组合学导引

〔美〕R. A. Brualdi 著

李盘林 王天明 译

4	9	2
3	5	7
8	1	6

华中工学院出版社

组合学导引

R.A.勃鲁奥狄 著

李盘林　王天明 译

华中工学院出版社

内 容 简 介

R.A.Brualdi《组合学导引》一书，介绍了组合数学的基本内容及其应用．论证严谨，叙述详尽，通俗易懂．书中附有不同难度的习题500道，并附有答案．可供理工科大学师生，工程技术人员，中学教师以及数学爱好者阅读．

Richard A Brualdi
Introductory Combinatorics
1977 by Elsevier North-Holland, Inc.

组合学导引

李盘林 王天明 译

责任编辑 程德邻

*

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

湖北省新华书店发行 各地新华书店经售

武汉市江汉印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：12.5 字数：286,000

1982年12月第一版 1982年12月第一次印刷

印数：1－10,000

书号：13255—005 定价：1.35元

前　　言

最近几年来，我在威斯康星—麦迪逊大学每年讲授一次名为“组合学导引”的课程，本书就是它的直接产物。由于在数学中和在应用中组合方法的重要性不断增长，并考虑到掌握这种方法需要一种正规的数学训练，我认为有必要开设一门组合学的基础课程。最初在数学系开出了这门课，随后也被列为计算机科学系和统计系的课程。这样一来，在威斯康星—麦迪逊大学里，这门课无论是作为数学系或计算机科学系的课程，还是作为统计系的课程，学生都可得到学分。本课程需要两个学期的微积分学作为预备知识，尽管使用到微积分不多（明显的例外是在讨论生成函数的第七章中用到了幂级数；在讨论二项式系数的第四章中，有两个例子用到微分和积分来导出一些恒等式）。具备这些预备知识就使得学生具有一定足够的数学论证的能力；而不要求多于两个学期的原因乃是我希望吸引一些学习其它学科的学生，在这些学科中组合学的思想和方法日益变得有用。因此，我在讲授这门课程时，有诸如学习语言学、生物学和电子工程学的学生来听课。许多学生在中等教育阶段是主修数学的。在我看来，组合学这样一门课程，对于未来的高中数学教师是十分需要的，因为在人们的早期数学训练中，许多组合观念是可以接受的。我相信组合学课程也是一种理想的工具，它以通俗的方式表明数学的激发力、魅力和活力以及它在外部世界的用途。我在威斯康星大学讲授的这门课是为大学生开的，但在我的班上也有一些计算机科学和统计学的研究

生.

本书的内容作为一个学期的大学课程来说是多了一些. 最近一次我在麦迪逊讲授这门课程，包括第一章到第十章的全部内容以及第十一章一部分（直到平面图的五色定理的证明），但是回想起来，在这样短促的时间里，这些内容的确是太多了. 要更适合一个学期的课程，应当是第一章到第七章（若时间不够可略去第七章），其次是第八、九及十章中挑选两章. 如果时间充裕，可以从第十一章和第十二章选些专题. 对于更为从容的两学期的课程，第一学期可以讲授第一章到第八章，第二学期讲授第九章到第十二章. 各章说明如下：第一章到第七章构成一个系统并且应依次讲授. 第八章本身是一个单元，尽管该章所处理的一般问题在1.1节已经介绍了. 同样,第九章除了1.5节是它的引论以及在证明定理9.3.3中用到第八章中的定理8.1.1外，也是一个独立的单元. 9.1节还讨论了有限域，包括用多项式环构造的有限域. 可以把有限域的讨论只限于模p（p为素数）的整数域，因而第九章后面各节用到的有限域也只限于这种域. 第十和十一章又形成一个独立的部分，也应依次讲授. 在1.4节讨论的正是第十一章处理的问题之一（四色问题），在1.6节讨论的问题是第十章处理的问题之一(最短路问题).对于第十二章进行分类是有点困难的.12.1和12.2节本质上不依赖于前面的任何内容. 12.3和12.4节形成一个独立的单元，并且包含了第八章中处理的配偶问题作为特例. 12.5节也自成一个独立的单元并推广了配偶问题.

本书约有500道练习题，它们是本书的一个重要部分. 为了充分领会这些内容，认真的学生应当尽力解答大量问题.如果学生不能应用这些思想和方法，那么他们就不能有很大的进步. 少数练习用星号标出，据著者看来，这些练习比其它的有

更高的水平．许多练习是例行的练习；不少练习是比较难的，但也不是深不可测的。

我要对我的学生们表示谢意，他们使用过本书较早的原稿并善意地指出一些错误；我非常感谢Margaret Higbie，她在本书的整理和形成期间给予我鼓励；我同样感谢 Elsevier North-Holland全体人员以他们的能力和业务使得本书顺利出版。我也感谢 Herbert J.Ryser，正是他首先引导我去研究组合学。

Richard A.Brualdi

1977年2月于法国巴黎

目　　录

第一章　什么是组合学

如果本书的读者从未算过组合问题，那倒是会令人感到意外。你可曾计算或考虑过下列一些问题：如果 n 个队进行比赛（每个队仅与其它各队比赛一次），总共应比赛多少次？怎样构造幻方？怎样使铅笔不离纸面且不重复地描出网络图？为了确定对付"福尔豪斯"① 应该如何下赌注，试计算牌型是福尔豪斯的个数是多少？这些问题都是组合问题。正如这些问题所显示的那样，组合学发源于数学消遣和游戏。无论是为了消遣还是由于它们的美学兴趣，过去所研究过的许多问题对于当代的纯粹科学或应用科学都是非常重要的。当代的组合学是数学中非常重要的一个分支，并且它的影响正在迅速扩大。在过去十年里，组合学迅猛发展的一个原因就是计算机已经并且继续地对我们的社会产生巨大的影响。由于计算机闪电般的速度，它已经能够解决以前不敢设想的大规模的问题。但是，计算机没有自主的功能，还需要进行程序设计。这些程序的基础，往往由解决这些问题的组合算法所组成。组合学发展的另一个原因在于它可用于一些以前与数学没有多大关联的学科。我们发现组合学的思想和方法不仅用于数学应用的传统领域即物理科学，而且也用于社会科学和生物学。

组合学所研究的就是一组事物安排成各种各样模式的问题。有两类问题经常出现：

---

①译者注——一种扑克游戏，每个参加者发给五张牌，福尔豪斯(full house)是指一种牌型，这种牌型有三张牌同点数，另外两张牌也同点数。以后凡译者注均用①标出，原书的注解则用 1) 标出。

（ i ）**安排的存在性**　要把一组事物进行安排，使之满足某些条件．当能否这样安排不是那么明显时，就需要讨论存在问题．如果一种安排不总是可能的，那么在怎样的（必要和充分的）条件下，才能使所希望的安排办得到．

（ ii ）**安排的计数和分类**　如果某种安排是可能的．可以用许多方式来完成，人们可能要求计算这些方式的个数或者把它们进行分类．

虽然对任何组合问题都可以考虑它的存在和计数，但在实际上常常发生这样的情况：如果存在问题还需要进行深入的研究，那么计数问题就是难于处理的．不过，如果某种安排的存在比较明显时，就有可能计算出完成这种安排的方法的数目．在一些特殊的情况下（当它们的数目很小时），可以把全部安排列举出来．因此，许多组合问题的形式是："安排……是可能的吗？"或"……存在吗？"或"有多少种方法可以……？"或"计算……的数目"．

与（ i ）连同出现的第三个组合问题是

（ iii ）**研究一个已知的安排**　在人们已经构造出了（可能是困难的）满足一定条件的安排之后，那么就可以研究这种安排的性质和结构了．这样的结构可能涉及分类问题（ ii ）并且也可能牵涉到潜在的应用．

更一般地来说，组合学与离散结构和关系的分析有关．

对于验证一些发现，数学归纳法是组合学的主要工具之一．归纳法常常是有效的方法，尤其在组合学中更是如此．用数学归纳法来证明一个较强的结论往往比证明一个较弱的结论要来得容易些．尽管在归纳论证中需要更多的验证，可是归纳假设却比较强．

可是，一般来说，解决组合问题需要特殊的方法．通常我

们不能只借助于已知的结果或公理，必须研究情况，增长见识，用自己的聪明才智去解决问题．我决不是说没有任何一般原理或方法可以应用．容斥原理、所谓鸽笼原理、递归关系以及生成函数的方法等等都是一般原理和方法，在后面一些章节我将要讨论这些原理和方法．不过，我们常常会看到，即使用这些原理和方法，仍需要巧妙地应用它们．在解决组合问题时经验是极为重要的．

为了明白上述讨论的意思，我们现在转到组合问题的几个例子．这些例子从解决比较简单（但其解决却需要机智）的问题入手，将引伸出组合学的一些重大成果．

1.1 例 棋盘的完全覆盖

考虑一个普通的棋盘，它有8行和8列，总共分成64个方格．假定有一批形状相同的多米诺骨牌，每块骨牌恰好覆盖棋盘的两个相邻的方格．在棋盘上放置32块多米诺骨牌，使得任何两块骨牌都不重叠，每块骨牌都覆盖两个方格，能不能把棋盘的所有方格都覆盖住呢？我们称这种放置为用多米诺骨牌完全覆盖棋盘．这是一个容易的安排问题，人们可以很快地作出许多不同的完全覆盖．要计算不同的完全覆盖的个数虽然是困难的，但是仍可以算出来．在1961年，M.E.Fischer[1]发现这个数是$12,988,816=2^4\times(901)^2$．我们可以用一个有$m$行$n$列、$mn$个方格的更一般的棋盘来代替普通的棋盘．此时完全覆盖就未必存在．的确，对于3×3的棋盘就不能完全覆盖．

1) Statistical Mechanics of Dimers on a Plane Lattice, *Physical Review*, 124(1961), 1664—1672.

对于m和n的哪些值，$m\times n$的棋盘有完全覆盖呢？不难看到，一个$m\times n$的棋盘有完全覆盖的充分必要条件是m和n至少有一个是偶数，换句话说，棋盘中的方格的个数是偶数．对于$m\times n$的棋盘的不同的完全覆盖的数目，Fischer 已经推导出一个含有三角函数的一般公式．这个问题等价于分子物理学中著名的所谓二聚物问题．它起源于表面上双原子的分子（二聚物）吸收作用的研究．棋盘上的方格相当于分子，而多米诺骨牌相当于二聚物．

再考虑一个 8×8 棋盘，并且用剪刀剪掉对角上两个方格．能不能放置31块多米诺骨牌把这个残缺的棋盘完全覆盖呢？虽然这个残缺棋盘和 8×8 棋盘差不多，可是 8×8 棋盘有一千二百多万个完全覆盖，而这个残缺棋盘却没有完全覆盖．这个结论的证明十分简单，但却是用组合论证的一个出色的例子．在普通的 8×8 棋盘上的方格都是黑白交替着色的，共有32个黑色方格和32个白色方格．如果我们剪掉对角上的两个方格，我们就剪掉了两个同样颜色的方格，比方说是白色的．这样就剩下32个黑色方格和30个白色方格．但是每一块多米诺骨牌覆盖一个黑色方格和一个白色方格，因此31块多米诺骨牌必定覆盖棋盘上31个黑色方格和31个白色方格．所以这个残缺棋盘没有完全覆盖．

更一般地说，可以取一个黑白交替着色的$m\times n$棋盘，并且任意剪掉若干方格．什么样的残缺棋盘有完全覆盖呢？根据上面的论证可知，残缺棋盘具有完全覆盖的必要条件是黑白方格的个数相同．不过，如图 1.1 所示（图中W表示白，B表示黑），这个条件并不是充分条件．

于是自然要问，残缺棋盘具有完全覆盖的必要充分条件是什么？我们将在第八章回到这一问题上来，并且利用相异代表

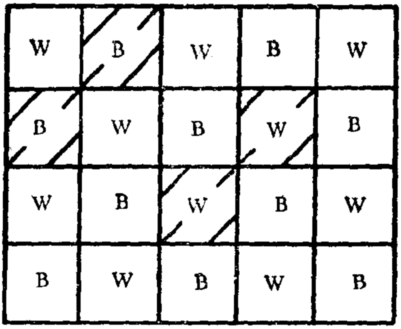

图1.1

组的理论给出完整的解答．在那一章里，我们把这个问题具体解释为把一批工作分配给胜任的申请人．

1.2 例 切割立方体

考虑一个边长为 3 呎的立方体的木块，要把它切割成27个边长为 1 呎的小立方体．问最小的切割次数是多少？切割这个立方体的一种方法是在每个方向都切割 2 次，共切割 6 次，切割时立方体始终保持为一块，如图1.2所示．如果在两次切割之间可以重新堆叠各个小切块，那么能不能少切割几次呢？例如图 1.3 中，第二次切割的木块数比起在第一次切割后不重新堆叠各小切块时要多．由于每次切割之后小切块的数目以及重新堆叠的方式都增加，看起来这似乎是一个难于分析的问题．

再让我们从另一个角度来看看这个问题．27个小立方体除居中的那一个以外，每个小立方体至少有一面在原来的大立方体的表面上，而居中的那个小立方体每一面都是由切割形成的．因为它有六面，形成它必须有六次切割．这样至少需要切割六次，而且各次切割之间重新堆叠小切块都不能减少这六次

必要的切割精力。旺盛的学生也许会去探求只用6次切割把立方体切割成27个小立方体的不同的切割方法的数目。

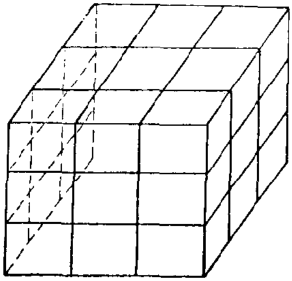

图1.2

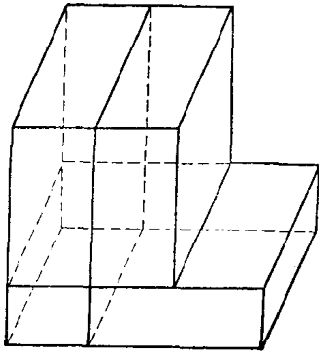

图1.3

1.3 例 幻 方

幻方是一种最古老和最流行的数学游戏。n阶幻方就是把整数1，2，3，…，n^2排列$n\times n$阵列，使得每行中的各数之和、每列中的各数之和以及两条对角线中的各数之和都是同一个数S。数S称为幻方的幻和。3阶和4阶幻方的例子是

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (1.3.1)$$

它们的幻和分别为15和34。在中世纪对幻方有某种神秘观念，人们佩带着幻方以防邪避凶。Benjamin Franklin是一位幻方迷，在他的一些论文中包含有许多有趣的例子。

在n阶幻方中所有整数之和是$1+2+3+\cdots+n^2$，由算术级

数的求和公式可知这个和为$n^2(n^2+1)/2$。由于n阶幻方有n行且每行和数为S，因此有关系$nS=n^2(n^2+1)/2$。于是任何两个n阶幻方有同样的幻和，即$S=n(n^2+1)/2$。组合学问题就是确定n取哪些值时存在n阶幻方，并找出构造它的一般方法。不难证明2阶幻方是不存在的（倘若存在的话，幻和必定是5）。不过，n取其它的数值时，n阶幻方是可以构造的。有许多构造幻方的特殊方法。这里我们叙述当n为奇数时构造n阶幻方的方法，这个方法是de la Loubère在十七世纪发现的。首先把1放在顶行正中间的方格上，然后把后继的整数按自然顺序放置在右上斜的对角线上并且作如下的修改：

（i）当到达顶行时，下一个整数放在底行，好象它在顶行的上面；

（ii）当到达右端列时，下一个整数放在左端列，好象它是紧靠右端列的右方；

（iii）当到达的方格已经填上数码或到达右上角的方格时，下一个整数就放在刚填写数码的方格正下方的方格中。

（1.3.1）的3阶幻方就是用Loubère方法构造的，下面的5阶幻方也是用这个方法构造的：

$$\begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix}. \tag{1.3.2}$$

阶数为非2的偶数的幻方的构造方法以及奇数阶幻方的其它构造方法可以在W.W.Rouse Ball著、H.S.M.Coxeter校的