多少个完全平方数？它们的和是多少？
5. 两位数中有多少个质数？它们的和是多少？
6. 哪些两位数不能表示为连续自然数之和的形式？能表示为连续自然数之和的两位数，应该怎样表示？
7. 约数个数最多的两位数有多少个约数？并求出这些两位数。
8. 两位数的约数个数一共有多少种可能性？把约数个数相同的两位数算作一组，哪一组中的两位数最多？
9. 两位数中十位数字大于个位数字的有多少个？小于个位数字的有多少个？等于个位数字的有多少个？
10. 两位数中从 0 至 9 的每个数字分别出现了多少次？

一气儿提出了 10 个问题，同学们一定还能提出更多更好的问题，那就尽管提吧，别忘了，想知道什么，就问什

么。问题提出来了，还要想方设法去解决它。上面的问题你都能解决吗，抽时间试试吧。

下面还要提出一个复杂一些的问题。

用一个两位数做分母，用同一个两位数的两位数字之和做分子，可以得到 90 个分数，对这 90 个分数我们可以提出如下问题：

(1) 求出这些分数的最大者和最小者。

(2) 这些分数约分后一共可以形成多少个不同的分数值。

(3) 这些分数有多少个大于 0.5？有多少个小于 0.5？

(4) 这些分数约分后有多少个是单位分数？

为了研究的方便，我们用字母 a 表示两位数的十位数字，用字母 b 表示个位数字，这个两位数就是 $10a+b$ ，题目中所说的分数可以写为：

$$\frac{a+b}{10a+b}$$

为了对这个式子进行简化，我们可以研究它的倒数：

$$\frac{10a+b}{a+b}$$

对这个式子变形如下：

$$\frac{10a+b}{a+b} = 1 + \frac{9a}{a+b} = \frac{9}{1 + \frac{b}{a}}$$

由此可见，分数 $\frac{10a+b}{a+b}$ 的值由 $\frac{b}{a}$ 确定。现在我们就逐个解决上面四个问题了。