国家级示范高中

启东中学内部讲义

高考数学冲刺教程

最后四十讲

江苏省启东中学是国家级示范高中，近年来，全校高考成绩始终在全省乃至全国处于领先地位。在2001年高考中，全校理科生平均分为597.12，文科生平均分为593.40，分列江苏省第三和第一位；全校本科上线率达99.6%，重点大学的上线率达96.9%，列江苏省第一位；学校的一个班中，有12名同学考取清华大学，3名同学考取北京大学，该班高考平均分高达646分，列全国第一；全校有39人列入教育部公布的2001年保送生名单，遥遥领先于全国所有重点中学。

丛书主编／启东中学校长　王生

中国大百科全书出版社

启东中学内部讲义

高考数学冲刺教程

（最后四十讲）

Gao Kao Shu Xue Chong Ci Jiao Cheng

《启东中学内部讲义》编委会

丛 书 主 编：王 生 （江苏省启东中学校长兼党总支书记、特级教师、教育管理博士生）

丛书副主编：王安平 （江苏省启东中学党总支副书记）

黄炳勋 （江苏省启东中学副校长）

钱宏达 （江苏省启东中学副校长）

徐慕家 （江苏省启东中学党总支副书记）

丛书执行主编：张国声 （江苏省启东中学教育科学研究室副主任）

丛 书 编 委：王 生 王安平 黄炳勋 钱宏达 徐慕家 杨正杰 陈 杰 陈仲刘

黄 菊 卢卫忠 黄 祥 范小辉 沈 平 陆 斌 汤宏锌 张国声

顾云松 邢正贤 邢 标 吴伟丰 陈允飞 谢光明 邱志明 曹瑞彬

本 册 主 编：曹瑞彬 陆 斌

本 册 编 委：曹瑞彬 陆 斌 范 晖 陈海东 李 俊 邱志明

沈 利 徐晏儒 黄鹤平 陈建斌 张 杰 杨红生

（以上作者分别为江苏省启东中学各学科特高级教师及奥赛金牌教练）

* * * * *

丛 书 总 编：毛文凤 （华东师范大学哲学博士）

中国大百科全书出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学冲刺教程/王生主编. -北京:中国大百科
全书出版社,2002.4
(启东中学内部讲义)

ISBN 7-5000-6561-2

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课-高中-升学参考
资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 013940 号

责任编辑:王玉玲
封面设计:可 一

启东中学内部讲义
高考数学冲刺教程·最后四十讲

*

中国大百科全书出版社出版发行
http://www.ecph.com.cn
(北京阜成门北大街 17 号 邮编:100037)
安徽芜湖金桥印刷有限责任公司印刷

*

开本 787×1092 毫米 1/16 印张 11.25 字数 238 千字
2002 年 4 月第 1 版 2002 年 4 月第 1 次印刷
ISBN 7-5000-6561-2/G·434
定 价:13.00 元

序

王生

“3+X”是我国高校招生考试制度改革的重大举措，这一举措在考试内容上突出了对学生能力和综合素质的考查。这一改革的根本目的是为了全面推进以德育为核心，以创新精神和实践能力培养为重点的素质教育，从而减轻学生过重负担，提高教学质量和效果。

教学质量是怎么来的?教学质量是在教学过程中产生的，备课、上课、作业、辅导、复习、考查等若干教学环节，环环相扣组成教学单元；若干教学单元首尾相接组成一定的教学周期；若干教学周期循环往复，螺旋上升，构成完整的教学过程。我们这套高考复习资料就是从如何进一步地提高教学质量入手，配以我校广大教师对新高考模式的深入研究编写的，因而具有极强的针对性、指导性、实战性。

近几年来，江苏省启东中学全面贯彻党的教育方针，把“坚持全面发展，培养特色人才，为学生的终身发展奠基”作为自己的办学理念，积极实施素质教育，教育教学工作一年一个新台阶，创造出一个又一个让世人瞩目、使国人鼓舞的辉煌业绩。学校连续多年在全国数、理、化、生等学科竞赛中独占鳌头，高考本科上线率接近 100%，其中重点大学上线率超过 95%。继去年我校创造了一个班有 10 名同学考取清华大学的奇迹后，2001 届高三取得的成绩更是令人惊叹不已：一个班有 12 名同学考取清华大学，3 名同学考取北京大学，班高考平均分达 646 分；在教育部公布的今年符合保送条件的学生名单中，我校以 39 人遥遥领先于全国所有重点中学；2001 届全校理科均分 597.12，文科均分 593.40，比省平均线高出 97.12 分和 113.4 分，分别列全省第三、第一，本科上线率达 99.6%，其中重点大学上线率达 96.9%。

2001 年 7 月上旬，从土耳其安塔利亚市和美国华盛顿分别传来喜讯，在刚刚结束的第 32 届国际中学生物理奥林匹克竞赛和第 42 届国际中学生数学奥林匹克竞赛中，我校高三学生施陈博和陈建鑫双双夺得金牌，这是我校继毛蔚、陈宇翱、蔡凯华、周璐同学在国际中学生学科竞赛中夺得两金两银之后，在素质教育中取得的又一丰硕成果，三年取得“四金二银”的优秀成绩，为我校教育创下新的辉煌。

在实行高校招生制度改革的过程中，更新教学资料、改革教学方法、探索教学模式、提高教学质量是摆在广大教育工作者面前的一项重要而紧迫的工作。为此，我们组织学校一线教师系统整理编写了这套高考一、二、三轮复习资料，该套资料全面总结了我校近几年来高三一线教师教学方而的智力成果，较好地应答了在新的高考形势下，如何提高学生的知识水平、能力水平和素质水平。总结这些经验，将会使名校的教育资源在更大范围内得以推广和利用，同时也方便了很多一直向我校索要试卷及资料的其他兄弟学校。因此，这套丛书的编写工作，我觉得很有意义。

全套资料按高三的教学和复习进度，分成一、二、三轮，其中每轮又分语文、数学、英语、政治、历史、地理、物理、生物、化学、文科综合、理科综合和文理大综合等分册。各册编写教师经过不断推敲，反复斟酌，认真梳理，努力使各分册从形式到内容都适应高考的要求。全套资料从培养学生创新能力和实践能力出发，精编、精选、精析了大量试题，其中包括了我们学校这么多年来之所以取得骄人战绩的"内部原创题"，现在我们把这些经验和"秘笈"毫无保留地奉献出来，希望它们能成为广大考生叩开大学之门的成功法宝。

最后，我们由衷地企盼这套由我们学校第一次正式出面组织编写的高考复习资料能对广大备考师生有所裨益，同时也希望广大师生多提宝贵意见和建议，我们将及时修订改正，推陈出新，奉献社会。

（作者系江苏省启东中学校长兼党总支书记、特级教师、教育管理博士生）

编 写 说 明

《启东中学内部讲义·高考冲刺教程》丛书，共分语文、数学、英语、物理、化学、生物、政治、历史、地理九个分册。丛书在充分研究了**最新的各科《考试说明》**的基础上，整合了各方面的最新信息，又结合我校多年指导高考三轮复习方略，博采众家之长，充分体现了高考三轮复习的时效性、整体性及命中性。

丛书各分册系统介绍了本科目的考点知识及能力要求，通过**高考热点**、例题分析、**猜题报告**、热身冲刺、时政专题等栏目，巩固和加强了应考学生对本科目知识的认识和理解，以及解决实际问题的能力，并提出了临考复习建议和应试技巧，为广大高考师生提供了一套完整而有效的备考冲刺教程。

另一方面，丛书还着力分析了各科高考命题中的热点，总结了常考内容，真正做到**搜索命题奥秘，探求命题规律，预测命题趋向**。在更广阔的视野里，培养学生的创新思维能力，激活学生分析、解决各种题型的实战能力。

由于时间的限制，及作者本身认识和实践水平所限，本丛书中定有许多不足和疏漏之处，恳请广大读者提出批评和修政意见。

编 者

目录

第一讲　配方法

【高考热点】

配方法是指将一代数式变形成一个(或几个)代数式平方的形式。其基本形式是：$ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}(a\neq0)$。

高考中常见的基本配方形式有：

(1)$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

(2)$a^2+ab+b^2=(a+\frac{1}{2}b)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}b)^2$

(3)$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2ab-2bc-2ac$

(4)$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

(5)$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$

(6)$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

配方法主要适用于与二次项有关的函数、方程、等式、不等式的讨论，求解与证明及二次曲线的讨论。

【猜题报告】

【例1】 (1)已知 $f(\frac{x+1}{x})=\frac{x^2+x+1}{x^2}$，则 $f(x)$ 的表达是　(　　)

A. $f(x)=x^2+x+1$　　B. $f(x)=x^2-x+1$

C. $f(x)=x^2-x-1$　　D. $f(x)=x^2+x-1$

(2)设函数 $f(x)=x^2+x+\frac{1}{2}$ 的定义域是 $[n,n+1](n\in N)$，则 $f(x)$ 的值域中整数的个数是 (　　)

A. $2n$　　B. $2n+2$　　C. $3n$　　D. $3n+3$

(3)已知长方体的全面积为 S，各棱的长度之和为 Q，则其对角线长是　(　　)

A. $\frac{S}{Q}$　　B. $\frac{1}{4}\sqrt{Q^2-16S}$

C. $\frac{1}{4}\sqrt{Q^2-4S}$　　D. $\frac{1}{2}\sqrt{Q^2-4S}$

【分析】 (1)利用配方法将右边配成含 $\frac{x+1}{x}$ 的代数式。(2)利用配方法求二次函数的值域。(3)利用配方法建立全面积、棱长与对角线的关系。

【解】 (1)$\because f(\frac{x+1}{x})=\frac{x^2+x+1}{x^2}$

$=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1=(\frac{1}{x}+1)^2-(\frac{1}{x}+1)+1$

$\therefore f(x)=x^2-x+1$

故答案选 B。

(2)$f(x)=x^2+x+\frac{1}{2}=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$

故 $f(x)$ 的对称轴为 $x=-\frac{1}{2}$，$\therefore f(x)$ 在 $[n,n+1]$ 上是递增函数。$\therefore f(x)$ 的值域是 $[n^2+n+\frac{1}{2},n^2+3n+\frac{5}{2}]$，其中整数的个数是 $2n+2$ 个。故答案选 B。

(3)设长方体的三条棱长分别为 x,y,z，则依条件得：

$$\begin{cases}2(xy+yz+zx)=S\\4(x+y+z)=Q\end{cases}$$

$\because (x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$\therefore x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=\frac{Q^2}{16}-S$

$\therefore \sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{4}\sqrt{Q^2-16S}$

故答案选 B。

【评注】 求函数的解析式，二次函数在区间上的值域等问题常用配方法。

【例2】 (1)已知函数 $f(x)=\log_a(x^2-2mx+2m^2-3)$ 的定义域是一切实数，则 m 的取值范围是______。

(2)函数 $y=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$，$x\in(-\infty,1)$ 的最大值是______。

【分析】 (1)要使定义域是一切实数，需真数对一切 $x\in R$ 恒大于零，用配方法可得。(2)配成一个平方加上一个常数，或配成使用基本不等式。

【解】 (1)$\because x^2-2mx+2m^2-3=(x-m)^2+m^2-3$，$\therefore$要使定义域为一切实数，只要 $m^2-3>0$，所

以 $m\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$。

$$(2)y=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}=\frac{x(x-1)-(x-1)+1}{2(x-1)}$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(x-1)}$$

$$=\frac{1}{2}[(x-1)+\frac{1}{x-1}]$$

$$=-\frac{1}{2}[(1-x)+\frac{1}{1-x}]$$

$$=-\frac{1}{2}[(\sqrt{1-x}-\frac{1}{\sqrt{1-x}})^2+2]$$

$\leqslant-1$,($\because x\in(-\infty,1)$ $\therefore 1-x>0$)也可以这样解:$\because 1-x,\frac{1}{1-x}>0$

$\therefore(1-x)+\frac{1}{1-x}\geqslant2,\therefore y\leqslant-1$。

所以函数 $y=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}x\in(-\infty,1)$ 的最大值是 -1。

【评注】 利用配方法求函数的极值是常用方法之一,利用不等式求极值常常需要配定值。其实这也是一种“配方”技巧。

【例 3】 已知当 $x\in[0,1]$时,不等式

$$x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$$

恒成立。试求 θ 的取值范围。

【分析】 将不等式的左边配方,变形为:

$[x\sqrt{\cos\theta}-\sqrt{\sin\theta}\cdot(1-x)]^2+2(-\frac{1}{2}+\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta})x\cdot(1-x)$,上式平方项大于 0,故只要 $-\frac{1}{2}+\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta}>0$ 即可。

【解】 $\because$ 对一切 $x\in[0,1]$恒有 $f(x)=x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$,

$\therefore f(1)=\cos\theta>0,f(0)=\sin\theta>0$

$\therefore f(x)=x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta$

$=[x\sqrt{\cos\theta}-\sqrt{\sin\theta}\cdot(1-x)]^2+2(-\frac{1}{2}+\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta})\cdot x(1-x)$

当 $x_0=\frac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta}}\in(0,1)$,则

$\sqrt{\cos\theta}x_0-\sqrt{\sin\theta}(1-x_0)=0$

$\therefore[x\sqrt{\cos\theta}-\sqrt{\sin\theta}\cdot(1-x)]^2\geqslant0$

$\therefore f(x_0)=2(-\frac{1}{2}+\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta})x_0\cdot(1-x_0)>0$

$\therefore-\frac{1}{2}+\sqrt{\cos\theta\cdot\sin\theta}>0$。 (*)

反之(*)成立,则 $2(-\frac{1}{2}+\sqrt{\cos\theta\cdot\sin\theta})\cdot x\cdot(1-x)>0,x\in(0,1)$成立。

$f(x)\geqslant2(-\frac{1}{2}+\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta})x(1-x)>0$。

$$由此可得:\begin{cases}\sin\theta>0 & ①\\ \cos\theta>0 & ②\\ -\frac{1}{2}+\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta}>0 & ③\end{cases}$$

先在$[0,2\pi]$中解①与②得: $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

又 $-\frac{1}{2}+\sqrt{\cos\theta\sin\theta}>0$,

$\sqrt{\cos\theta\cdot\sin\theta}>\frac{1}{2}$, $\sin2\theta>\frac{1}{2}$

$\because 0<2\theta<\pi$,故 $\frac{\pi}{6}<2\theta<\frac{5\pi}{6}$

所以 $\frac{\pi}{12}<\theta<\frac{5\pi}{12}$。

因此,原题中的 θ 取值范围是:

$2k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in Z$。

【评注】 在综合题中,对哪两项施行配方法是解题的关键所在。本题中因为 $x\cdot(1-x)\geqslant0$,故对 $x^2\cos\theta,(1-x)^2\sin\theta$ 配方是解本题的关键也是难点。

【例 4】 给定正整数 n 和正数 M。对于满足条件 $a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$ 的所有等差数列 $a_1、a_2,\cdots$。试求:$S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$的最大值。

【分析】 $S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$ 的最大值与首项及公差有关,或公差与 a_{n+1} 的关系,然后求其最值。

【解】 设公差为 $d,a_{n+1}=a$,则

$S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}=(n+1)a+\frac{n(n+1)}{2}d$

$\therefore a+\frac{nd}{2}=\frac{S}{n+1}$

由 $M\geqslant a_1^2+a_{n+1}^2=(a-nd)^2+a^2$

$=\frac{4}{10}(a+\frac{nd}{2})^2+\frac{1}{10}(4a-3nd)^2\geqslant\frac{4}{10}(\frac{S}{n+1})^2$

因此$|S|\leqslant\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}$

且当 $a=\frac{3}{\sqrt{10}}\sqrt{M},d=\frac{4}{\sqrt{10}}\times\frac{1}{n}\times\sqrt{M}$时,

$S=(n+1)[\frac{3}{\sqrt{10}}\sqrt{M}+\frac{n}{2}\times\frac{n}{\sqrt{10}}\times\frac{1}{n}\sqrt{M}]$

$=(n+1)\times\frac{5}{\sqrt{10}}\sqrt{M}$

$=\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}$

由于此时 $4a=3nd$

故 $a_1^2+a_{n+1}^2=\frac{4}{10}(\frac{S}{n+1})^2=\frac{4}{10}\cdot\frac{10}{4}M=M$。

所以，S 的最大值为 $\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}$。

【评注】 本题的配方技巧要求比较高，这种配方技巧在证明一些不等式中也常用到。

【例5】 设圆满足：①截 y 轴所得弦长为2；②被 x 轴分成两段圆弧，其弧长的比为3:1。在满足条件①、②所有圆中，求圆心到直线 $l:x-2y=0$ 的距离最小的圆方程。

【分析】 由条件①、②可以求出动圆圆心的轨迹方程。再由第三条件"距离最小"显然同函数的最值有关。即求出最小值并且找出"达到最小值时应满足的条件"。

【解】 设圆心的坐标为 $P(a,b)$，半径为 r，则点 P 到 x 轴，y 轴的距离分别为 $|b|$，$|a|$。

由题设知，圆 P 截 x 轴所得的劣弧所对的圆心角为 $90°$，所以圆 P 截 x 轴所得的弦长为 $\sqrt{2}r$。故 $r^2=2b^2$。

又圆 P 截 y 轴所得弦长为2，所以有 $r^2=a^2+1$，于是，$2b^2-a^2=1$。

由点 $P(a,b)$ 到直线 $x-2y=0$ 的距离为 $d=\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$，所以

$5d^2=|a-2b|^2=a^2+4b^2-4ab=2b^2-a^2+2(a-b)^2$

$\geqslant 2b^2-a^2=1$。

当且仅当 $a=b$ 时，上式等号成立，此刻 $5d^2=1$，d 的最小值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$。

由此有 $\begin{cases}a=b\\2b^2-a^2=1\end{cases}$ 解此方程组得：$\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$ 由于 $r^2=2b^2$，所以 $r=\sqrt{2}$。

所求圆的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 或 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$。

【评注】 距离 d 是关于 a、b 的二元函数，直接求最值是十分困难的，变形为 $5d^2=a^2+4b^2-4ab$ 后，利用条件 $2b^2-a^2=1$ 和配方就可以求出 $5d^2$ 的最小值为1。这是关键一步。如何正确配方是解本题的关键，除了用上述方法，还可以用三角代换。

设 $b=\frac{\sqrt{2}}{2}\sec\theta$，$a=\tan\theta$，$d=\frac{|\sin\theta-\sqrt{2}|}{\sqrt{5}\cos\theta}$，设 $u=\frac{\sin\theta-\sqrt{2}}{\sqrt{5}\cos\theta}$，有 $\sin\theta-\sqrt{5}u\cos\theta=\sqrt{2}$，于是有 $\sqrt{1+5u^2}\times\sin(\theta+\alpha)=\sqrt{2}$，$\because|\sin(\theta+\alpha)|\leqslant 1$，所以 $1+5u^2\geqslant 2$，即 $5d^2\geqslant 1$。

【热身冲刺】

1.抛物线 $y^2-mx-2y+4m+1=0$ 的准线与双曲线 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$ 的右准线重合，则 m 的值等于（　　）

A. -12　　B. 2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 4

2.若函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 是区间 $(-\infty,-4)$ 上的减函数，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $a\geqslant 5$　　B. $a\leqslant -5$　　C. $a\geqslant -3$　　D. $a\leqslant 3$

3.若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}+5$，则 $f(x)$ 的定义域是（　　）

A. $(-\infty,+\infty)$

B. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

C. $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

D. $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$

4.已知函数 $y=4^x-3\times 2^x+3$，当其值域为 $[1,7]$ 时，自变量 x 的取值范围是（　　）

A. $[2,4]$　　B. $(-\infty,0]$

C. $(0,1)\cup[2,4]$　　D. $(-\infty,0)\cup[1,2]$

5.已知 $3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=2\sin\alpha$，则 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta$ 的取值范围是（　　）

A. $[0,\frac{2}{9}]$　　B. $[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}]$

C. $[0,\frac{1}{2}]$　　D. $[\frac{2}{9},\frac{1}{2}]$

6.抛物线 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的焦点坐标是（　　）

A. $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$

B. $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2-c}{4a})$

C. $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2-1}{4a})$

D. $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2+1}{4a})$

7.关于 x 的方程 $x^2+x+p=0$ 的两个复根 α,β，且 $|\alpha-\beta|=3$，则实数 p 的值是________。

8.若 α,β 是方程 $x^2-2ax+a+6=0$ 的两个实根,则 $(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 的最小值是_____。

9.已知 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$,且满足 $4\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1=0$,则 $\alpha=$_____,$\beta=$_____。

10.若函数 $y=\cos^2x+2p\sin x+q$ 有最大值 q 和最小值 p,求 p、q 的值。

11.已知 $x+y+z=1$,求证:$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}$。

12.设方程 $x^2+2kx+4=0$ 的两实根为 x_1,x_2,若 $(\frac{x_1}{x_2})^2+(\frac{x_2}{x_1})^2\geqslant3$,求 k 的取值范围。

第二讲　待定系数法

【高考热点】

待定系数法是把具有某种确定形式的数学问题，通过引入一些待定的系数，转化为方程组来解决。

待定系数法的主要理论依据是：

(1)多项式 $f(x)\equiv g(x)$ 的充要条件是：对于任意一个值 a，都有 $f(a)=g(a)$；

(2)多项式 $f(x)\equiv g(x)$ 的充要条件是两个多项式各同类项的系数对应相等。

运用待定系数法的步骤是：

(1)确定所求问题含待定系数的解析式(或曲线方程等)；

(2)根据恒等条件，列出一组含待定系数的方程；

(3)解方程或消去待定系数，从而使问题得到解决。

待定系数法主要适用于：求函数的解析式，求曲线的方程，因式分解等。

【猜题报告】

【例 1】 (1)已知函数 $f(x)=a^x+k$ 的图像过点 $(1,7)$，它的反函数 $f^{-1}(x)$ 的图像过点 $(4,0)$，则 $f(x)$ 的表达式是　(　　)

A. $f(x)=4^x+3$　　B. $f(x)=2^x+5$

C. $f(x)=5^x+2$　　D. $f(x)=3^x+4$

(2)以 $y=\pm\frac{x}{2}$ 为渐近线，且过点 $(2,2)$ 的双曲线方程是　(　　)

A. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$　　B. $\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{12}=1$

C. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{12}=1$　　D. $\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{3}=1$

(3)若方程 $2x^2+mxy+3y^2-5y-2=0$ 的图像是两条直线，则 m 的值为　(　　)

A. ± 24　　B. 24　　C. -7　　D. ± 7

【分析】 (1)已知函数方程，将点代入求出参数。(2)以 $y=\pm\frac{x}{2}$ 为渐近线的双曲线可设为 $x^2-4y^2=\lambda$（或 $\frac{x^2}{4}-y^2=\lambda$）。(3)用待定系数法将 $2x^2+mxy+3y^2-5y-2=0$ 分解成两个一次形式的乘积。

【解】 (1)由点 $(1,7)$ 在函数 $f(x)=a^x+k$ 的图像上得：$7=a+k$　　①

由点 $(4,0)$ 在 $f^{-1}(x)$ 的图像上得：

$4=1+k$　　②

故解①②得：$\begin{cases}a=4\\k=3\end{cases}$

所以 $f(x)=4^x+3$，答案选 A。

(2)设所求的双曲线方程是：

$x^2-4y^2=\lambda$

$\because$ 点 $(2,2)$ 在双曲线上，

$\therefore \lambda=2^2-4\times 2^2=-12$。

故所求的双曲线方程：$\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{12}=1$，答案选 B。

(3)设 $2x^2+mxy+3y^2-5y-2=(x+ay+b)(2x+cy+d)=0$

比较两边系数

$$\begin{cases}2a+c=m\\ac=3\\2b+d=0\\ad+bc=-5\\bd=-2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}m=-7\\a=-3\\b=-1\\c=-1\\d=2\end{cases}$$

$\therefore m=-7$。故答案选 C。

【评注】 待定系数法，实质是函数方程思想，设变量列方程。作为选择题第三小题可以将选择支代入原方程后验证是否成立。

【例 2】 (1)已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1$，$f(x+1)-f(x)=2x-3$，则 $f(x)=$________。

(2)已知将直线 l 向下平移 3 单位，再向右平移 2 单位，所得到的直线与原来直线 l 重合，则直线 l 的斜率是________。

【分析】 用待定系数法分别将二次函数与直线方程设出，然后根据条件求出结论。

【解】 (1)设所求的二次函数是：$f(x)=ax^2+bx+c$，

$\because f(0)=1$，$\therefore c=1$

又 $\because f(x+1)-f(x)=a(x+1)^2+b(x+1)+c-ax^2-bx-c=2ax+a+b=2x-3$

比较两边系数得：$a=1$，$b=-4$

故 $f(x)=x^2-4x+1$。

(2)设直线 l 的方程为 $y=kx+b$，将 l 向下平移三个单位得 $l':y=kx+b-3$；将 l' 向右平移 2 个单位得 $l'':y=k(x-2)+b-3$。与直线 l 重合，故

$b=-2k+b-3$

$\therefore k=-\frac{3}{2}$。即直线 l 的斜率是 $-\frac{3}{2}$。

【评注】 利用待定系数法解题，要熟悉基本函数，基本曲线的形式。这样才能正确设参数。例如：对于二次函数，我们常可设为以下三种形式：

(1) $y=ax^2+bx+c$

(2) $y=a(x-x_1)(x-x_2)$

(3) $y=a(x-x_0)^2+m$

【例 3】 已知非零复数 z 满足：$|z-2|=2$，$z+\frac{4}{z}\in R$，求 z。

【分析一】 对于复数常可令 $z=x+yi$，$x,y\in R$，然后根据复数相等的条件，求出 x、y。

【解法一】 令 $z=x+yi$，$x,y\in R$

$\because |z-2|=2$，$\therefore (x-2)^2+y^2=4$ ①

又 $z+\frac{4}{z}=x+yi+\frac{4}{x+yi}$

$=x+yi+\frac{4(x-yi)}{x^2+y^2}$

$=(x+\frac{4x}{x^2+y^2})+(y-\frac{4y}{x^2+y^2})i\in R$

$\therefore y-\frac{4y}{x^2+y^2}=0$ ②

由②得 $y=0$ 或 $x^2+y^2=4$

当 $y=0$ 代入①得，$x=0,4$，$\because z\neq 0\therefore z=4$。

当 $x^2+y^2=4$ 与①联立解之得：

$\begin{cases}x=1\\ y=\pm\sqrt{3}\end{cases}\therefore z=1\pm\sqrt{3}i$

综上所述：$z=4$ 或 $z=1\pm\sqrt{3}i$。

【分析二】 由 $|z-2|=2$，可令 $z=2+2\cos\theta+2i\sin\theta$，然后求出待定的 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$。

【解法二】 $\because |z-2|=2\therefore$ 令 $z-2=2(\cos\theta+i\sin\theta)$

$\therefore z=2(1+\cos\theta+i\sin\theta)$

$=4\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})$

$\therefore z+\frac{4}{z}=4\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2})+\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2})\in R$，

$\therefore 4\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$，$\therefore \sin\frac{\theta}{2}=0$ 或 $4\cos^2\frac{\theta}{2}=1$，

由 $\sin\frac{\theta}{2}=0$ 得：$\sin\theta=0$，$\cos\theta=\pm1$

由 $4\cos^2\frac{\theta}{2}=1$ 得：$\cos\theta=\frac{1}{2}$，$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

而当 $\sin\theta=0$，$\cos\theta=-1$ 时，$z=0$。（舍去）

故得：$z=4$，$z=1\pm\sqrt{3}i$。

【评注】 复数的代数形式与三角形式是两种最常用的待定形式。但注意不要把复数一律用 $z=x+yi$ $(x,y\in R)$ 或 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)(r\geqslant 0)$ 去代入求解。如本题中，令 $z=2(1+\cos\theta+i\sin\theta)$。

【例 4】 已知抛物线 $y^2=2(x+\frac{1}{2})$ 的焦点是 F，准线为 l，是否存在双曲线 C，同时满足以下两个条件：①双曲线 C 的一个焦点为 F，相应准线 l；②双曲线 C 截与直线 $x-y=0$ 垂直的直线所得的线段长为 $2\sqrt{2}$，并且该线段的中点恰好在直线 $x-y=0$ 上。若存在，求出这个双曲线 C 的方程；若不存在，请说明理由。

【分析】 假定存在符合条件的双曲线，写出约束条件，求出待定系数。

【解】 抛物线的焦点为 $(0,0)$，准线方程为 $x=-1$。设满足两个条件的双曲线 C 存在，中心为 $(m,0)$，则方程为

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

其中 $c=-m$，$\frac{a^2}{c}=-1-m$，

$\therefore a^2=m^2+m$，$b^2=-m$

设垂直于直线 $x-y=0$ 的直线与双曲线交于 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则

$$\frac{(x_1-m)^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\ \frac{(x_2-m)^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1。$$

两式相减得：

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{b^2(x_1+x_2-2m)}{a^2(y_1+y_2)}=-1$$

即 $b^2(x_1+x_2-2m)+a^2(y_1+y_2)=0$

$\because PQ$ 的中点在直线 $x-y=0$ 上，

$\therefore x_1+x_2=y_1+y_2$

$\therefore x_1+x_2=\frac{2b^2m}{a^2+b^2}=\frac{2m(-m)}{m^2+m-m}=-2$ ①

$\because |PQ|=2\sqrt{2}$，$\therefore |x_1+x_2|=2$，不妨设 $x_1>x_2$，

$\therefore x_1-x_2=2$　②

由①②得：$x_1=0, x_2=-2$

$\because y_1+y_2=x_1+x_2=-2, y_1-y_2=-(x_1-x_2)=-2$，

$\therefore y_1=-2, y_2=0$，即 $P(0,-2)$，$Q(-2,0)$

由 P 在双曲线 C 上，并 $P(0,-2)$ 代入方程得 $m=-\frac{4}{3}$。

$\therefore$ 存在双曲线 $\frac{9}{4}(x+\frac{4}{3})^2-\frac{3}{4}y^2=1$

即 $3x^2-y^2+8x+4=0$

【评注】 待定系数法是解存在性开放命题的一种基本方法之一。假设存在，如果存在求出假设中的系数，如果不存在或是无解或是得矛盾。

【例5】 已知 a、b、c 是实数，函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=ax+b$，当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$|f(x)|\leqslant 1$

(1)求证：当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$|g(x)|\leqslant 2$

(2)当 $a>0$，且 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$g(x)$ 的最大值是 2，求 $f(x)$。

【分析】 (1)已知条件 $f(x)$ 是二次的，求证式中 $g(x)$ 是一次的，为了沟通两者的联系，我们对二次式作减法，利用待定参数 x_1，x_2 设

$$g(x)=f(x_1)-f(x_2)=(ax_1^2+bx_1+c)-(ax_2^2+bx_2+c)$$

即　$ax+b=(x_1-x_2)[a(x_1+x_2)+b]$

为使两边恒等，只须取

$$\begin{cases}x_1-x_2=1\\x_1+x_2=x\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{x+1}{2}\\x_2=\frac{x-1}{2}\end{cases}$$ 即可得。

(2)关键求 b，可利用二次函数极值的惟一性求出待定系数 a、b、c。

【解】 (1)对 $x\in[-1,1]$　有 $-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant 0\leqslant\frac{x+1}{2}\leqslant 1$

$$\therefore g^2(x)=[f(\frac{x+1}{2})-f(\frac{x-1}{2})]^2$$

$$=[f(\frac{x+1}{2})]^2+[f(\frac{x-1}{2})]^2-2f(\frac{x+1}{2})\cdot f(\frac{x-1}{2})\leqslant[f(\frac{x+1}{2})]^2+[f(\frac{x-1}{2})]^2+2|f(\frac{x+1}{2})|\cdot|f(\frac{x-1}{2})|$$

$$=[|f(\frac{x+1}{2})|+|f(\frac{x-1}{2})|]^2\leqslant(1+1)^2$$

所以有　$|g(x)|\leqslant 2$。

(2)$\because a>0$，$g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，当 $x=1$ 时，取得最大值 2，即

$2=g(1)=f(1)-f(0)$

$\because -1\leqslant f(0)=f(1)-2\leqslant 1-2\leqslant -1$

$\therefore c=f(0)=-1$

但 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)\geqslant -1=f(0)$，这表明二次函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上不单调，则 $-\frac{b}{2a}\in[-1,1]$，且 $f(-\frac{b}{2a})=f(0)$，由极值惟一性，得：

$-\frac{b}{2a}=0$，$\therefore b=0, a=2$

$\therefore f(x)=2x^2-1$

【评注】 利用待定系数法易得到 $g(x)=f(\frac{x+1}{2})-f(\frac{x-1}{2})$ 的关键等式。本题还可以将 a、b、c 用 $f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ 表示出来。

【热身冲刺】

1.设全集 R，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，$M=\{x|f(x)\neq 0\}$，$N=\{x|g(x)\neq 0\}$，则集合 $\{x|f(x)\cdot g(x)=0\}$ 等于　（　）

A.$\overline{M}\cap\overline{N}$　B.$\overline{M}\cup N$　C.$M\cup\overline{N}$　D.$\overline{M}\cup\overline{N}$

2.已知 $y=f(2x)$ 的图像，作 $y=f(1-2x)$ 的图像时，应将 $y=f(2x)$ 的图像　（　）

A.先向右平移一个单位，再作 y 轴的对称图形。

B.先向左平移一个单位，再作 y 轴的对称图形。

C.先向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位，再作 y 轴的对称图形。

D.先向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位，再作 y 轴的对称图形。

3.若函数 $f(x)=x^{m^2+m-2}$ 在第一象限的值随 x 的增大而减小，则　（　）

A.$m<-2$ 或 $m>1$　B.$-2<m<1$

C.m 可取任何实数　D.m 的值不存在

4.函数 $f(x)=3\cos(\frac{kx}{4}+\frac{\pi}{5})+2$ 的最小正周期不小于 $2\pi/3$，则正整数 k 的最大值是　（　）

A.14　B.13　C.12　D.11

5.若圆锥的底面积为 P，轴截面面积为 Q，则此圆锥的体积等于　（　）

A.$\frac{P}{3}\sqrt{\pi Q}$　B.$\frac{P}{2}\sqrt{\pi Q}$

C. $\frac{Q}{3}\sqrt{\pi P}$　　　　D. $\frac{Q}{2}\sqrt{\pi P}$

6. 以双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的右焦点为顶点，左顶点为焦点的抛物线方程是　　(　　)

A. $y^2=18(x-5)$　　B. $y^2=9(x-5)$

C. $y^2=-36(x-5)$　　D. $y^2=-36(x+5)$

7. 若复数 z 满足 $\arg(z+1)=\frac{7\pi}{4}$，且 $|z+i|=3\sqrt{2}$，则 $z=$ ________。

8. 有 k 名棋手参加的单循环制象棋比赛，其中有两名选手各比赛了三场就不参加了，且这两名选手间未进行比赛。这样比赛结束时共赛了 84 场。则 $k=$ ________。

9. 设 a_n 是 $(3-\sqrt{x})^n$ 展开式中的系数，$(n=2,3\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3^2}{a_2}+\frac{3^3}{a_3}+\cdots+\frac{3^n}{a_n})=$ ______。

10. 椭圆以坐标轴为对称轴，左焦点到坐标原点、右焦点、右准线的距离成等差数列，若直线 l 与此椭圆的相交弦中点为 $M(-2,1)$，且相交弦长为 $4\sqrt{3}$，求椭圆方程。

11. 设 $f(x)$ 是一次函数，且在其定义域内是增函数，又 $\underbrace{f^{-1}\{f^{-1}[\cdots f^{-1}}_{n}(x)\cdots]\}=2^n x-2^{n+1}-2$，求 $f(x)$ 的表达式。

第三讲　换元法

【高考热点】

换元法是指引入一个或几个新的变量代替原来的某些变量(或代数式),对新的变量求出结果之后,返回去再求出原变量的结果。换元法通过引入新的元素将分散的条件联系起来,或者把隐含的条件显示出来,或者把条件与结论联系起来,或者变为熟悉的问题。其理论根据是等量代换。

高中数学中主要换元法有下列两类:

(1)整体换元:以"元"换"式"。

(2)三角换元:以"式"换"元"。

此外,还有对称换元,均值换元,万能换元等。

换元法应用比较广泛。如解方程,解不等式,证明不等式,求函数的值域,求数列的通项与和等,另外在解析几何中也有广泛的应用。

运用换元法解题要注意新元的约束条件和整体置换的策略。

【猜题报告】

【例1】 (1)函数 $y=x+\sqrt{2x-1}$ 的值域是　(　　)

A. $[0,+\infty)$　　B. $[\frac{1}{2},+\infty)$

C. $(-\infty,+\infty)$　　D. 以上答案都不对

(2)已知 $x^2+y^2=1$,则 $\frac{y-1}{x-4}$ 的最大值是　(　　)

A. $\frac{8}{15}$　B. $\frac{15}{8}$　C. 0　D. 没有最大值

(3) $\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cdot\cos 50°$ 的值是 (　　)

A. $\frac{3}{4}$　B. $\sqrt{3}$　C. 1　D. 2

【解析】 (1)令 $\sqrt{2x-1}=t$,则 $t\geqslant 0$,且 $x=\frac{t^2+1}{2}$,代入原函数得:

$y=\frac{t^2+1}{2}+t=\frac{1}{2}(t+1)^2$　$\because t\geqslant 0$

$\therefore y\geqslant\frac{1}{2}$　故答案是 B。

(2)令 $\frac{y-1}{x-4}=k$,则 $y=k(x-4)+1$ 代入 $x^2+y^2=1$,整理得:$(1+k^2)x^2-(8k^2-2k)x+16k^2-8k=0$,由 $\Delta\geqslant 0$ 得:$(8k^2-2k)^2-4\cdot(16k^2-8k)\cdot(1+k^2)\geqslant 0$,解之得 $0\leqslant k\leqslant\frac{8}{15}$。故答案选 A。

另解:仍然令 $\frac{y-1}{x-4}=k$,得:

$kx-y-4k+1=0$,直线与圆相交,故圆心到直线的距离应小于或等于 1。即有

$\frac{|-4k+1|}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant 1$,解之得:$0\leqslant k\leqslant\frac{8}{15}$。

(3)本题的解法较多,下列给出和差换元解法。

设 $\sin 20°=a+b$,$\cos 50°=a-b$。

则 $\begin{cases}a+b=\sin 20°\\a-b=\cos 50°\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}(\sin 20°+\cos 50°)\\b=\frac{1}{2}(\sin 20°-\cos 50°)\end{cases}$

$$\begin{aligned}\therefore a&=\frac{1}{2}(\sin 20°+\cos 50°)\\&=\frac{1}{2}(\sin 20°+\sin 40°)\\&=\frac{1}{2}\cos 10°\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b&=\frac{1}{2}(\sin 20°-\cos 50°)\\&=\frac{1}{2}(\sin 20°-\sin 40°)\\&=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°\end{aligned}$$

故原式 $=(a+b)^2+(a-b)^2+(a+b)(a-b)=3a^2+b^2=\frac{3}{4}\cos^2 10°+\frac{3}{4}\sin^2 10°=\frac{3}{4}$。故答案选 A。

【评注】 (1)将整个根式用一个变元来替代,将根号转化为二次式或多项式。使问题简单明了,这是我们常采用的换元方法之一。

(2)运用整体换元法,使问题具有几何意义。

(3)把三角问题转化为代数问题,促成问题的简捷解决,此法在解综合题中常用。在含有 $\sin x\cdot\cos x$,与 $\sin x\pm\cos x$ 的式中常令 $\sin x+\cos x=t$,$\sin x\cdot\cos x=\frac{t^2-1}{2}$,代入原式,使之化为代数问题。

【例2】 (1)函数 $y=\frac{x-x^3}{(1+x^2)^2}$ 的值域是______

____。

(2)方程 $\log_2(2^x+1)\cdot\log_2(2^{x+1}+2)=2$ 的解集是__________。

【解析】 (1)令 $x=\tan\theta,\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则

$$y=\frac{\tan\theta\cdot\tan^3\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}=\cos^3\theta\cdot(1-\mathrm{tg}^2\theta)\sin\theta$$

$=\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\cos2\theta$

$=\frac{1}{4}\sin4\theta\quad\therefore y\in[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$

(2)令 $\log_2(2^x+1)=t$，则原方程化为：

$t\cdot(1+t)=2$

解之得：$t=1$ 或 $t=-2$

当 $t=1$ 时，$\log_2(2^x+1)=1\Rightarrow x=0$

当 $t=-2$ 时，$\log_2(2^x+1)=-2$ 解舍去

故原方程的解集是$\{0\}$。

【评注】 三角代换是常用的一种以"式"换"元"的方法，通过换元将一些复杂的问题转化为三角问题来解决。形如 $1+x^2$ 常令 $x=\tan\theta$ 或 $\cot\theta$，形如 $1-x^2$ 的常令 $x=\cos\theta,x=\sin\theta$。

【例 3】 已知 $x、y、z$ 都是非负实数，且 $x+y+z=1$，求证：

$$0\leqslant xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$$

【分析】 由 $x、y、z$ 的对称性可设$x\geqslant y\geqslant z$，则 $x+y\geqslant\frac{2}{3},z\leqslant\frac{1}{3}$。故令 $x+y=\frac{2}{3}+t,z=\frac{1}{3}-t$。

【证明】 不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$，则 $z\leqslant\frac{1}{3},x+y\geqslant\frac{2}{3}$，从而 $2xyz\leqslant\frac{2}{3}xy\leqslant xy$

所以 $xy+yz+zx-2xyz\geqslant0$。

令 $x+y=\frac{2}{3}+t,z=\frac{1}{3}-t$，则 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{3}$

则 $\quad xy+yz+zx-2xyz$

$=z(x+y)+xy\cdot(1-2z)$

$=(\frac{1}{3}-t)\cdot(\frac{2}{3}+t)+xy\cdot(\frac{1}{3}+2t)$

$\leqslant(\frac{1}{3}-t)(\frac{2}{3}+t)+(\frac{1}{3}+\frac{t}{2})^2\cdot(\frac{1}{3}+2t)$

$=\frac{7}{27}-\frac{t^2}{2}\cdot(\frac{1}{2}-t)\leqslant\frac{7}{27}$

当且仅当 $x=y,t=0$ 时，即 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时，取得等号。

【评注】 换元法是证明不等式的常用方法，对于一些结构比较复杂，变元较多而变化关系不太清楚的不等式，可适当引进一些新的变量进行代换。其代换技巧有局部代换，整体代换，三角代换，真分式代换，增量代换等。但要注意换元法证明不等式，虽然方法巧妙，但不容易想，故不宜挖得过深过难。

【例 4】 已知 $x\geqslant1,y\geqslant1$，且 $\log_a^2x+\log_a^2y=\log_a(ax^2)+\log_a(ay^2)(a>1)$，求 $\log_a(xy)$的最大值和最小值。

【分析】 将原式变形为

$\log_a^2x-2\log_ax+\log_a^2y-2\log_ay=2$，

不难发现点$(\log_ax,\log_ay)$ 在圆 $X^2-2X+Y^2-2Y=2$ 上。

【解】 令 $X=\log_ax,Y=\log_ay$，

$\because x\geqslant1,y\geqslant1,a>1\quad\therefore X\geqslant0,Y\geqslant0$，

这时原式可化为：$(X-1)^2+(Y-1)^2=4(X\geqslant0,Y\geqslant0)$，故问题转化为在约束条件下，求 $X+Y$ 的最大值和最小值。

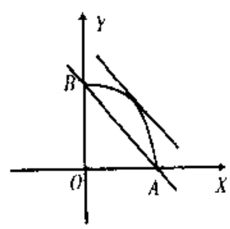
再令 $X=1+2\cos\theta,Y=1+2\sin\theta$。由 $X\geqslant0,Y\geqslant0$，得 $-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}$。

于是 $\log_a(xy)=X+Y=2+2\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$

由$\frac{\pi}{12}\leqslant\theta+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{11}{12}\pi$ 得：

$[\log_a(xy)]_{\max}=2+2\sqrt{2}$；

$[\log_a(xy)]_{\min}=1+\sqrt{3}$。



【评注】 本题由于条件较为复杂，解题方向不明显，通过换元，揭示了问题明显的几何意义。因此本题还可以用数形结合的方法求出 $X+Y$ 的最值。令 $X+Y=t$，则当平行直线系 $Y=-X+t$ 与圆$(X-1)^2+(Y-1)^2=4(X\geqslant0,Y\geqslant0)$相切时，$t_{\max}=2+2\sqrt{2}$，再由对称性知 $A、B$ 的坐标分别为$(1+\sqrt{3},0)$和$(0,1+\sqrt{3})$，$\therefore t_{\min}=1+\sqrt{3}$。

【例 5】 设椭圆的中心是坐标原点，长轴在 x 轴上，离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，已知点 $P(0,\frac{3}{2})$到这个椭圆上的点的最远距离是$\sqrt{7}$，求这个椭圆方程，并求椭圆上到点 P 的距离等于$\sqrt{7}$的点的坐标。