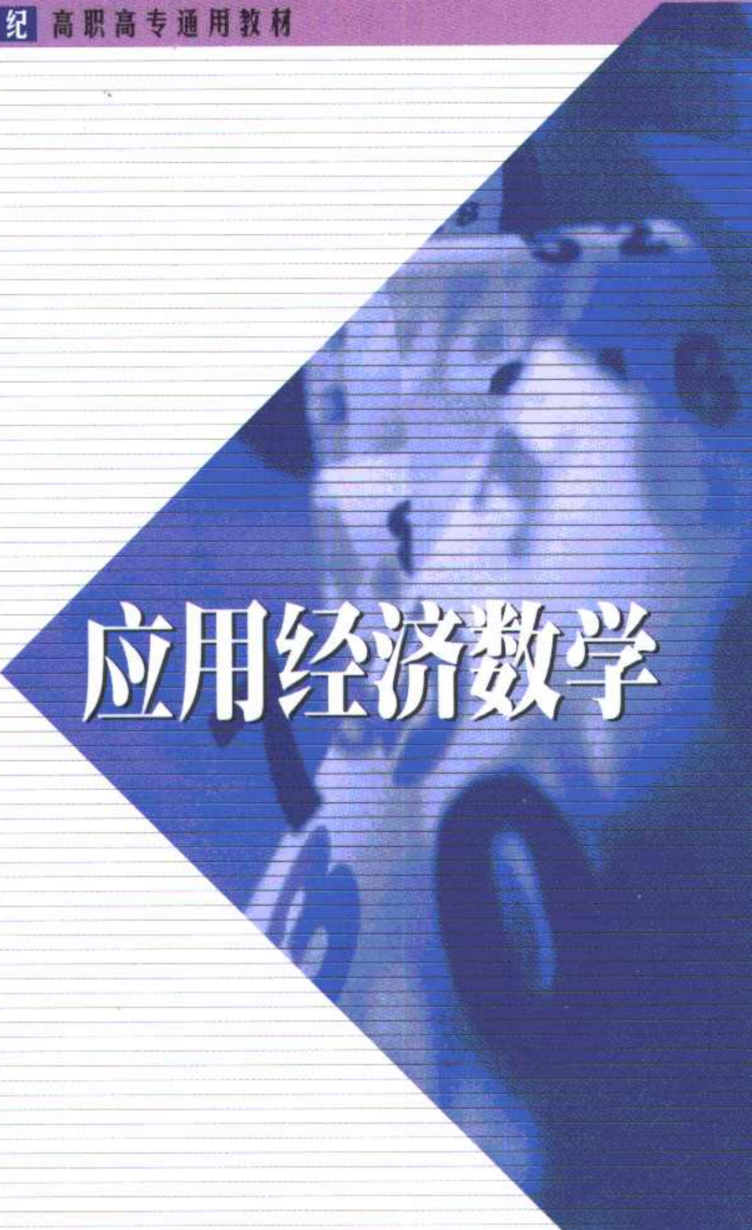
21世纪 高职高专通用教材



应用经济数学

王永祥 主编

曾文斗 主审

上海交通大学出版社

21 世纪高职高专通用教材

应用经济数学

主　编　王永祥
副主编　李树冬　章朝庆
主　审　曾文斗

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书以经济应用为主导，体现职业技术教育的特点，在内容及选材上把握“必需、够用”的原则，力求简明贴切。全书共分三部分，第一部分微积分，包括函数、极限与连续、导数与微分、导数应用、定积分及多元函数微积分简介；第二部分线性代数，包括矩阵、线性方程组及线性规划等；第三部分概率基础，包括随机事件及其概率、随机变量及数理统计方法简介。每章均配有课堂演练及实习作业，并附有习题答案。

图书在版编目(CIP)数据

应用经济数学/王永祥主编. —上海：上海交通大学出版社，2000
(21世纪高职高专通用教材)
ISBN 7-313-02394-4

Ⅰ.应… Ⅱ.王… Ⅲ.经济数学 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第36333号

应用经济数学
王永祥 主编
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路877号 邮政编码200030)
电话：64071208 出版人：张天蔚
常熟市文化印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本：890mm×1240mm 1/32 印张：13 字数：369千字
2000年9月第1版 2000年9月第1次印刷
印数：1—4050
ISBN 7-313-02394-4/F·360 定价：20.50元

前　言

我国的高等教育体制改革正在不断深化，以培养应用型、实用技术型人才为重点的高等职业教育正在蓬勃发展。高等职业教育讲求的是理论与实践的紧密结合，重点培养学生的动手能力。理论教学应“以应用为目的，以必需、够用为度，以掌握概念、强化应用为教学重点”。为适应和满足这一新的教学模式，我们组织编写了这本《应用经济数学》以供各财经类、管理类专业的教学需求。

本教材内容简练，实用性强。每章都配有课堂演练，以满足实践教学要求。可作为职业技术学院及各类成人高校的教学用书和参考读物，亦可作为自修教材供广大读者使用。

本书内容分三部分。第一部分微积分，包含了函数极限与连续、导数与微分、导数应用、不定积分与微分方程简介、定积分及多元函数微积分初步等内容；第二部分线性代数，包含了矩阵运算、初等变换、矩阵的秩、线性方程组及线性规划等内容；第三部分概率统计基础，包含随机事件及其概率、随机变量及其数字特征和数理统计方法简介等内容。全书供一学年使用，也可根据不同教学要求选用部分内容。书中有些内容加了“ * ”号作为选修，使用本书时可根据教学需要和学时安排灵活取舍。

参加本书编写工作的人员有：王永祥、李树冬、章朝庆、孙显录、韩延旭、王涛宇、王丽芳、姚力民、薛学铭。另外，郑鹏飞教授、朱霄凤副教授对本书的内容选材提出了宝贵的意见。

在本书编写过程中，得到有关院校领导及同志的关心和支持，同时参阅了较多的教材和资料，在此一并表示衷心的感谢！由于水平和时间所限，错误一定难免，盼望广大读者、专家、学者给予批评指正。

编　者

第一部分　微积分

1　概述

微积分是高等数学的基本内容，是研究自然和社会规律的重要工具，它不仅在经济领域中有着直接的应用，而且也是学习其他经济数学知识的基础。为了学好微积分基础，本章首先复习和介绍微积分学所要研究的对象——函数及其相关知识，并做适当延伸。提请大家要改变学习初等数学的思维方法，以辩证的思想思考和分析现有问题，因为初等数学主要研究的是“死”的常量，而高等数学重点研究的是“活”的变量。

1.1　实数集

1.1.1　数集与数轴

数集即数的集合。人类最初认识的是自然数，我们把自然数的全体看作是一个整体，那么这个整体就构成了一个集合，称为自然数的集合，这是人类最早认识的数集。

除了自然数集外还有整数集、有理数集、无理数集、……。有理数集和无理数集一起构成了实数集，微积分学就是以实数集为研究工作平台的。

$\{x|x>2\}$表示一个数集，它是由比 2 大的那些实数构成的，$\{x|x^2-x-2=0\}$表示的是由 -1、2 两个实数构成的数集。数集还可以用其他形式加以表示。

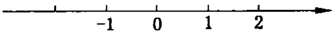


图 1.1

为了让数集形象化，我们引入了数轴的概念——用一条有方向、有原点、有长度单位的直线来表示全体实数(图 1.1)。数轴上的每一个点都表示一个实

数，而每一个实数都能在数轴上找到一个点，这就建立了“数”与“点”的一一对应关系，这个性质称为实数的连续性。以后我们可能把“一个数”称为“一个点”，“点”就是“数”。

数轴上“点”的意义是概念性的，它不占据空间体积，任意两个点之间总可以插入一个点，从而能插入无数个，这种性质称为稠密性。实际上无理数也有稠密性，任意两个无理数，如$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$之间，至少存在$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$这一个无理数，当然能存在一个就可以存在无数个。

以上我们用到了“无数”的概念，无数也就是无穷尽，这要靠我们的想象力去丰富它，以后我们经常要用到“无穷”的概念。

1.1.2 区间

区间是建立在数轴概念上的数集。

设 a、b 为两个任意的实数，不妨设 $a<b$。

1) 称满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数x 的集合，为以 a、b 为端点的闭区间，记作$[a,b]$，见图 1.2 所示（由于实数 a、b 的任意性，数轴的原点没有标明位置，下同）。

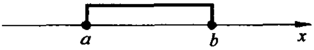


图 1.2

2) 称满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数x 的集合，为以 a、b 为端点的开区间，记作(a,b)，见图 1.3 所示。

3) 称满足不等式 $a\leqslant x<b$（或 $a<x\leqslant b$）的所有实数 x 的集合，为以 a、b 为端点的半闭或半开区间，记作$[a,b)$（或$(a,b]$）。

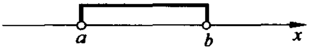


图 1.3

以上区间都有一定的长度，$b-a$ 就是区间的长。另有一类称为无限区间，诸如，$[a,+\infty)$、$(a,+\infty)$、$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$及$(-\infty,+\infty)$等，如图 1.4 所示。这里的符号“∞”并不表示一个数，它只是一个记号，读做“无穷大”。

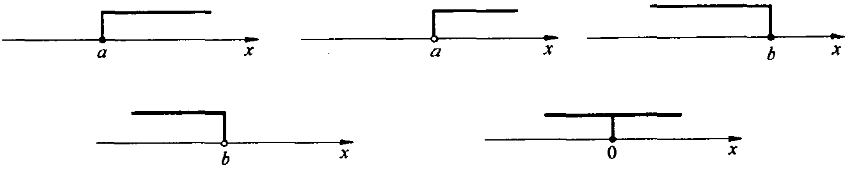


图 1.4

1.1.3 邻域

邻域是一种特定的区间。

设 x_0、δ 是两个任意的实数，其中 $\delta>0$（δ 一般表示的是一个比较小的数），则称开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ 邻域，δ 称为邻域的半径，如图 1.5 所示。

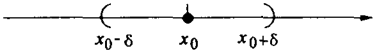


图 1.5

图 1.6 所表示的是一个空心邻域（即不包含点 x_0），空心邻域也可以用不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 来表示。

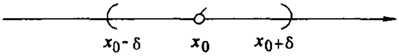


图 1.6

1.2 函数

1.2.1 函数概念

1.2.1.1 函数的定义

大家都知道这样一个事实，就是一批某种商品的总价值 R 是与它

的单价P及数量Q直接相关的。假若单价P是一个确定不变的常量，那么R就会随着Q的改变而变化，Q也会因R的不同而有所不同。

在同一个事件或研究过程中，往往会出现多个变量，这些变量之间会依照一定规律相互制约，相互依赖。变量之间的这种关系抽象为数学概念，就是函数的概念。

定义 设在某个变化过程中有x、y两个变量。如果对于变量x在它的变化范围D内所取的每一个值，依照某种对应法则f，变量y都有唯一确定的值与之对应，则称变量y是x的函数。记做：

$$y = f(x)。$$

此时变量x称为自变量，变量y称为因变量（也称随变量）。自变量x的变化范围D称为函数的定义域，函数的定义域也就是一个数集。

给定自变量一个取值$x = x_0$，则得到一个函数值$y_0 = f(x_0)$。当自变量x在其定义域D内取遍所有的值，则得到函数的全部取值，我们称函数的全部取值为函数的值域，用字母Z表示，Z也是一个数集。

函数的定义域D、值域Z及对应法则f，称为函数的三要素。对于两个函数来说，如果三要素中有一个不相同，则这两个函数就是两个不同的函数。例如

$$y = 2x \text{ 和 } y = \frac{2x^2}{x},$$

因其定义域的不同而不是同一个函数。

如果对于自变量的一个取值$x = x_0$，函数y没有确定的值y_0与之对应，则称函数$y = f(x)$在点x_0处无定义（或没有意义），如上面后一个函数在$x = 0$点处无意义。求函数的定义域，就是求出那些使得函数有意义的自变量x的值，它是一个数集。

例 1.1 求函数$y = \dfrac{2}{3x+1}$的定义域。

解：$\because$ $3x + 1 \neq 0$,

$x \neq -\dfrac{1}{3}$。

$\therefore$ 函数的定义域为$\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$。

例 1.2 求函数 $y=\frac{\lg(2-x)}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域

解：∵ $\begin{cases}2-x>0;\\ x+1>0。\end{cases}$

即 $-1<x<2$。

∴ 函数的定义域为 $(-1,2)$。

对于那些有实际意义的函数来说，其定义域还要根据实际问题来定。譬如前边所提到的商品总价值 R 与商品量 Q 之间的函数关系 $R=PQ$，其定义域应是正数集，即自变量 Q 不能取负数。

1.2.1.2 函数的表示法

常用的函数表示法有三种，即解析法、列表法和图像法。

1) 解析法。用代数式表达一个函数关系的方法称解析法，如：

$$y=2x-1;y=\frac{1}{x}-\sqrt{x^2-2};R=0.6Q。$$

2) 列表法。用一个表格来表达一个函数关系的方法称为列表法，如：

月　　份	1	2	3	4	5	6
销售额 Q(万元)	11	12.5	9.1	8.6	8	8.9
利　润 R(万元)	2.1	2.7	1.6	1.2	1	1.5

表示某商场上半年的销售额与所获得的利润之间的函数关系。

3) 图像法。在坐标平面上用一条曲线来表示函数关系的方法称为图像法，如图 1.7 所表示的是某地区的某一天气温 C 随时间 t 的变化情况。

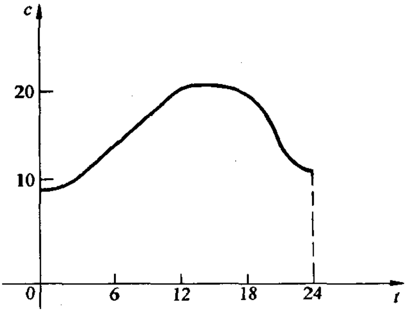


图 1.7

需要说明的是，当在研究某个函数关系时，以上三种方法可能同时都要用到，特别是函数图像与解析式之间的对应关系一定要熟练，一些常用到的函数图像要

记住。

1.2.2 基本初等函数

以下六种函数称为基本初等函数：

1）常量函数：$y=c$（c 为任意实数）；

2）幂函数：$y=x^{\alpha}$（α 为任意实数）；

3）指数函数：$y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq1$）；

4）对数函数：$y=\log_{a}x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）；

特别当 $a=\mathrm{e}$（$\mathrm{e}\approx2.71828\cdots$）时，称为自然对数，记作 $y=\ln x$。

5）三角函数：

  （1）$y=\sin x$；（2）$y=\cos x$；（3）$y=\mathrm{tg}x$；

  （4）$y=\mathrm{ctg}x$；（5）$y=\sec x$；（6）$y=\csc x$。

6）反三角函数：

  （1）$y=\arcsin x$；（2）$y=\arccos x$；（3）$y=\mathrm{arc\,tg}x$；

  （4）$y=\mathrm{arc\,ctg}x$；（5）$y=\mathrm{arc\,sec}x$；（6）$y=\mathrm{arc\,csc}x$。

这些函数在中学数学中都已学过，其性质与图像见附录一。需要说明的是，本教材对三角函数类只介绍正弦、余弦、正切、余切，不介绍正割、余割及反三角函数。

1.2.3 常用的几类函数概念

1.2.3.1 分段函数

有些问题中，两个变量之间的关系无法只用一个数学式子表达，需用两个或两个以上的式子才能表达完整。例如某一吨货物的运输费用，在 300 公里以内按每公里 0.05 元计费，300 公里以上则按每公里 0.035 元计费，则其一吨的运费 y 与路程 x 之间的函数式应是：

$$y=\begin{cases}0.05x, & 0\leqslant x\leqslant300;\\ 15+0.035(x-300), & x>300。\end{cases}$$

像这类在其定义域内，自变量取不同的值，不能用一个统一的数学表达式表示，而需用两个或两个以上的式子表示的函数，称为分段函

数。

例 1.3 作出函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

的图像。

解：见图 1.8。

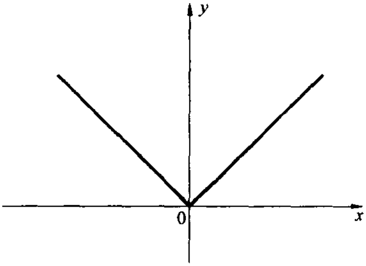


图 1.8

例 1.4 确定函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ 2x, & 1 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

的定义域并作出函数图像。

解：函数的定义域是[-1,3]，其图像如图 1.9 所示：

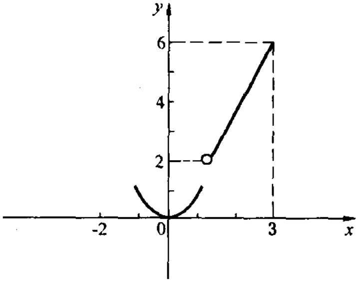


图 1.9

1.2.3.2 反函数

对于某种商品，假设其单价为 P，销售量为 Q，则销售收益 $R=PQ$。如果销售量 Q 已知，则可通过对应关系 $R=PQ$ 得到唯一的销售收益 R 值；反之，如果销售收益 R 已知，按照对应关系 $R=PQ$ 又可以得到唯一的销售量 $Q=\frac{R}{P}$。在这里，对于前一个函数关系 $R=PQ$ 中，Q 是自变量，R 是因变量（R 是 Q 的函数）；后者 $Q=\frac{R}{P}$ 中，R 是自变量，Q 是因变量（Q 是 R 的函数）。后者是由前者得来的，我们称后一个函数 $Q=\frac{R}{P}$ 是前一个函数 $R=PQ$ 的反函数。一般地，我们有：

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z，如果对于 Z 中的每一个 y 值，在 D 中总有唯一确定的 x 值使得 $y=f(x)$，这样由 y 确定 x 的函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$。

我们习惯于用字母 x 表示自变量，用字母 y 表示因变量，因此，在理论反函数式 $x=f^{-1}(y)$ 中，将字母 x、y 互换，得到实际应用的反函数关系式 $y=f^{-1}(x)$。

例 1.5 求函数 $y=3x+1$ 的反函数。

解：先求出理论反函数式

$$x=\frac{y-1}{3}。$$

再将字母 x、y 互换得到函数 $y=3x+1$ 的反函数

$$y=\frac{x-1}{3}。$$

由图 1.10 可以看出，它们的图形关于直线 $y=x$ 为对称。

1.2.3.3 复合函数

有些函数存在着多重变量关系，例如

$$y=\sin a^{x}, \qquad (a>0),$$

可以看作是由 $y=\sin u$、$u=a^{x}$ 这两个基本初等函数所构成，一般地我们有：

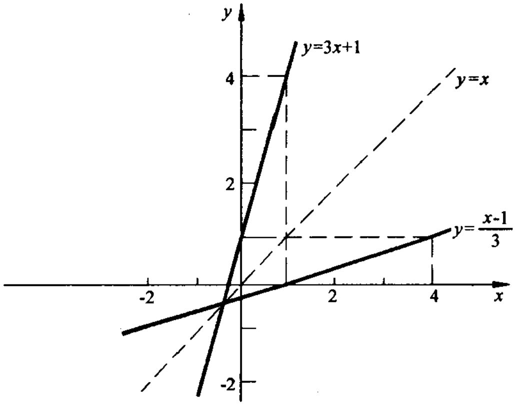


图 1.10

定义　设 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，u 又是 x 的函数：$u=\Phi(x)$，则通过变量 u，y 也是 x 的函数：$y=f[\Phi(x)]$，称这个函数 y 为复合函数，u 称为中间变量。

需要说明的是，复合函数 $y=f[\Phi(x)]$的定义域，应该是使 $u=\Phi(x)$的函数值属于 $y=f(u)$的定义域的那些 x 取值所组成，因此通常只是 $u=\Phi(x)$定义域的一部分。

例 1.6　分析下列函数是由几重基本初等函数所构成，并分别写出其中间变量：

(1) $y=(2x-1)^3$；

(2) $y=\sqrt{\sin(5x)}$；

(3) $y=\ln^2\sqrt{3t+2}$。

解：(1) $y=u^3, u=2x-1$；

(2) $y=\sqrt{u}, u=\sin v, v=5x$；

(3) $y=u^2, u=\ln v, v=\sqrt{x}, x=3t+2$。

分析一个复合函数的复合重次是一项很重要的工作，必须熟练掌握。

1.2.3.4 隐函数

前面所遇到的函数，其因变量 y 都可以用自变量 x 的一个表达式表示出来，这样一类函数可统称为显函数。另有一类函数，其因变量 y 对于自变量 x 的函数关系是由一个方程 $F(x,y)=0$ 来表示的，如：$x^2+y^2=1$，$xy-\sin y+1=0$ 等。这样一类函数称为隐函数。

1.2.3.5 幂指函数

有一类既不能称为幂函数也不能称为指数函数的函数，如 $y=x^x$，$y=(2x+1)^{\sin x}$等，其底数部分和指数部分都是自变量 x 的表达式，像 $y=[f(x)]^{g(x)}$形式的函数称为幂指函数。

1.2.3.6 初等函数

由基本初等函数通过有限次的四则运算或复合得到的可用一个式子表示的函数，统称为初等函数。如以上所谈到的都属于初等函数，分段函数的整体属超越函数，但其每一段都属于初等函数，以后我们所要研究的都是初等函数。

1.3 函数的几种简单性态

1.3.1 函数的奇偶性

定义 1 对于给定的函数 $y=f(x)$，定义域是对称区间。如果对其定义域内的任意 x，总有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数；如果对其定义域内的任意 x，总有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为偶函数。

例 1.7 判断下列所给函数的奇偶性：

$$(1)\ y=\frac{1}{x}-x^3;\quad (2)\ f(x)=3x^2+1。$$

解：(1) 设 $y=f(x)=\dfrac{1}{x}-x^3$，

$$\because\ f(-x)=\frac{1}{-x}-(-x)^3=-\frac{1}{x}+x^3=-\left(\frac{1}{x}-x^3\right)$$
$$=-f(x),$$

$\therefore\ y=\frac{1}{x}-x^3$ 是奇函数。

(2) $\because\ f(-x)=3(-x)^2+1=3x^2+1=f(x)$,

$\therefore\ f(x)=3x^2+1$ 是偶函数。

由定义可知,奇函数的图像关于原点对称;偶函数的图像关于 y 轴对称。既不是奇函数又不是偶函数的函数,则称为非奇非偶函数。如,$y=\sin x+\cos x$,$y=3x-1$ 等都是非奇非偶函数。

另外,我们应该知道:奇函数加(或减)奇函数仍为奇函数,偶函数加(或减)偶函数仍为偶函数,奇函数加(或减)偶函数为非奇非偶函数;奇函数乘(或除)奇函数为偶函数,偶函数乘(或除)偶函数为偶函数,奇函数乘(或除)偶函数为奇函数。

1.3.2 函数的单调性

定义 2 对于给定的函数 $y=f(x)$,在区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2,如果 $x_1<x_2$,就有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称此函数在区间 (a,b) 内是单调增加的;如果总有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称此函数在区间 (a,b) 内是单调减少的。

单调增加函数的图像沿 x 轴正方向逐渐上升,简称增函数;单调减少函数的图像沿 x 轴正方向逐渐下降,简称减函数。见图 1.11 和图 1.12

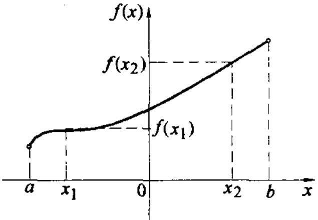


图 1.11

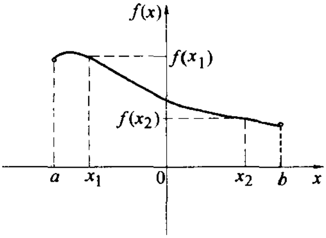


图 1.12