天骄之路中学系列

高中课程同步

读想练

Du xiang lian

陈俊民　孙大为／主编

中学新教材试验改革研究组　审定

高二数学

配套试验修订版教材

机械工业出版社
China Machine Press

天骄之路中学系列

高中课程同步读想练

高二数学

[配套试验修订版教材]

陈俊民　孙大为　主编
中学新教材试验改革研究组　审定

机械工业出版社

《高中课程同步读想练》丛书
编委会名单

图书在版编目(CIP)数据

高中课程同步读想练．高二数学/陈俊民，孙大为主编．—北京：机械工业出版社，2001.7

(天骄之路中学系列)

ISBN 7-111-09137-X

Ⅰ．高…　Ⅱ．①陈…②孙…　Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 047092 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)

责任编辑：于　宁　版式设计：刘　津

封面设计：蒲菊祥　责任印制：何全君

北京后沙峪印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2001 年 7 月第 1 版·第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16·10.75 印张·191 千字

00001—13000 册

定价：12.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话　(010)68993821、68326677-2527

编 写 说 明

古人云:授人以鱼,只供一饭之需;授人以渔,则一生受用无穷。追求知识和能力的同步发展,追求应试教育和素质教育的完美结合是全国各地师生们的共同目标。为此,我们组织了全国知名的教研员及重点中学的一线特、高级教师,依据人教社 2001 年的最新试验修订版教材,编写了该配套丛书。该丛书一改传统同步教辅读物的陈旧面孔,既立足同步教学又针对最新高考要求,在同步学习基础知识的同时,注重思维方法指导,更注重培养学生分析问题和解决问题的能力。"读"即让学生变苦读为巧读,融会贯通课本知识;"想"即让学生对所学知识进行规律性的把握和思维能力的培养;"练"即让学生在现行考试模式与制度下具备练的本领,高质量的练习应该是检测学习成果的一个最重要的环节。

本丛书在栏目设置上,以练习为主,讲解为辅。练习以课节为重点,讲解以单元为重点,主要体现循序渐进的特点。各分册除〔**单元分课练习**〕这一主流板块外,均有选择性地设计了以下几个板块:

①〔**单元知识总结**〕:对本单元应掌握的基础知识点、考试要求与学习目的进行提炼和延展,并可通过图表、网络的形式进行系统整理。

②〔**重点难点点拨**〕:将该单元部分的重点难点突出出来,并进行精辟的分析、引导,同时提供合理的学习方法或建议。

③〔**典型例题精讲**〕:通过对典型例题的精讲,将该题所涉及的知识体系和能力体系加以言简意赅的点明,主要侧重于方法、规律、技巧的把握。

④〔**相关资料检索**〕:通过对某些重要知识点的背景、内涵、外延进行检索,使读者对所学的知识点进行融会贯通并有所巩固和提高。

⑤〔**综合科目导航**〕:为配合"3+X"高考,每章均设计一些综合科目试题,进行透彻的分析和点评,使学生在高一高二年级时就对综合题有所掌握。

⑥〔**高考真题概览**〕:将涉及本章知识点的历年高考题进行总结、例析,使读者在同步学习时便能掌握高考命题的方式、技巧及热点。

⑦〔**理论联系实际**〕:近年来,高考数学、物理、化学、政治等科目中的实际应用题不断增多,本栏目将理论贴近生活,应用生活,时代气息较浓。

⑧〔**误点名师门诊**〕:将读者在本章学习、应试中容易犯错的题型进行归纳、总结,由名师予以批注,使读者能融会贯通,错误不再重演。

⑨〔**单元发散训练**〕:增添一些锻炼读者发散思维能力的题型,使读者在巩固所学知识点的同时,拓展思维,增强应试能力。

⑩〔**创新能力培养**〕:力图跳出旧圃,从一个全新的层面,帮助广大读者梳理知识,探索规律,总结方法,最终使其学会应用、学会创新。

⑪〔**参考答案提示**〕:对所有训练题给出详细答案,对部分易错、难度大、较新颖的试题均附有解题提示或分析。

另外,语文科目还设有〔**课外拓展阅读**〕、〔**作文名篇赏析**〕,数学、物理、化学科目还设有〔**竞赛奥赛练兵**〕等栏目。

本书的另一特点是充分体现中央关于"减负"的精神。"减负"的根本目的在于培养新一代有知识又有能力的复合型人才,它是实施素质教育的重要环节。就各科教学而言,只有提高教学质量,提高效率,才能真正达到减轻学生负担的目的。而本套书中每本书重点突出,练习到位,对于教师

教学及学生学习均大有裨益。

需要说明的是，出版社为照顾到广大学生的实际购买能力，使他们能在相同价位、相同篇幅内汲取到比其它书籍更多的营养，本书采用了小五号字和分栏式排版，如有阅读上的不便，请谅解。

虽然我们在成书过程中，本着近乎苛刻的态度，题题推敲，层层把关，力求能够帮助读者更好地把握本书的脉络和精华，但书中也难免有疏忽和纰漏之处。检验本丛书质量的唯一标准是广大师生使用本书的实践，作为教研领域的最新成果，我们期盼它的社会效益，也诚挚地希望广大师生的批评指正。读者对本书如有意见、建议，请来信寄至：(100080)北京大学燕园教育培训中心大厦1408室　天骄之路丛书编委会收，或点击“天骄之路教育网”(http://www.tjzl.com)，在留言板上留言也可发电子邮件。以便我们在再版修订时参考。

本丛书在编写过程中，得到了各参编学校及机械工业出版社有关领导的大力支持，丛书的统稿及审校工作得到了北京大学、清华大学有关专家、教授的协助，在此一并谨致谢忱。

编　者

2001年7月于北京大学燕园

“天骄之路”高考信息共享网

TIANJIAOZHILU GAOKAO XINXIGONGXIANGWANG

欢迎加入“天骄之路”高考信息共享网！据许多考生反映，他们的聪明和勤奋绝不比别人差，但环境的闭塞和信息的极度不灵通使其丧失了升入大学的机会。“天骄之路”高考信息共享网旨在推动命题者与考生的沟通，使全国考生都能及时了解高考重大信息。

凡在全国各地购买或邮购正版(附有激光防伪标志)“天骄之路”中学系列丛书满5本以上者，详细填妥本页所附回执，沿标线剪下，收齐全部回执，连同1.6元邮资挂号寄至(100080)北京大学燕园教育培训中心大厦1408室“天骄之路”高考信息共享网收，均可成为“天骄之路”高考信息共享网的网员(请读者最好将所有回执收齐一次性寄出)。其中，购买5本以上10本以下者，成为C级网员，10本以上15本以下者，成为B级网员，15本以上，成为A级网员。所有网员均享有以下权利(现在就读高二(含)以下各年级的网员，该权利将在其升入高三时享有)：

● 所有网员的姓名、年龄、班级、详细通讯地址等将被计算机存档，一旦国家教育部考试中心有重大变动措施出台，我们将马上直接通知；

● 向A级网员免费赠送北京市高考前(5月)三区(海淀、东城、西城)摸底统考试卷，向B级网员免费赠送二区(东城、西城)试卷，向C级网员免费赠送西城区试卷。该试卷均含答案，为北京市重点中学内部使用(不对外销售)，从历年考试经验来看，该卷为每年北京市“高考总演习”，针对性强、切题率高，肯定对您高考很有帮助；

● 向A、B级网员免费提供各种高考信息资料，包括北大清华状元经验启示、特级教师疑难门诊、考前心理调适良策、高考填报志愿指南等；

● 为A级网员设立“天骄状元奖金”。凡考上北大、清华的读者，可以从本中心获赠500元；凡考上北京市其它普通高等院校(不含自费或委培)的，可以从本中心获赠相当于其购书总额的奖金，请获奖读者携带其购书凭证、身份证及高校录取通知书来本中心领奖(兑奖截止日期：2002年9月20日)。

走好这一步　成就千百步

天骄之路高考信息共享网　美好人生的第一步

请 沿 此 线 剪 下

“天骄之路”读者建议书

读者姓名		性别		年龄		就读年级	
所在学校				邮编		任课教师	
通讯地址						邮政编码	
所购书名					售书单位		
读者建议							

为什么天骄之路丛书会如此畅销？

作者——

"天骄之路"丛书的编写者都是资深的特高级教师或教学研究人员，甚至许多著名高校的专家教授也参与了本丛书的审阅（因为高考的最终目的是为各高校选拔优秀的人才）。可以说，他们的学风是负责的、严谨的、独到的。许多作者曾直接或间接参与高考命题与阅卷，在信息和观点上有敏锐的反应能力和表述能力（如去年《北模》、《海模》、《冲刺》与该年高考题相似分值达157分）；同时，高考要求在变化，教材在改革，"天骄之路"为适应广大师生的高品位要求，虽其品牌历久，但其内容却是年年弥新的。这样一来，"天骄之路"便能在学生辅导用书泛滥的今天，仍能以很高的质量和市场认同率而独树一帜。

读者——

孙立平（男，吉林省人，身份证号220102800804021，现为北京大学金融学系学生）：我是吉林省东北师大附中的学生，在2000年的高考中，我幸运地以吉林省文科第一名的成绩考入北京大学。上高三时，同学们都买了"天骄之路系列丛书"，而我当时以为它也只不过是一份普通的复习材料，没有理会。后来，一个偶然的机会使我看到一些状元们写给"天骄之路"的感谢信，又仔细地看了一下它的内容后，难度适中，同高考基本一致，尤其它的新颖、权威是别的复习资料无法比拟的，在它的帮助下，我的各科成绩有了明显的提高，尤其是政治一科，今年高考综合卷中的政治题有好几道题跟"天骄之路"十分相似。今天，借此机会，我衷心地向"天骄之路"表达我的谢意。

吴　昊（男，北京市海淀区人，身份证号110108811218347，现为清华大学自动化系学生）：回首高中三年，自己之所以能取得这样的成绩，一方面与母校北京四中的良好教育分不开，另一方面与优异的复习资料也是密不可分的。而"天骄之路"系列丛书便是我所有复习资料中最系统，最全面，最有效的丛书。

刚上高三时，我成绩不太理想，在班里只处于五，六名的位置。正当我为找不到好的复习资料而着急时，我惊异地发现同学手中越来越普及的一种丛书—天骄之路。与同学交谈后得知该丛书挺有效，于是我抱着试试的心情购买了一套《宝典》。读了一段时间后，我发现真的很有帮助，每道题的讲解既简便又能切中要害，读起来简直是一种享受。之后，我又购买了《技巧》系列和《北模》系列，当真读起来爱不能释，经过一番苦读之后，成绩提高很快，一跃成为班里第一，年级前五名，在成绩的背后，我深知成绩的取得与天骄之路系列丛书分不开，编委老师和我的努力终于见效，我高考取得了成功。

程　刚（男，湖北省十堰市人，身份证号420302820516091，现为清华大学生物系学生）：我是天骄之路系列丛书的忠实拥护者和受益者。今年年初，上高三的我正为自己的成绩深深忧虑，尤其是语文成绩，忽上忽下，很不稳定。朋友建议我买天骄之路《宝典》系列试试，一用之下，其质量令我惊讶不已，毫不夸张地说，在我见过的各种考试用书中，天骄之路确是出类拔萃，卓尔不群的。有它的帮助，我的各科成绩稳步提高，日趋稳定，使我面对高考时心中有底，从容镇定，实现了自己的清华梦。

田　丰（男，黑龙江鹤岗市人，现为清华大学生物系学生，身份证号230403198107250019）：在上高三时，由于找不到较好的高考复习资料，我非常苦恼。一天，同学向我推荐了天骄之路系列中的高考模拟试卷，于是我就到书店买了几本回家做。做后感觉非常好，其中的题量、题型等跟高考完全一样，并且题都很典型，也很新。后来，我又到书店买了该系列丛书其它书籍，也都十分好，其书后都附有详细答案，使我可以真正把题做精、做透，使我成绩有很大提高，进入了我理想的大学和理想的系。

陶　媛（女，贵州省贵阳市人，身份证号520114811115006，现为北京大学中文系学生）：曾几何时，北大在我心中还仅仅是一个遥远的希望，而正是天骄之路丛书，它字里行间孜孜不倦的教诲，以详实的内容、新颖的题型，极大地充实了我的头脑，提高了我的水平。作为一名文科生，它的《精要》丛书中的《历史》《政治》使我面对那整整十本书不再头疼，考前复习有条不紊，且全面地掌握了各知识点。它的《宝典》丛书中的《英语》不落俗套，《北模》《海模》中的《数学》难易适中，不偏不怪，有很强的思维力度。如今，我已顺利地走过了高考，我衷心地感谢天骄之路丛书带给我的帮助，我真诚地将这套精品推荐给广大中学生朋友。

黄少晨（男，内蒙古包头市人，身份证号150205811211093，现为清华大学自动化系学生）：进入高三，学习非常紧张，各种习题集、练习册、题海铺天盖地而来。现在，我意识到选择"天骄之路"是十分明智的。它不仅带来了新题目、新题型，更带来了新思路，新方法。书中题目内容充实而不重复，重点突出，难度适宜，最适合高三学生进行复习之用。新颖的题型会使你的思路自然清晰地形成，题做得不多，方法却已牢牢地掌握。"天骄之路"丛书还具有方向性，指导性。瞄准高考，切题率高是"天骄之路"的特色。"天骄之路"高考信息共享网能够将高考信息及时准确地传递给您，使您把握高考动向，增加高考取胜的信心。

王　宇（男，辽宁省沈阳市人，身份证号210102810830693，现为清华大学电子工程系学生）：我是东北育才学校的一名学生，上高三时，老师为我们介绍了"天骄之路"系列图书，我一下子就被它的权威性和实用性所吸引了，我买了两套，通过高中这最后一年的努力和它的帮助，我在高考取得了650多分的成绩，一下子从班级第五名成为了班级的第一名，我们全班的平均分也达到了600分，这都是天骄之路的功劳。

在高二时，老师就为我们全班定购了《北模》的语文模拟题，在当年的期末考试中我们全班的语文成绩就成了全年级的第一名。另外，在五月份"天骄之路"又为我们邮了北京市三区的模拟题，这给了我们更多的帮助，使我在高考之前就有了最全面最有权威的指导，使我在高考中考出了好成绩。

吕广西（男，吉林省桦甸市人，身份证号220282810412310，现为北京大学计算机系学生）：回想起九九年，由于我是在一所县城中学读书，因此信息十分闭塞，尽管我尽了最大努力，却免不了战败于高考这一战场，仅考了513分，连本省的重点线还不够，重读的一年，我学乖了许多，因为从我校考入重点大学的学生那里我懂得了信息的重要性，于是我向我校那一年考入清华的师兄及老师打听最具有权威性，高考消息最准的资料，他们向我介绍了"天骄之路"系列丛书，我抱着试试看的心理，先买了"宝典"，因为我知道高考复习最重要的就是解决重复错误的问题，那套书用起来真可以叫好。从书中我又得知入了A级网员，可以得到北京三区的模拟卷，而这几套卷是非常权威的，在一定程度上代表了高考。因此，我又购买了另外两套，我的成绩不断提高，由班级第八上升为第一名，直至在高考中我考了全校第三名，如愿进入北大学习。

（以上只是从大量读者来信中着重筛选了北大清华学生的来信，均系原文照登，未加增删，且已征得本人同意。—编者）

目　录

第六章　不等式

〔单元知识总结〕

一、不等式的性质

1. 两个实数 a 与 b 之间的大小关系

$$\begin{cases}(1)\ a-b>0\Leftrightarrow a>b;\\(2)\ a-b=0\Leftrightarrow a=b;\\(3)\ a-b<0\Leftrightarrow a<b.\end{cases}$$

若 $a、b\in R^+$，则$\begin{cases}(4)\ \dfrac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b;\\(5)\ \dfrac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b;\\(6)\ \dfrac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b.\end{cases}$

2. 不等式的性质

(1) $a>b\Leftrightarrow b<a$（对称性）

(2) $\left.\begin{matrix}a>b\\b>c\end{matrix}\right\}\Rightarrow a>c$（传递性）

(3) $a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$（加法单调性）

(4) $\left.\begin{matrix}a>b\\c>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac>bc$，$\left.\begin{matrix}a>b\\c<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac<bc$（乘法单调性）

(5) $a+b>c\Rightarrow a>c-b$（移项法则）

(6) $\left.\begin{matrix}a>b\\c>d\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+c>b+d$（同向不等式可加）

(7) $\left.\begin{matrix}a>b\\c<d\end{matrix}\right\}\Rightarrow a-c>b-d$（异向不等式可减）

(8) $\left.\begin{matrix}a>b>0\\c>d>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac>bd$（同向正数不等式可乘）

(9) $\left.\begin{matrix}a>b>0\\0<c<d\end{matrix}\right\}\Rightarrow \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$（异向正数不等式可除）

(10) $\left.\begin{matrix}a>b>0\\n\in N\end{matrix}\right\}\Rightarrow a^n>b^n$（正数不等式可乘方）

(11) $\left.\begin{matrix}a>b>0\\n\in N\end{matrix}\right\}\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（正数不等式可开方）

(12) $a>b>0\Rightarrow \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$（正数不等式两边取倒数）

3. 绝对值不等式的性质

(1) $|a|\geqslant a$；$|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0),\\-a & (a<0).\end{cases}$

(2) 如果 $a>0$，那么

$|x|<a\Leftrightarrow x^2<a^2\Leftrightarrow -a<x<a$；

$|x|>a\Leftrightarrow x^2>a^2\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$.

(3) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$.

(4) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\quad(b\neq 0)$.

(5) $|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$.

(6) $|a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots\cdots+|a_n|$.

二、不等式的证明

1. 不等式证明的依据

(1) 实数的性质：$a、b$ 同号 $\Leftrightarrow ab>0$；$a、b$ 异号 $\Leftrightarrow ab<0$

$a-b>0\Leftrightarrow a>b$；$a-b<0\Leftrightarrow a<b$；$a-b=0\Leftrightarrow a=b$

(2) 不等式的性质（略）

(3) 重要不等式：① $|a|\geqslant 0$；$a^2\geqslant 0$；$(a-b)^2\geqslant 0$ $(a、b\in R)$

② $a^2+b^2\geqslant 2ab$（$a、b\in R$，当且仅当 $a=b$ 时取“$=$”号）

③ $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（$a、b\in R^+$，当且仅当 $a=b$ 时取“$=$”号）

2. 不等式的证明方法

(1) 比较法：要证明 $a>b\ (a<b)$，只要证明 $a-b>0\ (a-b<0)$，这种证明不等式的方法叫做比较法．

用比较法证明不等式的步骤是：作差——变形——判断符号．

(2) 综合法：从已知条件出发，依据不等式的性质和已证明过的不等式，推导出所要证明的不等式成立，这种证明不等式的方法叫做综合法．

(3) 分析法：从欲证的不等式出发，逐步分析使这不等式成立的充分条件，直到所需条件已判断为正确时，从而断定原不等式成立，这种证明不等式的方法叫做分析法．

证明不等式除以上三种基本方法外，还有反证法、数学归纳法等．

三、解不等式

1. 解不等式问题的分类

(1)解一元一次不等式．

(2)解一元二次不等式．

(3)可以化为一元一次或一元二次不等式的不等式．

①解一元高次不等式；

②解分式不等式；

③解无理不等式；

④解指数不等式；

⑤解对数不等式；

⑥解带绝对值的不等式；

⑦解不等式组．

2. 解不等式时应特别注意下列几点：

(1)正确应用不等式的基本性质．

(2)正确应用幂函数、指数函数和对数函数的增、减性．

(3)注意代数式中未知数的取值范围．

3. 不等式的同解性

(1)$f(x)\cdot g(x)>0$与$\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\end{cases}$或$\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}$同解．

(2)$f(x)\cdot g(x)<0$与$\begin{cases}f(x)>0\\g(x)<0\end{cases}$或$\begin{cases}f(x)<0\\g(x)>0\end{cases}$同解．

(3)$\frac{f(x)}{g(x)}>0$与$\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\end{cases}$或$\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}$同解．$(g(x)\neq 0)$

(4)$\frac{f(x)}{g(x)}<0$与$\begin{cases}f(x)>0\\g(x)<0\end{cases}$或$\begin{cases}f(x)<0\\g(x)>0\end{cases}$同解．$(g(x)\neq 0)$

(5)$|f(x)|<g(x)$与$-g(x)<f(x)<g(x)$同解．$(g(x)>0)$

(6)$|f(x)|>g(x)$①与$f(x)>g(x)$或$f(x)<-g(x)$(其中$g(x)\geqslant 0$)同解；②与$g(x)<0$同解．

(7)$\sqrt{f(x)}>g(x)$与$\begin{cases}f(x)>[g(x)]^2\\f(x)\geqslant 0\\g(x)\geqslant 0\end{cases}$或$\begin{cases}f(x)\geqslant 0\\g(x)<0\end{cases}$同解．

(8)$\sqrt{f(x)}<g(x)$与$\begin{cases}f(x)<[g(x)]^2\\f(x)\geqslant 0\end{cases}$同解．

(9)当$a>1$时，$a^{f(x)}>a^{g(x)}$与$f(x)>g(x)$同解，当$0<a<1$时，$a^{f(x)}>a^{g(x)}$与$f(x)<g(x)$同解．

(10)当$a>1$时，$\log_a f(x)>\log_a g(x)$与$\begin{cases}f(x)>g(x)\\f(x)>0\end{cases}$同解．

当$0<a<1$时，$\log_a f(x)>\log_a g(x)$与$\begin{cases}f(x)<g(x)\\f(x)>0\\g(x)>0\end{cases}$同解．

〔重点难点点拨〕

一、深刻理解不等式的性质

1. 实数的运算和实数的大小之间的一组等价关系式：

$a-b>0\Leftrightarrow a>b$，$a-b<0\Leftrightarrow a<b$，$a-b=0\Leftrightarrow a=b$

上式的左边部分反映的是实数的运算性质，而右边部分反映的是实数的大小顺序，合起来就反映了实数的运算性质和大小顺序之间的关系，它就是本章整个内容的基础，是证明不等式与解不等式的主要依据．根据这组等价关系式，就可以将比较两实数的大小问题转化为判断这两实数差的正负问题，所以这组等价关系式是“比较法”的依据．

2. 在运用不等式性质时，一定要弄清它们成立的条件，如同向不等式相乘、不等式两边同时乘方(开方)，要求不等式两边均为正数．又如在乘方与开方中均要求n为大于1的自然数，否则就推不出正确结论，即仅有$a>b$，不一定有$a^n>b^n$(如$-1>-2$，而$(-1)^2<(-2)^2$；仅有$a>b>0$，也不一定推出$a^n>b^n$(如$a>b>0,a^{-1}<b^{-1}$)．

在运用不等式的性质证明问题时，要注意步步有定理(或推论)作为依据．

3. 要分清不等式的性质中，哪些是等价关系(充要条件)，哪些是推出关系(充分条件)。

等价关系的：$a>b\Leftrightarrow b<a$　[第(1)条]

$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$　[第(3)条]

其余10条都是推出关系，但其中的(4)、(10)、(11)条可改造为如下形式的等价关系：

第(4)条：当$c>0$时，$a>b\Leftrightarrow ac>bc$．

当$c<0$时，$a>b\Leftrightarrow ac<bc$．

第(10)条：当a、$b>0$且$n\in N$时，$a>b\Leftrightarrow a^n>b^n$．

第(11)条：当a、$b>0$且$n\in N$时，$a>b\Leftrightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$．

因为以上的等价关系在解不等式和证明不等式时常用，所以记住以上5条等价关系很必要．

4. 准确运用平均值不等式

定理“两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数”简称为平均值定理，其公式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$

(a、$b\in R^+$，当且仅当 $a=b$ 时取"="号)称平均值不等式．

在平均值不等式中，若将 a、b 分别换为 a^2，b^2，则得到公式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$(a、$b\in R$，当且仅当 $a=b$ 时取"="号)，所以 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 这个公式也可以用平均值不等式记忆．

对于以上两个公式，要注意以下四点：

(1) $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 和 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 成立的条件是不同的，前者只要求 a、b 都是实数，而后者则要求 a、b 都是正数，所以在使用这两个公式时要区别这两公式的不同条件，既要防止将前者条件弱化为 a、b 是正数，又要防止将后者条件强化为 a、b 是实数．

(2)这两个公式都是带有等号的不等式，因此对其中的"当且仅当 $a=b$ 时取'='号"这句话的含义要搞清楚：

一是 $a=b\Leftrightarrow\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$；二是 $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}\Leftrightarrow a=b$．

总之 $a=b\Leftrightarrow\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$．

即 $a=b$ 是 $\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$ 的充要条件．

(3)公式 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 的几何意义是：半径不小于半弦(图 6－1)．当且仅当 $a=b=$ 半径长时，$\sqrt{ab}$ 也等于半径长，此时不等式中等号成立．

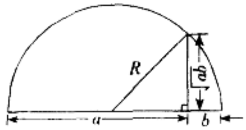


图 6－1

(4)平均值不等式除用于证明不等式外，还广泛用于求函数的最大值或最小值．

即两个正数的积是常数，当且仅当这两个数相等时和有最小值；

两个正数的和是常数，当且仅当这两个数相等时积有最大值．

利用上面两个结论求函数最值，是常用的重要方法之一．

两个正数的平均值不等式可以引申到 n 个正数的情形：n 个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数．

二、不等式的证明方法

不等式证明的最基本方法有：**比较法、综合法、分析法**，常用的方法还有反证法、数学归纳法、放缩法等．

1．比较法

(1)作差比较

理论依据：$A>B\Leftrightarrow A-B>0$

$A=B\Leftrightarrow A-B=0$

$A<B\Leftrightarrow A-B<0$

证明的步骤：作差→变形→判断符号．

作差变形的目标：

①一般地将差变形为几个同号数(式)和的形式，或平方式与正数(式)和的形式．

②变形成几个因式连乘积形式，并能判定出式子的符号．

(2)作商比较

要证 $A>B(B>0)$，只要证商 $\frac{A}{B}>1$．

要证 $A<B(B>0)$，只要证商 $\frac{A}{B}<1$．

证明的步骤：作商→变形→判断与 1 的大小关系．

作商变形目标：使结果便于与 1 比大小．

2．综合法

利用综合法证题的指导思想是"由因导果"，即从已知条件出发，利用公理、定理推出结论来，在推证过程中，必须满足每一步结果是前一步的必要条件．

常用的基本不等式有：

(1) $a^2\geqslant 0$，$(a-b)^2\geqslant 0$ (a、$b\in R$)

(2) $a^2+b^2\geqslant 2ab$ (a、$b\in R$)

(3) $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ (a、b、$c\in R^+$)

(4) $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ (a、$b\in R^+$)

(5) $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$ (a、b、$c\in R^+$)

(6) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$ ($a\cdot b>0$)

(7) $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (a、$b\in R^+$)

以上公式仅当 $a=b$ 或 $a=b=c$ 时等号成立．

(8) $||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$ (a、$b\in R$)

右边等号成立的条件是：$a\cdot b\geqslant 0$

左边等号成立的条件是：$a\cdot b\leqslant 0$

3．分析法

分析法的指导思想是"执果寻因"，即从要证的结论出发，使得每一步是前一步结果的充分条件即可，最后一步所得的不等式成立则说明原不等式成

立.

4. 反证法

否定结论,推出矛盾,从而肯定结论.

5. 数学归纳法

如不等式是关于自然数命题,常用数学归纳法证明.

6. 放缩法

用不等式的传递性,知 $A\leqslant C$,只须证 $C\leqslant B$ 即可证 $A\leqslant B$.

应用此法时应注意放大或缩小不等式的范围,用舍掉一些正(负)项而使不等式各项之和变小(大),或在分式放大或缩小分式的分子、分母等方法达到其目的.

三、不等式的解法

1. 一元一次不等式:$ax>b(ax<b)$

当 $a>0$ 时,$x>\frac{b}{a}\left(x<\frac{b}{a}\right)$;

当 $a<0$ 时,$x<\frac{b}{a}\left(x>\frac{b}{a}\right)$;

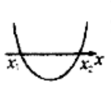
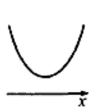
当 $a=0$ 时,

对 $ax>b\begin{cases}b\geqslant 0,\varnothing\\ b<0,R\end{cases}$

对 $ax<b\begin{cases}b\geqslant 0,R\\ b<0,\varnothing\end{cases}$

2. 一元二次不等式:(如表 6-1)$a>0$

表 6-1

$\Delta=b^2-4ac$	$y=ax^2+bx+c$	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c<0$
$\Delta>0$		$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x_1<x<x_2$
$\Delta=0$		$x\neq x_0$ 的实数	$\varnothing$
$\Delta<0$		R	$\varnothing$

当 $a<0$ 时,将二次项系数化为正数再解.

特别要注意以下两种情况:

(1)若对一切实数 x 有 $ax^2+bx+c>0$ 恒成立,则充要条件是 $\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$(其中 $\Delta=b^2-4ac$).

(2)若对一切实数 x 有 $ax^2+bx+c<0$ 恒成立,则充要条件是 $\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$(其中 $\Delta=b^2-4ac$).

3. 可以化为一元一次或一元二次不等式的不等式

(1)高次不等式:$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n>0(a_n\in R,n\in N,a_0\neq 0)$

可以化为

$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)>0$

(其中 $x_1<x_2<\cdots<x_n$)的形式来求解,一般先在数轴上标区间 $(-\infty,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_n,+\infty)$,由于 $f(x)$ 的值在上述区间自右至左依次为 $+,-,+,-,\cdots$,正值区间为 $f(x)>0$.

(2)分式不等式

分式不等式的解法是整式化.

当分母的值的正、负可以确定时,可直接去分母解之,当分母值为正值时,去分母后不等式的不等号不改变;当分母为负值时,去分母后的不等式要变号.

当分母的值的正、负不能确定时,可转化为不等式组解之,有以下几种情况:

①$\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0\Longleftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\geqslant 0\\ g(x)\neq 0\end{cases}$

$\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant 0\Longleftrightarrow\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\leqslant 0\\ g(x)\neq 0\end{cases}$

②$\frac{f(x)}{g(x)}>0\Longleftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0$

$\frac{f(x)}{g(x)}<0\Longleftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$

(3)无理不等式

无理不等式要转化为有理不等式来解,特别要注意无理不等式的定义域,它的解必须满足使每一个无理式有意义.

$\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geqslant 0\\ f(x)>0\\ f(x)>[g(x)]^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)\geqslant 0\\ g(x)<0\end{cases}$

$\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)>0\\ f(x)\geqslant 0\\ f(x)<[g(x)]^2\end{cases}$

$\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant 0\\ g(x)\geqslant 0\\ f(x)>g(x)\end{cases}$

$\sqrt{f(x)}<\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant 0\\ g(x)\geqslant 0\\ f(x)<g(x)\end{cases}$

(4)绝对值不等式

解含有绝对值符号的不等式,关键是去掉绝对值符号,转化为不含绝对值符号的不等式(或不等式组).

理论依据:$a>0,x\in R$ 则:

$|x|>a \Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$

$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$

去绝对值符号的主要方法：

① $|f(x)|>a \Leftrightarrow f(x)>a$ 或 $f(x)<-a \quad (a>0)$

$|f(x)|<a \Leftrightarrow -a<f(x)<a \quad (a>0)$

② $|f(x)|>|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x) \Leftrightarrow [f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]>0$

③ $|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow f(x)>g(x)$ 或 $f(x)<-g(x)$

$|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$

(证明略)

(注意：不必考虑 $g(x)$ 符号的正与负)

④含两个以上绝对值符号的不等式，可利用分区间法讨论．

⑤利用图像，采用数形结合的方法．

(5)指数不等式与对数不等式

解指数、对数不等式的途径是转化为代数不等式，常用的方法有：

同底法：

① $a^{f(x)}>a^{g(x)}(a>0$，且 $a\neq1)$，则：

当 $a>1$ 时，$f(x)>g(x)$

当 $0<a<1$ 时，$f(x)<g(x)$

② $\log_a f(x)>\log_a g(x)(a>0$ 且 $a\neq1)$，则：

当 $a>1$ 时，$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$

当 $0<a<1$ 时，$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$

取对数法：

若 $a^{f(x)}>b(a>0$ 且 $a\neq1, b>0)$

当 $a>1$ 时，$f(x)>\log_a b$

当 $0<a<1$ 时，$f(x)<\log_a b$

当 $f(x), g(x)$ 是复合函数时，还要考虑其自身的定义域．

4. 不等式组：取不等式组中各不等式解集的交集．

四、不等式的应用

1. 利用不等式研究数或式的大小比较

比较两个实数大小的方法是作差比较或作商比较．

作差比较依据为 $a>b \Leftrightarrow a-b>0$

$a<b \Leftrightarrow a-b<0$

$a=b \Leftrightarrow a-b=0$

作商比较的依据为当 $b>0$，$a>b \Leftrightarrow \frac{a}{b}>1$

$a<b \Leftrightarrow \frac{a}{b}<1$

$a=b \Leftrightarrow \frac{a}{b}=1$

2. 利用平均值定理研究函数的最值

利用定理：若 n 个正数，$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$

(1)其和为定值 P，则乘积有最大值，

即：$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \leqslant \left(\frac{P}{n}\right)^n$

(2)其积为定值 Q，则和有最小值，

即：$x_1+x_2+\cdots+x_n \geqslant n\sqrt[n]{Q}$

以上当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，取得最大值或最小值．

3. 利用不等式研究函数定义域、单调性、方程根讨论等问题．

〔典型例题精讲〕

【例1】 比较 $\log_{(a-1)}(a+1)$ 与 $\log_{(a+1)}(\frac{a+1}{a-1})$ $(a>1$ 且 $a\neq2)$ 的大小．

精析 本题考查实数大小比较，对数运算公式，换底公式，对数函数性质．

解答 记 $A=\log_{(a-1)}(a+1)-\log_{(a+1)}(\frac{a+1}{a-1})$

$=\log_{a-1}(a+1)-\log_{(a+1)}(a+1)+\log_{(a+1)}(a-1)$

$=\frac{\lg(a+1)}{\lg(a-1)}+\frac{\lg(a-1)}{\lg(a+1)}-1$

$=\frac{\lg^2(a+1)+\lg^2(a-1)}{\lg(a+1)\lg(a-1)}-1$

$=\frac{\lg^2(a+1)-\lg(a+1)\lg(a-1)+\lg^2(a-1)}{\lg(a+1)\lg(a-1)}$

$=\frac{[\lg(a+1)-\frac{1}{2}\lg(a-1)]^2+\frac{3}{4}\lg^2(a-1)}{\lg(a+1)\lg(a-1)}$

易知分子大于0，

(1)当 $1<a<2$ 时 $\lg(a-1)<0$，$A<0$ 故 $\log_{(a-1)}(a+1)<\log_{(a+1)}(\frac{a+1}{a-1})$

(2)当 $a>2$ 时 $\lg(a-1)>0$，$A>0$ 故 $\log_{(a-1)}(a+1)>\log_{(a+1)}(\frac{a+1}{a-1})$

【例2】 已知函数 $f(x)=x^{-2m^2+m+3}(m\in Z)$ 为偶函数，且 $f(3)<f(5)$．

(1)求 m 的值，并确定 $f(x)$ 的解析式．

(2)若 $g(x)=\log_a[f(x)-ax](a>0, a\neq1)$ 在区间[2,3]上为增函数，求实数 a 的取值范围．

解答 (1)由 $f(3)<f(5)$,得

$3^{-2m^2+m+3}<5^{-2m^2+m+3}$,

即$(\frac{3}{5})^{-2m^2+m+3}<1=(\frac{3}{5})^0$.

$\because$ $y=(\frac{3}{5})^x$ 为减函数.

$\therefore$ $-2m^2+m+3>0$, $-1<m<\frac{3}{2}$;

$\because$ $m\in Z$,

$\therefore$ $m=0,1$;

当 $m=0$ 时, $-2m^2+m+3=3$;

当 $m=1$ 时, $-2m^2+m+3=2$;

而 $f(x)$ 为偶函数,

$\therefore$ $m=1$ 时, $f(x)=x^2$.

(2)由(1)知,当 $x\in[2,3]$ 时, $g(x)=\log_a(x^2-ax)$ 在$[2,3]$上为增函数,则

①当 $0<a<1$ 时, $y=\log_a u$ 在其定义域内递减,要使 $g(x)$ 在$[2,3]$上递增,则要 $u=x^2-ax$ 在$[2,3]$上递减,且 $u>0$ 时,此时 a 必须满足

$$\begin{cases}\frac{a}{2}\geqslant 3,\\ 3^2-3a>0.\end{cases}\quad(无解)$$

②当 $a>1$ 时, $y=\log_a u$ 在其定义域内递增,要使 $g(x)$ 在$[2,3]$上递增,则要 $u=x^2-ax$ 在$[2,3]$上递增,且 $u>0$ 时,此时 a 必须满足

$$\begin{cases}\frac{a}{2}\leqslant 2,\\ 2^2-2a>0.\end{cases}$$

$\therefore$ $a<2$.

故得取值范围为 $1<a<2$.

【例 3】 若 a、b、x、$y\in R^+$,且 $x+y=1$,求证:$ab\leqslant(ax+by)(ay+bx)\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}$.

精析 比较法及均值不等式的应用.

证明 $(ax+by)(ay+bx)-ab$

$=xy(a^2+b^2)+ab(x^2+y^2-1)$

$=xy(a^2+b^2)+ab[(x+y)^2-2xy-1]$

$=xy(a^2+b^2)-2xyab=xy(a-b)^2\geqslant 0$

$\therefore$ $ab\leqslant(ax+by)(ay+bx)$

$2(ax+by)(ay+bx)\leqslant[\frac{(ax+by)+(ay+bx)}{2}]^2=$

$[\frac{a(x+y)+b(x+y)}{2}]^2=\frac{(a+b)^2}{4}$

$\therefore$ $ab\leqslant(ax+by)(ay+bx)\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}$

【例 4】 在$\triangle ABC$中,求证:$(a+b+c)^2<4(ab+bc+ac)$.

精析 用分析法证明.分析法是从求证的不等式出发,分析使这个不等式成立的条件,要保证"后一步"是"前一步"的充分条件,不断地用充分条件代替前面的不等式,直至条件具备,就断定原不等式成立.

证明 欲证原式成立,

即证:$a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac<0$

即证:$(a^2-ab-ac)+(b^2-ab-bc)+(c^2-ac-bc)<0$

即证:$a(a-b-c)+b(b-a-c)+c(c-a-b)<0$

$\because$ 在$\triangle ABC$中,

$\therefore$ $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$.

$\therefore$ $a-b-c<0$, $b-a-c<0$, $c-a-b<0$.

$\because$ $a>0$, $b>0$, $c>0$.

$\therefore$ $a(a-b-c)+b(b-a-c)+c(c-a-b)<0$

$\therefore$ 原不等式成立.

【例 5】 已知$|a|<1$, $|b|<1$,求证:$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$.

精析 从否定结论出发,用"反证法".

证明 假设$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|\geqslant 1$,那么$|a+b|\geqslant|1+ab|$,

$\therefore$ $(a+b)^2\geqslant(1+ab)^2$,即$(1+ab)^2-(a+b)^2\leqslant 0$,

也即 $1+a^2b^2-a^2-b^2\leqslant 0$.

$\therefore$ $(1-a^2)(1-b^2)\leqslant 0$.

故得 ①$\begin{cases}1-a^2\geqslant 0,\\ 1-b^2\leqslant 0,\end{cases}$ ②$\begin{cases}1-a^2\leqslant 0,\\ 1-b^2\geqslant 0.\end{cases}$

解①得:$|a|\leqslant 1$,且$|b|\geqslant 1$.

解②得:$|a|\geqslant 1$,且$|b|\leqslant 1$.均与已知矛盾,

$\therefore$ $\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$成立.

【例 6】 证明不等式:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}\quad(n\in N).$$

精析 用数学归纳法论证.

证明 (1)当 $n=1$ 时,左边 $=1$,右边 $=2$,左边 $<$ 右边,

(2)假设 $n=k(k\geqslant 1,k\in N)$时,命题成立,

即 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}$成立

则上式两边同加上$\frac{1}{\sqrt{k+1}}$,

有:$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$

下面论证：$2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$

$\because \sqrt{k+1}>0$，去分母

只须证 $2\sqrt{k(k+1)}+1<2(k+1)$

即证 $2\sqrt{k(k+1)}<2k+1$

即证 $4k(k+1)<(2k+1)^2$

即证 $0<1$，$\because 0<1$ 成立

$\therefore 2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$成立，由传递性，有 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$成立，

$\therefore n=k+1$ 时，不等式成立，

由(1)、(2)对一切自然数 n，不等式成立．

【例 7】 关于实数 x 的不等式

$$\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$$

与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$（其中 $a\in R$）的解集依次记为 A 与 B．

求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围．

解答 由 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$，

得 $2a\leqslant x\leqslant a^2+1$.

又由 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$,

即 $(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0$,

当 $3a+1\geqslant 2$，即 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时，得 $2\leqslant x\leqslant 3a+1$，当 $3a+1<2$,

即 $a<\frac{1}{3}$ 时，

得 $3a+1\leqslant x\leqslant 2$.

$\therefore$ 当 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时，由 $A\subseteq B$，得

$$\begin{cases}2\leqslant 2a,\\ a^2+1\leqslant 3a+1.\end{cases}$$

$\therefore$ $1\leqslant a\leqslant 3$.

当 $a<\frac{1}{3}$ 时，由 $A\subseteq B$，得

$$\begin{cases}3a+1\leqslant 2a,\\ a^2+1\leqslant 2.\end{cases}$$

$\therefore$ $a=-1$.

故使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围是 $\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 3$，或 $a=-1\}$.

【例 8】 解不等式 $\sqrt{\frac{2-x}{x+2}}<x+1$.

解答 原不等式等价于：

$$\begin{cases}x+1\geqslant 0\\ \frac{2-x}{x+2}\geqslant 0\\ \frac{2-x}{x+2}<(x+1)^2\end{cases} \quad 得\begin{cases}x\geqslant -1\\ \frac{x-2}{x+2}\leqslant 0\\ (x+1)^2+\frac{x-2}{x+2}>0\end{cases}$$

即 $\begin{cases}x\geqslant -1\\ -2\leqslant x\leqslant 2\\ \frac{(x+1)^2(x+2)+x-2}{x+2}>0\end{cases}$

即 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 2\\ (x+2)[(x+1)^2(x+2)+x-2]>0\end{cases}$

即 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 2\\ x(x+2)(x^2+6x+6)>0\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 2\\ x>0 或 -2<x<-3+\sqrt{3} 或 x<-3-\sqrt{3}\end{cases}$

$\therefore$ 解为：$0<x\leqslant 2$.

【例 9】 解关于 x 的不等式

$\log_{\frac{1}{2}}[a^{4x}+2a^{2x}(a+1)^x-(a+1)^{2x}+1]<0$（$a>0$）.

精析 指、对数不等式解法及含参的指、对数不等式解法．

解答 原不等式可化为：$a^{4x}+2a^{2x}\cdot(a+1)^x-(a+1)^{2x}+1>1$（$\because 0<\frac{1}{2}<1$）

$\therefore a^{4x}+2a^{2x}\cdot(a+1)^x-(a+1)^{2x}>0$

$\because a>0$

$\therefore a+1>1$

两边同除 $(a+1)^{2x}$ 得 $[(\frac{a^2}{a+1})^x]^2+2(\frac{a^2}{a+1})^x-1>0$

$\therefore (\frac{a^2}{a+1})^x>-1+\sqrt{2}$ 或 $(\frac{a^2}{a+1})^x<-1-\sqrt{2}$（舍）

①$0<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 且 $x<\log_{\frac{a^2}{a+1}}(\sqrt{2}-1)$

②$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时，不等式为 $1^x>\sqrt{2}-1$ 成立 $x\in R$

③$a>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时，$x>\log_{\frac{a^2}{1+a}}(\sqrt{2}-1)$

【例 10】 解不等式组 $\begin{cases}y-|x^2-2x|+\frac{1}{2}>0\\ y+|x-1|<2\end{cases}$ 其中 x,y 都是整数．

精析 根据绝对值的非负性，先确定 y 的取值范围，然后再运用“整数”条件即可得解．

解答 原不等式组转化为

$$\begin{cases}y+\frac{1}{2}>|x^2-2x|\geqslant 0\\ y-2<-|x-1|\leqslant 0\end{cases}$$

$\therefore\quad -\frac{1}{2}<y<2$，又 y 是整数，故 $y=0$ 或 1.

当 $y=0$ 时，则有 $\begin{cases}|x^2-2x|<\frac{1}{2}\\|x-1|<2\end{cases}$

由 $|x-1|<2$ 解得整数 $x=0,1,2$；但 $x=1$ 不满足 $|x^2-2x|<\frac{1}{2}$.

故有整数解 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$.

当 $y=1$ 时，则有 $\begin{cases}|x^2-2x|<\frac{3}{2}\\|x-1|<1\end{cases}$

由 $|x-1|<1$ 解得整数 $x=1$，且满足 $|x^2-2x|<\frac{3}{2}$，故有整数解 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$.

$\therefore$ 原不等式组的整数解为 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，$\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$.

〔高考真题概览〕

【例 1】 (1999 年全国高考题)若正数 a、b 满足 $ab=a+b+3$，则 ab 的取值范围是____________.

精析 本小题考查不等式的定理及其应用.

解答 由 $ab=a+b+3\geqslant 2\sqrt{ab}+3$，得 $ab-2\sqrt{ab}-3\geqslant 0$.

$(\sqrt{ab}-3)(\sqrt{ab}+1)\geqslant 0$，由于 $\sqrt{ab}>0$，所以 $\sqrt{ab}-3\geqslant 0$，$ab\geqslant 9$，当 $a=3$，$b=3$ 时取等号.

又由 $ab=a+b+3$，得 $b=\frac{a+3}{a-1}=1+\frac{4}{a-1}$，两边同乘以 a，得 $ab=a+\frac{4a}{a-1}=a+4+\frac{4}{a-1}$，可以看出，当 a 无限增大时，ab 的值也无限增大. 所以 ab 的取值范围是 $[9,+\infty)$.

【例 2】 (1999 年上海高考题)若 $a<b<0$，则下列结论中正确的是(　　)

A. 不等式 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 和 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 均不成立.

B. 不等式 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ 和 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 均不能成立.

C. 不等式 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ 和 $(a+\frac{1}{b})^2>(b+\frac{1}{a})^2$ 均不能成立.

D. 不等式 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 和 $(a+\frac{1}{b})^2>(b+\frac{1}{a})^2$ 均不能成立.

精析 本小题考查不等式的基本性质.

解答 $\because b<0$，$\therefore -b>0$，$\therefore a-b>a$. 又 $\because a-b<0$，$a<0$，$\therefore \frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$. 故 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ 不成立.

$\because a<b<0$，$\therefore |a|>|b|$，$\therefore \frac{1}{|a|}<\frac{1}{|b|}$. 故 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 不成立. 由此可选 B.

另外，A 中 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 成立. C 与 D 中 $(a+\frac{1}{b})^2>(b+\frac{1}{b})^2$ 成立，其证明如下：

$\because a<b<0$，$\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$，$\therefore a+\frac{1}{b}<b+\frac{1}{a}<0$，

$\therefore |a+\frac{1}{b}|>|b+\frac{1}{a}|$，故 $(a+\frac{1}{b})^2>(b+\frac{1}{a})^2$. $\therefore$ 选 B.

【例 3】 (1999 年上海高考题)设集合 $A=\{x\,|\,|x-a|<2\}$，$B=\{x\,|\,\frac{2x-1}{x+2}<1\}$. 若 $A\subsetneq B$，求实数 a 的取值范围.

精析 本题考查绝对值不等式、分式不等式的解法，以及集合的知识.

解答 由 $|x-a|<2$，得 $a-2<x<a+2$，

$\therefore A=\{x\,|\,a-2<x<a+2\}$.

由 $\frac{2x-1}{x+2}<1$，得 $\frac{x-3}{x+2}<0$，即 $-2<x<3$，

$\therefore B=\{x\,|\,-2<x<3\}$.

$\because A\subsetneq B$，

$\therefore \begin{cases}a-2\geqslant -2\\a+2\leqslant 3\end{cases}$，于是 $0\leqslant a\leqslant 1$.

〔理论联系实际〕

【例 1】 甲、乙两地相距 s 千米，汽车从甲地匀速行驶到乙地，速度不得超过 c 千米/时. 已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成：可变部分与速度 v(千米/时)的平方成正比，比例系数为 b；固定部分为 a 元.

(1)把全程运输成本 y(元)表示为速度 v(千米/时)的函数，并指出这个函数的定义域.

(2)为了使全程运输成本最小，汽车应以多大速度行驶？

解答 (1)由题意知，汽车从甲地匀速行驶到乙地所用时间为 $\frac{s}{v}$，全程运输成本为

$$\begin{aligned}y&=a\cdot\frac{s}{v}+bv^2\cdot\frac{s}{v}\\&=s(\frac{a}{v}+bv)\end{aligned}$$

故所求函数及其定义域为

$y=s(\frac{a}{v}+bv), v\in(0,c]$.

(2)因为 s,a,b,v 均为正数,

故有 $y=s(\frac{a}{v}+bv)\geqslant 2s\sqrt{ab}$,

当且仅当 $\frac{a}{v}=bv$,

即 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$时上式中等号成立.

若$\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant c$,则当 $v=\sqrt{\frac{a}{b}}$时,全程运输成本 y 最小.

若$\sqrt{\frac{a}{b}}>c$,当 $v\in(0,c]$时,有

$s(\frac{a}{v}+bv)-s(\frac{a}{c}+bc)$

$=s[(\frac{a}{v}-\frac{a}{c})+(bv-bc)]$

$=\frac{s}{vc}(c-v)(a-bcv)$.

$\because$ $c-v\geqslant 0$,且 $a>bc^2$,

$\therefore$ $a-bcv\geqslant a-bc^2>0$.

故 $s(\frac{a}{v}+bv)\geqslant s(\frac{a}{c}+bc)$,

当且仅当 $v=c$ 时等号成立,也即当 $v=c$ 时,全程运输成本 y 最小.

综上知,为使全程运输成本 y 最小,则

当$\frac{\sqrt{ab}}{b}\leqslant c$ 时,行驶速度为 $v=\frac{\sqrt{ab}}{b}$;

当$\frac{\sqrt{ab}}{b}>c$ 时,行驶速度应为 $v=c$.

【例2】 如图6-2所示,为处理含有某种杂质的污水,要制造一底边宽为2米的无盖长方体沉淀箱,污水从 A 孔流人,经沉淀后从 B 孔流出,设箱体长度为 a 米,高度为 b 米,已知流出水中该杂质的质量分数与 a、b 的乘积 ab 成反比.现有制箱材料60平方米,问当 a、b 各为多少米时,经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小(A、B 孔的面积忽略不计).

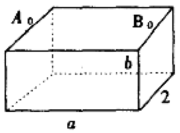


图6-2

解答 依题意即要求得 a、b 值使 ab 最大.由题设知 $4b+2ab+2a=60(a>0,b>0)$,即 $a+2b+ab=30$

$\because a+2b\geqslant 2\sqrt{2ab}$

$\therefore 2\sqrt{2}\sqrt{ab}+ab\leqslant 30$. 当且仅当 $a=2b$ 时取等号.

由 $a>0,b>0$ 解得 $0<ab\leqslant 18$,即当 $a=2b$ 时,ab 取得最大值 18.

$\therefore 2b^2=18$,解得 $b=3,a=6$.

故当 $a=6$ 米,$b=3$ 米时杂质质量分数最小.

【例3】 某乡企业有一个蔬菜生产基地共有3位工人,过去每人年薪为1万元,从今年起,计划每人每年工资比上一年增加10%,并每年新招3位工人,每位新工人第一年年薪为8千元,第二年开始拿与老工人一样数额的年薪.

(1)若今年算第一年,试把第 n 年某乡企业付给蔬菜生产基地工人的工资总额 y(万元)表示成年数 n 的函数.

(2)若该乡企业从今年起,向每位工人收90元作为住房基金,并且今后每年向每位工人收取的住房基金都比上一年增加10元.试证明:该乡企业每年向蔬菜生产基地工人收取的住房基金总额不会超过这一年付给他们的工资总额的1%.

解答 (1)依题意,第 n 年共有 $3n+3$ 位工人,其中有3名新工人.$3n$ 位老工人的工资总额为 $3n(1+10\%)^n$,3位新工人的工资总额为 3×0.8(万元).

故第 n 年 $3n+3$ 位工人的工资总额为

$3n(1+10\%)^n+3\times 0.8=3n(1.1)^n+2.4$(万元).

即 $y=3n(1.1)^n+2.4\quad(n\in N)$.

(2)第 n 年企业向每位工人收取的住房基金为

$90+10(n-1)=10n+80$(元).

向生产基地工人收取的住房基金总额为 $(3n+3)(10n+80)$(元).

故只需证明

$1\%[3n(1.1)^n+2.4]\times 10000>(3n+3)(10n+80)$,

即证 $10\times(1.1)^n>n+9$.

$\because$ $10(1.1)^n=10(1+\frac{1}{10})^n>10(1+C_n^1\frac{1}{10})$

$=n+10>n+9$,

$\therefore$ $10\times(1.1)^n>n+9$.

即收取的住房基金总额不会超过这一年付给他们工资总额的1%.

【例4】 某市粮食储备库的设计容量为30万吨,年初库存粮食10万吨,从元月份起,计划每月收购 M 万吨,每月内供给市面粉厂粮食1万吨,另外,每月还有大量的粮食外调任务,已知 n 个月内外调粮食的总量 W 万吨与 n 的函数关系为 $W=10\sqrt{n}(1\leqslant n\leqslant 16)$,要使在16个月内每月粮食收购之后能满足内用、外调的需要,且每月粮食调出后粮库内有不超设计容量的储备粮,求 M 的范围.

解答 设第 n 个月库内储粮为 y 万吨,则

$y=10+nM-n-10\sqrt{n}(1\leqslant n\leqslant 16)$.