目　录

第一章 正投影法

一、投影法的基本概念

将空间几何问题和几何形体转化为平面上的图象，或者相反，由投影平面图象确定空间物体的形状，要借助于投影法来实现。所以投影法是画法几何的基础，投影法分为两大类。

（一）中心投影法

在图 1-1 中，设定平面 P 为投影面，不在投影面上的定点 S 为投射中心，S 点与空间任一点的连线（如SA）叫做投射线。过空间点 A 的投射线与投影面 P 相交于一点 a，点 a 称为空间点A在投影面 P 上的投影。同样，点 b 是空间点 B在投影面P上的投影。

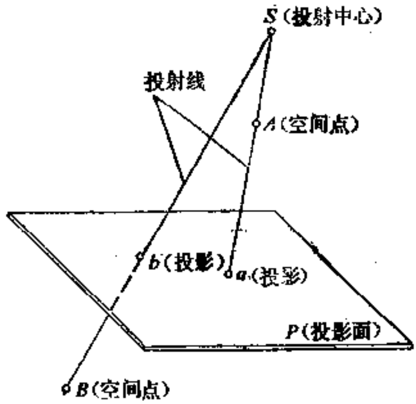


图 1-1

投射线均由投射中心 S 射出，所以叫做中心投影法。在日常生活中，常见的照相、电影和人眼看物体得到的映象，都属于中心投影。

如图 1-2 所示，将一梯子靠在墙上（投影平面 P），在灯光 S 的照射下，在墙上得到它的影子。我们分析梯子和它的投影发现：在中心投影中，位于同一直线上的两相等线段（例如 BD 和DF）在投影面上的投影会变成不等的线段（$bd \neq df$）；相互平行的线段（例如 AE 和 BF），在投影面上的投影可能会变成不平行的线段（ae 不平行于 bf），也就是不平行于投影面的一组互相平行

的直线，它们的中心投影必定相交于一点。用这种中心投影法绘制的工程图象叫做透视图。因为它有很好的立体感，常用于建筑图，图1-3是用中心投影法绘出的厂房建筑透视图。在机械工程中很少应用。

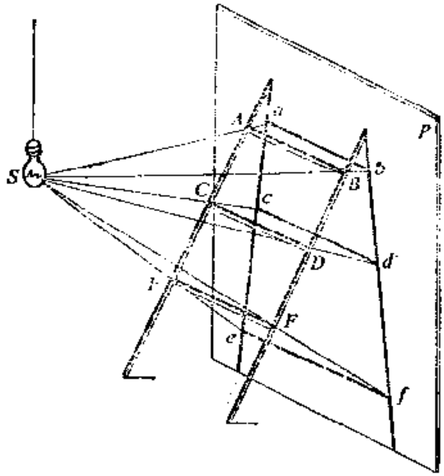


图 1-2

（二）平行投影法

1. 如果将投射中心S移至无穷远处，则投射线互相平行。此时，空间几何形体在投影面上也同样得到一个投影图形，这种投影法称为平行投影法。当互相平行的投射线对投

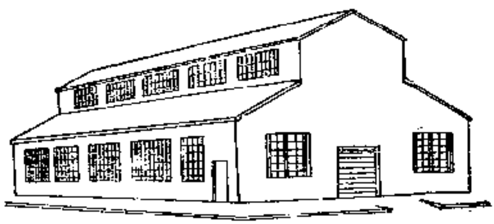
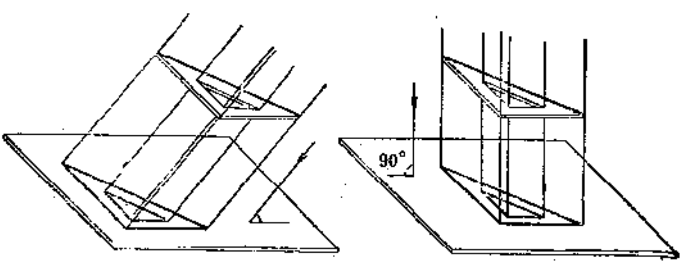


图 1-3



a）　b）

图 1-4

影面倾斜时，称为斜角投影法(图 1-4 a)。当互相平行的投射线对投影面垂直时，称为直角投影法（图 1-4 b)。直角投影法也叫正投影法。

2. 平行投影的基本定理

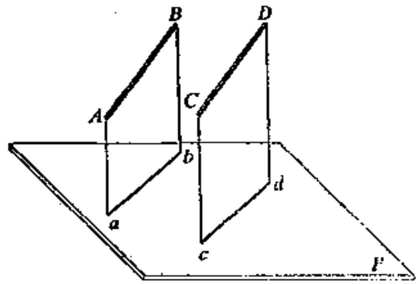


图 1-5

定理 1：平行两直线的同面投影仍互相平行（图1-5)。设已知$AB \parallel CD$,则必有$ab \parallel cd$。

定理 2：直线上的点，其投影仍在该直线的投影上（图1-6 a)。设已知点G在直线EF上，则G点在P面上的投影g必在直线的同面投影ef上。

定理 3：点分割线段之比，其投影仍保持不变，即$EG:GF = eg:gf$（图 1-6 b)。

证明：

过E、G点分别作$EG_1 \parallel eg$；$GF_1 \parallel gf$，则$\triangle EGG_1 \backsim \triangle GFF_1$，所以$EG:GF = EG_1:GF_1 = eg:gf$。

证毕。

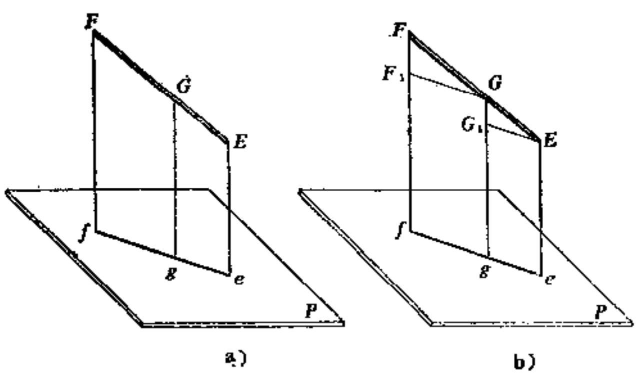


图 1-6

定理4：若一直线段平行于投影面P，则该线段在此投影面上的投影等于线段的实长（图1-7），即$AB /\!/ P$面，则$AB=ab$。

上述四个基本定理是绘制投影图象和读投影图象的基本依据。

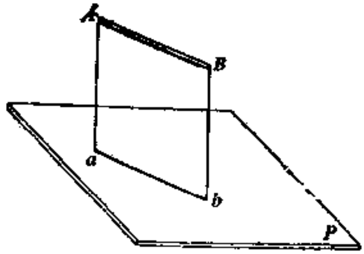


图 1-7

二、正投影法

1. 在工程上用的投影图，必须能够确切地唯一地反映出空间的几何关系。前面只说明了空间几何元素在投射方向确定时，在投影面上存在着一一对应的投影关系。反过来，只凭一个投影，不能反映唯一的空间情况。例如，图1-8a）位于投射线上的点A_1，A_2，A_3，……其投影都是点a，再如图1-8b），投影面上的图象所表示的可能是几何形体Ⅰ，也可能是几何形体Ⅱ，还可能是其他的几何形体。

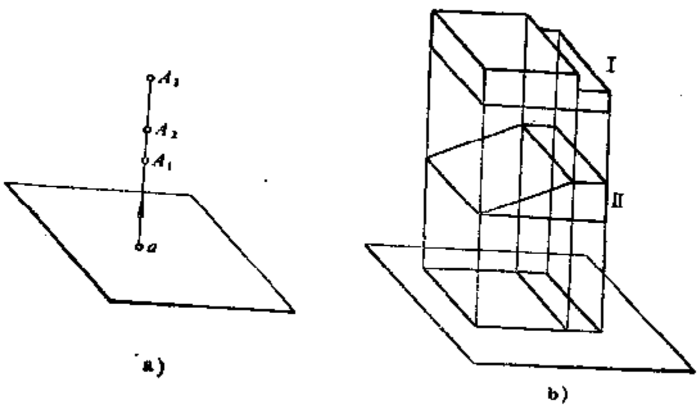


图 1-8

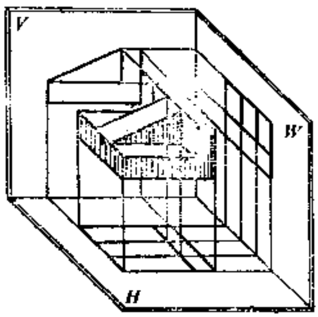
为了使投影图象能确切地唯一地反映空间的几何关系，还需要再加一些补充条件和规定。因此，在工程上根据不同的用途和

要求分别作了一些专门的规定，相应地形成了若干投影方法，如正投影法、轴测投影法、标高投影法和透视投影法等等。在机械制造业中用得最广泛的是正投影法，本书后续各章不作说明时，均指正投影法。

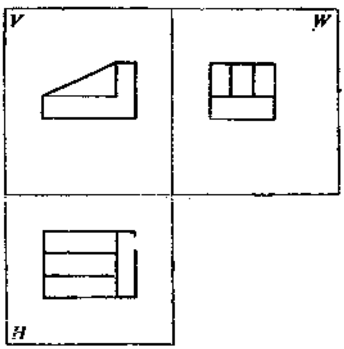
2. 正投影法是一种多面投影，它采用相互垂直的两个或两个以上的投影面，在每个投影面上分别用直角投影获得几何元素或几何形体的投影图象。由这些投影图象便能完全确定该几何元素或几何形体的空间位置和形状。

图 1-9 是几何形体的正投影图。

用正投影法时，常将几何形体的主要平面放置成与相应的投影面相互平行。这样，在该投影面上所画出的投影图象能反映出这些平面图形的实形。因此，从图上可以直接度量出空间几何形体的许多尺寸。也就是说正投影图有很好的度量性，而且正画投影图也较简便。虽然正投影图的立体感不足，即直观性较差，但由于前述突出的优点，在机械制造行业和其他许多工程部门中被广泛采用。



a)



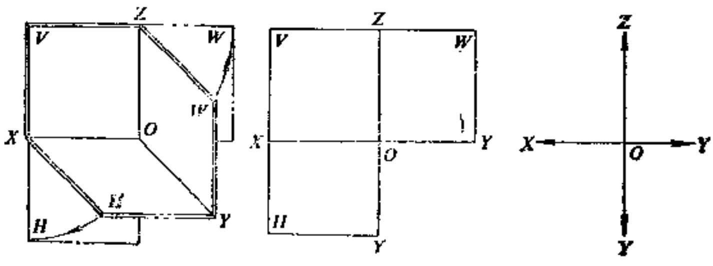
b)

图 1-9

第二章 三投影面体系和空间直角坐标系

一、三投影面体系和空间直角坐标系

见图 2-1 a)，由互相垂直的水平投影面 H、正立投影面 V 和侧立投影面 W 组成三投影面体系。三个投影面两两相交的三条交线称为投影轴。三根投影轴构成空间互相垂直的 O-XYZ 直角坐标系。V 面与 H 面的交线为 OX 轴，V 面与 W 面的交线为 OZ 轴，H 面与 W 面的交线为 OY 轴，三个坐标轴交于一点为原点 O。这三个坐标轴中每两个坐标轴确定一个坐标面，V 面为 XOZ 坐标面，W 面为 YOZ 坐标面，H 面为 XOY 坐标面。

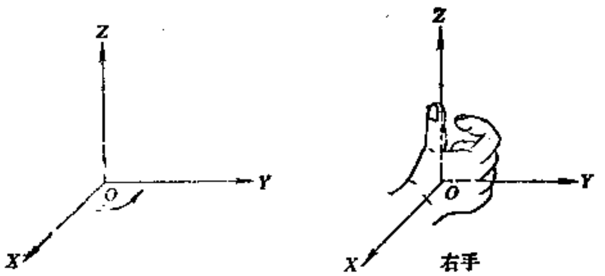


a)　　b)　　c)

图 2-1

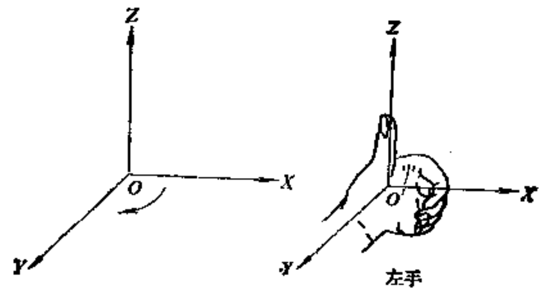
在图 2-1 中，设 V 面不动，H 面和 W 面分别绕投影轴 OX 和 OZ 按箭头方向转 90° 和 V 面展平成为一个平面（图 2-1 b）。当三个坐标面展平时，投影轴 OY 分为两处。且规定（图 2-1 c）：X 轴向左为正，Y 轴向下或向右为正，Z 轴向上为正。在工程制图中采用第一角或第三角绘制的投影图都符合右手坐标系⊖。所以由投影图推导出的计算公式具有普遍意义。

⊖ 在空间解析几何中规定：经过空间内一点 O，作三条互相垂直的有向直曲 OX，OY，OZ，如注图 1 所示，以右手拇指直立表示 OZ 方向，将指掌弯动成弧形，由指掌到指尖的转动方向将是 OX 轴经过最短路移到 OY 的转方线向，则 $\angle XOY$ 为正角，这种排列顺序叫做右手系。



注图 1

反之，如注图2所示，以左手拇指直立表示 OZ 方向，将指掌弯成弧形，由指掌到指尖的转动方向将是 OX 轴经过最短路径到 OY 的转动方向。这种排列顺序叫做左手系。



注图 2

二、点在三投影面体系中的投影和坐标

图2-2 a）是空间点A进行投影的立体图。空间A点在正立投影面V（XOZ 坐标面）上的投影用a'表示，在侧立投影面W（YOZ 坐标面）上的投影用a''表示，在水平投影面H（XOY 坐标面）上的投影用a表示。图2-2 b）是点A的投影图。由投影a、a'、a''完全可以确定点A的空间位置。点A的空间位置用投影表示时可写成$A(a, a', a'')$，如用坐标表示时可写成$A(x, y, z)$。

（一）投影连线的性质

投影图2-2 b）上的细实线aa'，$a'a''$等称为投影连线。图

为，图 2-2 a）上的投射线 $Aa' \perp V$ 面，$Aa \perp H$ 面，Aa'和Aa构成平面 $Aa'a_x a$，它必垂直于V面和H面的交线 OX 轴，即 $a'a_x \perp OX$，$aa_x \perp OX$，当 a 跟着H面旋转而与V面重合时，$aa_x \perp OX$的关系不变。因此，$aa' \perp OX$ 轴，同理 $a'a'' \perp OZ$ 轴。

由空间关系知：点 A 的水平投影 a 到OX 轴的距离等于该点到V面的垂直距离，也等于侧面投影 a'' 到 OZ 轴的距离，即 $Aa' = aa_x = a''a_z$。图中表示点 A 在V面的前方。点 A 的正面投影 a' 到 OX 轴的距离等于该点到H面的垂直距离，也等于侧面投影 a'' 到 OY 轴的距离，即 $Aa = a'a_x = a''a_y$。图中点 A 在H面的上方。由投影图还可以看出，$a'a_z = aa_y = Aa''$，表示了点 A 到W面的垂直距离。图中点 A 在W面的左方。

这个投影关系是绘制空间几何元素的投影图时都必须保持的基本关系。这个关系说明了空间一点和投影面及投影轴的相对位置，可以直接在投影图上用已确定的线段来测定。测定时须注意绘图的比例尺。

（二）点的三面投影和直角坐标

投影轴可看作是空间直角坐标系的坐标轴 X、Y、Z，轴的相应坐标单位为 i、j、k，我们就可以根据已知的一点的投影确定该点在直角坐标系中的坐标，或者相反。在投影图上可用坐标 x、y、z 定出点 A 的三面投影 a、a'、a'' 的位置，其对应关系如下（图2-3）：

$$x \cdot i = Oa_x = Aa'' = aa_y = a'a_z$$

$$y \cdot j = Oa_y = Aa' = aa_x = a''a_z$$

$$z \cdot k = Oa_z = Aa = a'a_x = a''a_y$$

由投影图可知，在坐标面上的点有一个坐标等于 0，在坐标轴上的点有两个坐标等于 0。例如图2-4，B 点在V面上，B 与 b' 重合为一点 $B(b')$，由 x、z 坐标确定，写成 $B(x, 0, z)$。又如，点 C 在 Y 轴上，水平投影 c 和侧面投影 c'' 都在 OY 轴上，由 y 坐标确定，写成 $C(O, O, y)$。正面投影 c' 在坐标原点O处。

确定空间点 A 需要有三个坐标（x，y，z），由投影图中看

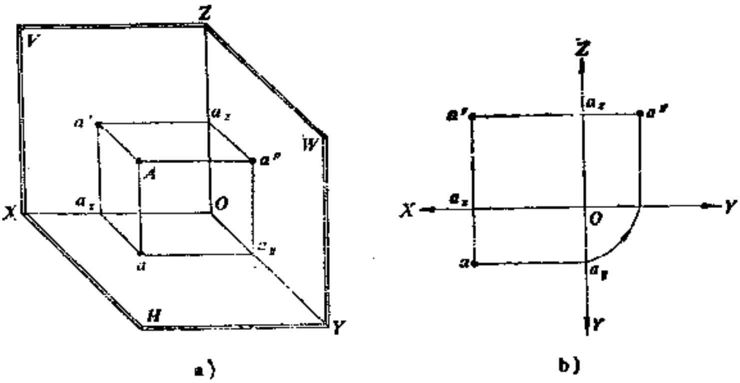

Z
V
W
a'
a_z
A
a"
a_x
O
X
a_y
a
H
Y
a)
Z
a_z
a'
a"
a_x
X
O
Y
a
a_y
Y
b)

图 2-2

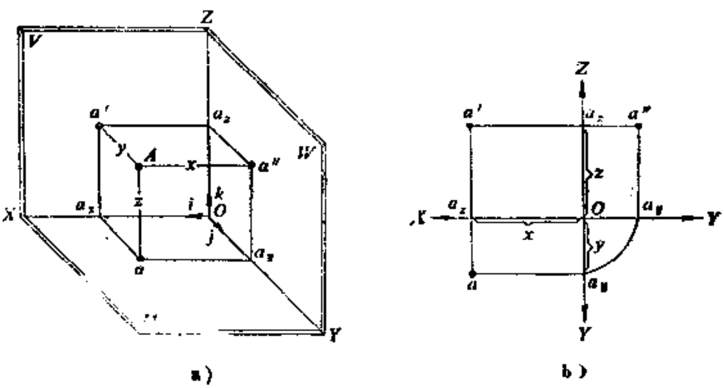

Z
V
W
a'
a_z
y
A
x
a"
k
z
i
O
X
a_x
j
a_y
a
Y
a)
Z
a'
a_z
a"
z
a_x
O
a_y
X
Y
x
y
a
a_y
Y
b)

图 2-3

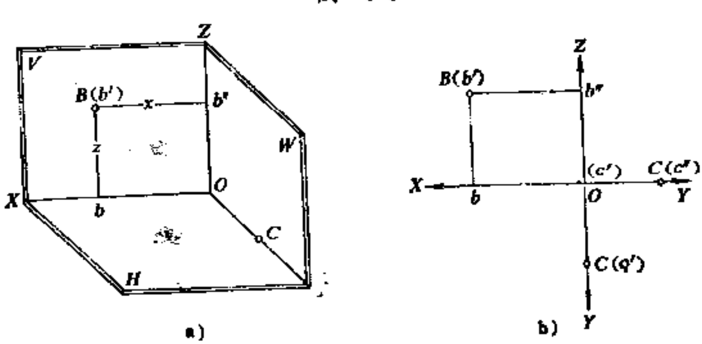

Z
V
B(b')
x
b"
z
W
O
X
b
C
H
a)
Z
B(b')
b"
(c')
C(c")
X
b
O
Y
C(q')
Y
b)

图 2-4

出，已知点的任意两个投影，就给出了点的三个坐标值。也就是说，两个投影就唯一地确定了空间点的位置。因此，可以根据给定的两个投影求出第三个投影。

坐标面和坐标轴上的点，其投影特征如下：

点所在的坐标面	XOY(H面)	XOZ(V面)	YOZ(W面)
特征	$z=0$	$y=0$	$x=0$

点所在的坐标轴	OX轴	OY轴	OZ轴
特征	$y=z=0$	$z=x=0$	$x=y=0$

例2-1 已知空间点D的坐标为$D(15, 12, 8)$，试作其投影图。

解：

见图2-5，由坐标原点O向左沿OX轴量取15得d_x，过d_x作OX轴的垂线，自d_x向下量取12处确定水平投影d，自d_x向上量取8处确定正面投影d'。利用正面投影d'和水平投影d可以求出侧面投影d''。即过d'作水平线与OZ轴交于d_z，量取$d_zd''=dd_x=12$定出侧面投影d''。

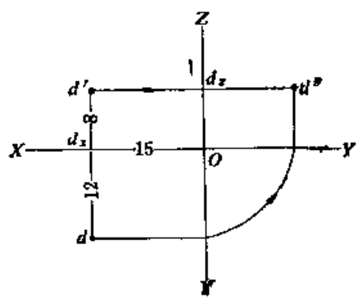


图 2-5

由画D点的三面投影过程中看出：如已知点的两个投影，则其第三个投影可以用作图法求出。有时为了简化作图可只画出它的两个投影，即正面投影和水平投影。

（三）空间的挂角与坐标

三个坐标平面把空间分成八个部分，称为八个卦角，用大写罗马数字表示，见图2-6 a）。将投影面展平成一个平面时其坐标符号见图2-6 b）。

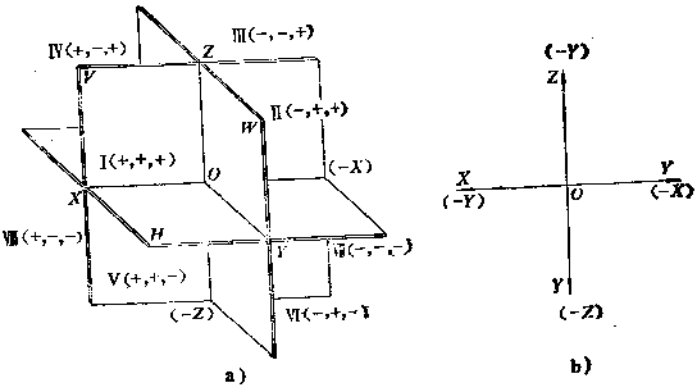


图 2-6

如空间点A分别处于八个卦角内（不在坐标面上），它的三面投影和坐标符号见图 2-7。根据它们的坐标符号就可以确定 它们所在的卦角。

由图 2-7 看出：空间点A在Ⅰ、Ⅶ卦角内的三个投影展平后没有重叠在一起的现象，其余各卦角都有可能产生不同程度的重叠。为了使几何形体图示清楚，只有Ⅰ、Ⅶ卦角适用。因此，在工程制图中的投影图形有两种绘制方法，一种是采用第Ⅰ卦角投影，它的投影方法是：人—物—投影面。另一种是采用第Ⅶ卦角投影（也叫第三角投影），它的投影方法是：人—投影面（假想它是透明的）—物。

应该指出，本书为阐述形与数的对应关系，卦角的划分采用空间解析几何学中常用的分法，它与画法几何书中传统的划分方法不同。但画法几何主要用Ⅰ、Ⅶ卦角进行图示，与空间解析几何的Ⅰ、Ⅶ卦角的坐标符号完全一致。所以根据投影图形推导出的计算公式也具有普遍意义。

本书只讨论第Ⅰ卦角的投影，第Ⅶ卦角的投影，原理是一样的。

例2-2 已知点B（6，3，5）求相对于V面与其对称的点

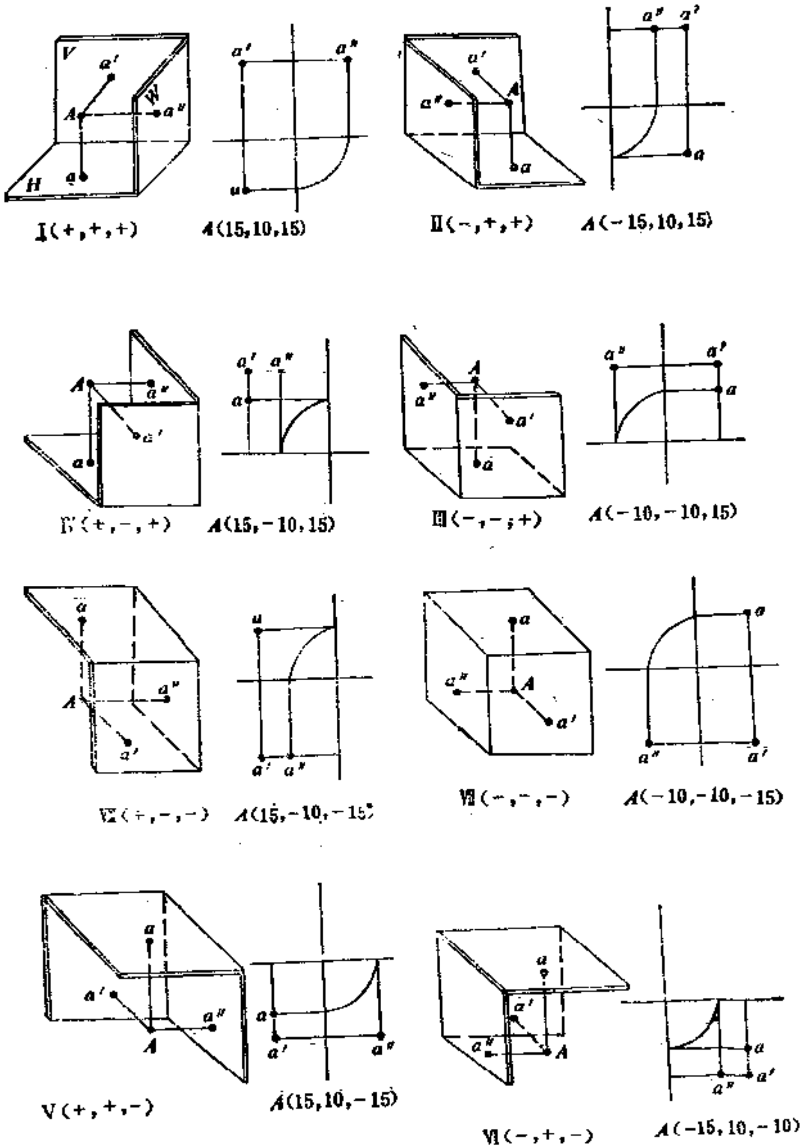

Ⅰ(+,+,+)
A(15,10,15)
Ⅱ(−,+,+)
A(−15,10,15)
Ⅳ(+,−,+)
A(15,−10,15)
Ⅲ(−,−,+)
A(−10,−10,15)
Ⅷ(+,−,−)
A(15,−10,−15)
Ⅶ(−,−,−)
A(−10,−10,−15)
Ⅴ(+,+,−)
A(15,10,−15)
Ⅵ(−,+,−)
A(−15,10,−10)

图 2-7

A的坐标值和画出三面投影。

解：

由给定点B的坐标知，B点在第Ⅰ卦角，与B点对于V面对称的点A应该处于第Ⅳ卦角内，其坐标为A（6，－3，5）。

根据B、A两点的坐标值绘制的三面投影图见图2-8，B、A两点的正面投影b'，a'重合，水平投影b与a对OX轴对称，侧面投影b''与a''对OZ轴对称。A点的三个投影所在的坐标面展平后都重合在XOZ坐标面上。

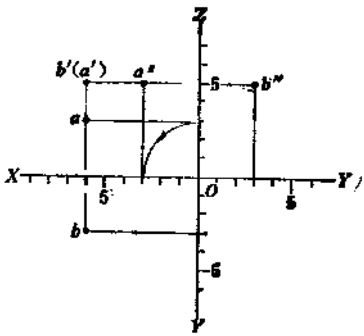


图 2-8

（四）两点间的距离

已知两点$P_1(x_1, y_1, z_1)$和$P_2(x_2, y_2, z_2)$，两点之间的距离公式

$$d=\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (2\text{-}1)$$

证明：

见图2-9，经过点P_1，作三个平面分别平行于三个坐标面，且和坐标轴OX、OY、OZ依次交于$A_1(x_1, 0, 0)$，$B_1(0, y_1, 0)$，$C_1(0, 0, z_1)$；再经过点P_2作三个平面分别平行于三个坐标面且和坐标轴依次交于$A_2(x_2, 0, 0)$，$B_2(0, y_2, 0)$，$C_2(0, 0, z_2)$，这六个平面构成一个长方体，它的三个边长分别是

$$a=|x_2-x_1|,\quad b=|y_2-y_1|,\quad c=|z_2-z_1|$$

由勾股定理知

$$\overline{P_1P_2}=d$$

$$d^2=a^2+b^2+c^2$$

即

$$\overline{P_1P_2} = d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

证毕。

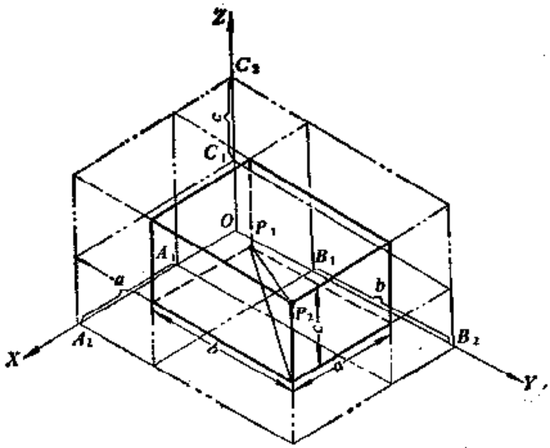


图 2-9

三、辅助投影面的建立和点的辅助投影

在解一些图解问题时，由于在投影面H、V、W上难于用简单的几何图线（直线、圆）作出，这时经常使空间几何元素的位置保持不变，用新的投影面来代替旧的投影面，使空间几何元素对新投影面的相对位置变成有利于解题的位置，然后找出其在新投影面上的投影。这个新投影面叫做辅助投影面，在辅助投影面上的投影叫做辅助投影。用辅助投影面解题的方法也叫做更换投影面法。它是画法几何学中图解空间几何问题的主要方法之一。

见图 2-10，作投影面V_1垂直于原投影面H，使形成新的投影面体系V_1/H。注意，更换投影面时，投射线的方向也要随之变化，应垂直于V_1面。新投影面V_1与原投影面H的交线O_1X_1为新投影轴。H面不动，将V_1面沿图示箭头方向展平成一个平面。