

时域逼近

刘亚康 编

高等教育出版社

(京)112号

内 容 提 要

“逼近”问题不仅是网络综合的一个重要分支,也是信号理论的一个组成部分。本书在常用的对频域网络函数进行逼近的基础上,全面的介绍了在时域中逼近网络函数的各种准则,理论和方法。把经典的以数学分析为基础的网络函数逼近扩展到利用计算机进行优化逼近,把常用的连续时间函数逼近扩展到带有现代气息的以数字信号处理方法有关的信号和系统的逼近。

本书可作为大专院校中网络理论和信号处理领域的高年级本科生和研究生教学参考书,也可供这些领域中的工程技术人员参考阅读。

责任编辑 王忠民

时 域 逼 近

刘亚康 编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 8.5 字数 200 000

1993 年 7 月第 1 版 1993 年 7 月第 1 次印刷

印数 00001—2 001

ISBN7-04-00 2957-X/TM·152

定价 5.45 元

前 言

“时域逼近”是网络理论、系统理论的一个重要分支。

网络理论是一门比较基础,同时又比较完善的学科。早在本世纪初,从瓦格纳尔(Wagner)和坎普贝尔(Compbell)提出无源滤波器的概念起,针对滤波器这样的电气网络的分析、设计,进行了大量的理论和实践的探讨、总结和推广,以致对于无源、线性、集总参数的电气网络的研究达到了理论严谨完备,应用方便可靠的阶段。滤波器这一概念也从原始的针对通过一些频率成份的信号,抑制不需要的频率成份的这一机制,拓宽到完成滤波、平滑、内插、成形、预测等多种功能的统称。网络理论已经突破了旧有的以无源、线性、集总参数的 RLC 网络为中心的理论,扩展到以方框图、数学模型的形式出现的系统理论、信号理论。网络函数的综合和逼近已扩展到对信号本身的综合和逼近。

时域逼近涉及到对信号、网络和系统特性在物理实现条件下的数学逼近。它的目的是从时域特性上来逼近网络函数、系统函数以及对信号进行模型逼近。

过去,逼近理论是指以数学分析的方法用有理函数对网络函数进行逼近。我们把这一问题称为经典的逼近理论。随着微电子技术、计算机及计算技术的飞速发展,逼近技术已进入了一个新的境地。在这一领域中,网络函数的计算机辅助优化设计,物理信号的模型逼近成为了逼近课题的新的探讨方向和应用课题的解决方法。可以说,后者已经具备称为现代逼近理论与方法的资格。虽然目前技术界尚未有这样的提法和归类。我想,这样的提法和归类不是没有道理的。

本书在内容上仍然包括所谓经典和现代两大类时域的逼近问题。讨论有关在时域中逼近的有关数学基础和具体的逼近方法。本书共分七章,第一章是经典逼近的一些理论基础,它包括对频域中一些典型逼近准则和方法的回顾。第二章简述了在时域逼近中所要涉及到的一些数学基础知识和公式,术语。第三章到第五章重点介绍经典逼近理论中以时域特性为目标的逼近方法和理论。第六章讨论现代逼近理论中的计算机优化设计方法,逼近的目标函数是时域函数。第七章讨论现代逼近理论中对信号进行模型逼近问题。这里分析的对象是各种物理系统产生的时序信号。对这些信号进行模型逼近在当前的应用中具有重要的意义。

本书适宜于本科大学高年级学生和研究生基础课程使用,也适合有关工程技术人员自学阅读。这些题材的部分,我们曾为电子科技大学本科高年级学生、研究生开出过。当然,为了学好这本书,读者应该具备相应的基础和先选课程。这些知识包括“网络理论”、“信号与系统”、“电路分析基础”,有关计算机原理和语言,以及计算机编程的知识。

电子科技大学张有正教授对本书的撰写给予了极大的支持,并且作为本书的校审,对内容结构、文字、符号使用都提出了宝贵意见,编者在此表示深深谢意。

编 者

1989年7月

目 录

第一章 频域逼近和时域逼近	1
§ 1.1 理想低滤波器的巴特沃斯逼近.....	2
§ 1.2 理想低滤波器的契比雪夫逼近.....	8
§ 1.3 最平时延函数的逼近.....	16
§ 1.4 频域逼近和时域逼近的联系和比较.....	22
第二章 时域逼近的数学基础	25
§ 2.1 数学逼近中的一些准则.....	25
§ 2.2 正交函数逼近.....	27
§ 2.3 帕德(Padé)逼近.....	31
§ 2.4 数据平滑.....	48
习题.....	51
第三章 时域特征函数——网络的冲激响应及其逼近	57
§ 3.1 时域逼近函数及可实现性.....	57
§ 3.2 $h(t)$ 的矩法逼近.....	58
§ 3.3 $h(t)$ 的点匹配法和最小均方误差法逼近.....	63
§ 3.4 用奇异函数来逼近 $h(t)$	72
§ 3.5 用其它基本函数进行逼近.....	78
习题.....	83
第四章 网络函数极点位置的逼近	86
§ 4.1 由频域逼近估计极点位置.....	86
§ 4.2 时域逼近极点位置的点匹配法.....	91
§ 4.3 时域逼近极点位置的最小均方误差法.....	96
§ 4.4 最小均方误差准则的微分方程公式和正交法.....	100
习题.....	112
第五章 网络函数的逼近	113
§ 5.1 点匹配法和最小均方误差法求逼近函数.....	113

§ 5.2	导数匹配法	124
§ 5.3	正交函数法	127
§ 5.4	频域直接逼近法	134
§ 5.5	傅氏级数法	141
§ 5.6	用局部平均平滑函数完成傅氏级数逼近	151
§ 5.7	离散最佳契比雪夫逼近	162
	习题	168
第六章	数字最优化方法在逼近中的应用	170
§ 6.1	概述	170
§ 6.2	最优化的直接搜索法	174
§ 6.3	样步法和单纯形法	186
§ 6.4	最优化的梯度法	191
§ 6.5	网络函数的时域优化设计	205
	习题	212
第七章	信号的模型逼近	214
§ 7.1	概述	214
§ 7.2	直接模型逼近	217
§ 7.3	帕德逼近	220
§ 7.4	近似相匹配法——勃罗依(Prony)法	225
§ 7.5	标准方程的求解	230
§ 7.6	自协方差法的柯列斯基求解法	241
§ 7.7	数字维纳滤波器(wiener)和线性预测模型逼近	248
§ 7.8	全极点模型逼近的鲍格(Burg)迭代法	256
	习题	261

第一章 频域逼近和时域逼近

按照常规、网络理论可以分为网络分析和网络综合两大部分。网络分析是指当网络结构和元件给定后,研究网络的特性,如网络的输入阻抗、反射系数、转移函数或对某些特定的激励信号的响应。网络综合恰恰相反,它是研究要实现某一特定的功能,如网络的阻抗或当在某一特定输入激励下要得到某一输出时,传输网络应该具有什么样的结构和元件值。虽说网络理论的概念已经深化到系统理论、信号理论等应用场合,对于这些领域中问题的研究依然离不开这一划分为两个部分的格局。

网络综合本身又包含了两个方面的课题。一是依照给定的要实现的目标,以数学的方法,建立起网络的数学模型。另一个是按照已建立起的数学模型用物理元件实现它。用网络理论的术语来说,前者称为逼近,后者称为实现。应该指出,网络理论中的逼近不象数学分析中的近似替换,它建立起的数学模型应该受到网络物理模型实现性的限制,这些限制在网络分析中都有充分的论述。这里不再赘述,而仅仅指出,对于一个集总、线性、非时变的网络,其网络函数应该是复频率 s 的有理函数,对于无源网络,其转移函数的极点应在 s 平面的左半平面,其输入阻抗函数的零、极点都应在 s 平面的左半平面。

在许多实际的设计问题中,对网络转移函数特性的要求并非都以有理函数给出,因此用一可实现的有理函数来逼近这一特性是实现设计必不可少的步骤。

从要实现的网络特性来讲,指标可以用频域特性给出,也可以用时域特性给出。虽然一个网络的频域特性和时域特性之间存在

着紧密的联系,但是对于不同的应用场合,有时是以频域特性描述好,有时却又是以时域特性来描述好。在模拟信号的传输和处理中,常常使用频域中的幅度特性,而对于数字信号的传输和处理,传输系统的时域特性,如冲激响应或阶跃响应,却成为更重要的描述了。

在网络特性的逼近中,以往都集中在研究频域的幅度响应的逼近,并且已形成了一套广为人知的逼近方法。对于频域中理想滤波器特性的逼近已经形成了更便于设计的表格。对于时域中逼近,集中的研究却为数不多。主要障碍是不易得到解析的表达式,即使能有解析的解,其计算量也大大超过频域中逼近的方法。但是随着微电子技术、大规模集成电路的发展、高速计算机、处理器(或微处理器)的层出不穷,计算上的复杂性不再成为时域逼近的障碍。

作为逼近的基础,以及让读者更系统地了解逼近问题的诸方面。在这一章中,我们将回顾一下通常的频域逼近方法。并以此揭开时域逼近的面纱。而在以后的几章中,我们再全力倾注于对时域逼近方法的讨论。

§ 1.1 理想低通滤波器的巴特沃斯 (Butterworth)逼近

网络函数的频域逼近的目标是用有理函数 $\hat{H}(j\omega)$ 去逼近所需要的 $H(j\omega)$ 。然而,一般情况下 $H(j\omega)$ 是 ω 的复函数,要完整的逼近它是非常困难的。因此,通常频域逼近的研究仅限于对实数域的逼近。由于

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)} \quad (1.1)$$

$|H(j\omega)|$ 是 $H(j\omega)$ 的幅度, $\varphi(\omega)$ 是 $H(j\omega)$ 的相位,它们分别

是 ω 的实函数。频域逼近中通常对它们中的任意一个进行逼近。不同的应用对滤波器的要求也不一样,大多数滤波器要求具有所需的幅度特性,另一些应用要求具有所需的相位特性。

对于幅度特性函数的逼近,通常有以下的准则。所谓准则是指人们认可的一种合理的标准,这里的准则是指一种合理的近似程度。

若用 $A(\omega^2)$ 表示幅度平方函数 $|H(j\omega)|^2$,众所周知,它是 ω 的偶函数。而用 $\hat{A}(\omega^2)$ 表示对 $|H(j\omega)|^2$ 的逼近。

第一个准则是最大误差最小准则。该准则的含义是在逼近区间 $\omega_a \leq \omega \leq \omega_b$ 内, $A(\omega^2)$ 和 $\hat{A}(\omega^2)$ 的差的最大值最小。其数学表达式为

$$\varepsilon(\omega) = \max(|A(\omega^2) - \hat{A}(\omega^2)|) \quad (1.2)$$

最小。

另一个准则是均方误差最小准则。即

$$\varepsilon(\omega) = \int_{\omega_a}^{\omega_b} |A(\omega^2) - \hat{A}(\omega^2)|^2 d\omega \quad (1.3)$$

最小。

其它还有一种称为台劳逼近的准则也是很常用的。它的意义是要求的网络函数和逼近函数在某一频率 $\omega = \omega_0$ 处的台劳级数展开式中,尽可能多的系数一致。

若 $A(\omega^2)$ 在 $\omega = \omega_0$ 处展开的台劳级数为

$$A(\omega^2) = A(\omega_0^2) + A'(\omega_0^2)(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2!}A''(\omega_0^2)(\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (1.4)$$

逼近函数 $\hat{A}(\omega^2)$ 在 $\omega = \omega_0$ 也展开成台劳级数

$$\hat{A}(\omega^2) = \hat{A}(\omega_0^2) + \hat{A}'(\omega_0^2)(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2!}\hat{A}''(\omega_0^2)(\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (1.5)$$

(1.4)和(1.5)式中若 $(\omega-\omega_0)$ 的各幂次项的系数前面 k 个都相等,则可称 $\hat{A}(\omega^2)$ 是 $A(\omega^2)$ 的 k 阶台劳逼近。

当我们以各种不同的准则去逼近所需网络函数时,便可得到不同的结果。在众多的网络函数特性中,理想的低通滤波特性是应用最普遍、最基本的一种。在频域中对理想低通滤波特性进行逼近,也是逼近问题中最基本的课题。这里我们将重新简述它们。

巴特沃斯逼近实质上是在领域中的台劳逼近。对于一个理想的低通滤波器

$$H_i(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_d} & 0 \leq \frac{|\omega|}{\omega_p} \leq 1 \\ 0 & \frac{|\omega|}{\omega_p} > 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

下标 i 表示理想的意思, t_d 为时延, ω_p 为通带宽度,在逼近问题中常常标称化为1, $A(\omega^2)$ 在通带内为常数1,在通带外为零。在 $\omega=0$ 处理想低通滤波器的台劳级数展开式除常数项为1外,其余各幂次项都为零。另一方面,若选择逼近网络函数为 $\hat{H}(j\omega)$ (或 $\hat{H}(s)$),则有

$$\hat{A}(\omega^2) = |\hat{H}(j\omega)|^2 = \hat{H}(j\omega) \cdot \hat{H}(-j\omega) \quad (1.7)$$

具体地说,巴特沃斯响应是用一特定的网络转移函数 $\hat{H}(s)$ 来逼近(1.6)式的理想特性的幅度。并且,这种网络函数只有极点,而不存在有限平面内的零点。

$$\hat{H}(s) = \frac{1}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_n s^n} \quad (1.8)$$

或

$$\hat{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \cdots + a_n(j\omega)^n}$$

按(1.7)式,(1.8)式的幅度平方函数将为

$$\begin{aligned}\hat{A}(\omega^2) &= |\hat{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{p(\omega^2)} \\ &= \frac{1}{1 + B_1\omega^2 + B_2\omega^4 + \cdots + B_n\omega^{2n}}\end{aligned}\quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}A(\omega^2) - \hat{A}(\omega^2) &= 1 - \frac{1}{p(\omega^2)} \\ &= \frac{B_1\omega^2 + B_2\omega^4 + \cdots + B_n\omega^{2n}}{1 + B_1\omega^2 + B_2\omega^4 + \cdots + B_n\omega^{2n}}\end{aligned}\quad (1.10)$$

令 $x = \omega^2$, (1-10) 式可简写为

$$A(x) - \hat{A}(x) = \frac{B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n}{1 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n} \quad (1.11)$$

$\hat{A}(x)$ 在 $x=0$ 处对 $A(x)$ 的台劳逼近 等效于 $(A(x) - \hat{A}(x))$ 在 $x=0$ 处的台劳展开式的前面若干阶导数应为零。不难求出。

$$\left. \begin{aligned}\frac{d}{dx}[A(x) - \hat{A}(x)]|_{x=0} &= B_1 \\ \frac{d^2}{dx^2}[A(x) - \hat{A}(x)]|_{x=0} &= 2(B_2 - B_1^2) \\ \frac{d^3}{dx^3}[A(x) - \hat{A}(x)]|_{x=0} &= 6(B_3 - 2B_1B_2 - B_1^3) \\ &\vdots\end{aligned}\right\} \quad (1.12)$$

因此有 $B_1 = 0, B_2 = 0, B_3 = 0 \cdots$

对于 n 阶网络函数 $\hat{H}(j\omega)$, 当对理想幅度特性进行 k 阶台劳逼近时 ($k < n$), $\hat{A}(\omega^2)$ 应具有

$$\hat{A}(\omega^2) = \frac{1}{1 + B_{k+1}\omega^{2(k+1)} + \cdots + B_n\omega^{2n}} \quad (1.13)$$

同时也看出, 对 n 阶网络, 最高可能的台劳逼近的阶数为 $(n-1)$, 在这种情况下,

$$\hat{A}(\omega^2) = \frac{1}{1 + B_n\omega^{2n}} \quad (1.14)$$

顺便指出, 上面所说的 $(n-1)$ 阶台劳逼近是指对变量 ω^2 , 当然若

指变量 ω ,最高可能的阶数为 $(2n-1)$ 。在(1.14)式中, B_n 是和通带边沿(宽度)紧紧相关的一个量。如果通带频率标称化为1,则 $B_n=1$ 时,同时意味着 $\omega=1$ 处是半功率点,即

$$\hat{A}(1) = \frac{1}{2} \hat{A}(0) = \frac{1}{2}.$$

(1.14)式就是经常采用的对常数幅度的巴特沃斯逼近的网络函数的幅度平方函数。因为它在 $\omega=0$ 处的前若干导数皆为零,因此它有最大的平坦度,巴特沃斯函数也称为最平型网络函数。图1.1表示了理想低通滤波特性和巴特沃斯逼近滤波特性,从中可以对这种形式的逼近有一个定性的认识。

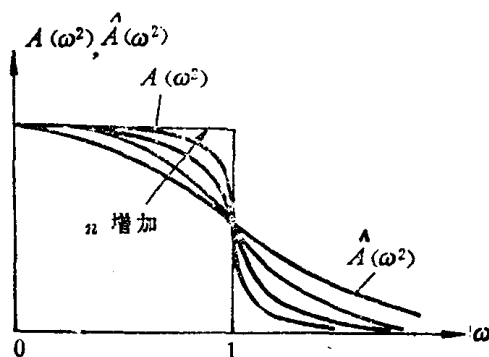


图 1.1

到现在为止,我们基本已完成了用一有理函数 $\hat{A}(\omega^2)$ 去逼近理想低通滤波器的幅度特性,但是还没有得到一个可实现的网络转移函数 $\hat{H}(j\omega)$ 。为了完成这一步,我们将(1.4)式解析延拓到复平面 s 中。以 $s=j\omega$ 代入(1.14)式便得到

$$\begin{aligned} \hat{A}(-s^2) &= \hat{H}(s) \cdot \hat{H}(-s) \\ &= \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}} \end{aligned} \quad (1.15)$$

$\hat{H}(s) \cdot \hat{H}(-s)$ 的极点是(1.15)式分母的根。

$$\left. \begin{aligned} (1 + (-1)^n s^{2n}) &= 0 \\ s^{2n} &= \pm 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

当 n 为奇数时取正号, n 为偶数时取负号。求解(1.16)式 $\hat{A}(-s^2)$ 一共有 $2n$ 个极点, 用 s_k 表示它们

$$\left. \begin{aligned} s_k &= e^{\frac{j2k\pi}{2n}} && \text{当 } n \text{ 为奇数} \\ s_k &= e^{\frac{j(2k-1)\pi}{2n}} && \text{当 } n \text{ 为偶数} \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

或

$$k = 0, 1, \dots, 2n-1$$

图 1.2 画出了 $n=3$ 和 $n=4$ 两种情况时, 巴特沃斯转移函数幅度平方的极点位置

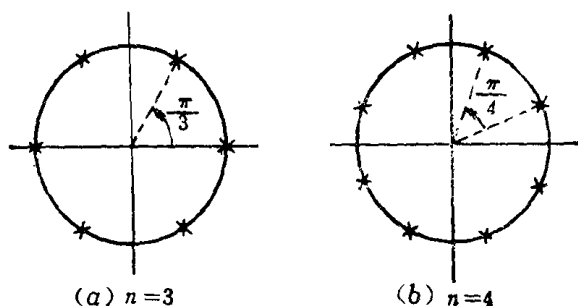


图 1.2

由于 $\hat{H}(s)$ 是可实现的, 它的极点只能分布在 s 平面的左半平面, 相应地 $\hat{H}(-s)$ 的极点自然在 s 平面的右半平面。因此, 从图 1.2 的极点模型很容易地把 $\hat{A}(\omega^2)$ 左半平面极点分配给 $\hat{H}(s)$, 而右半平面的极点留给 $\hat{H}(-s)$ 。这样做之后, $\hat{H}(s)$ 便为

$$\hat{H}(s) = \frac{1}{P_{Bn}(s)} = \frac{1}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n} \quad (1.18)$$

$P_{Bn}(s)$ 称为 n 阶巴特沃斯多项式, 多项式的根是(1.17)式左半平面那部分零点。通常, 在逼近中勿需每次都要经历上面那样的计算, 几乎在所有有关网络综合和滤波器设计的书籍中都给出了各

阶巴特沃斯多项式表格。为读者使用方便,这里,我们也在表 1.1 中给出了这些数据

表 1.1

n	$P_B(s)$
1	$s+1$
2	$s^2+\sqrt{2}s+1$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$(s^2+0.7654s+1)(s^2+1.8478s+1)$
5	$(s+1)(s^2+0.6180s+1)(s^2+1.6180s+1)$
6	$(s^2+0.5176s+1)(s^2+1.4142s+1)(s^2+1.9319s+1)$
7	$(s+1)(s^2+0.4450s+1)(s^2+1.2470s+1)(s^2+1.8019s+1)$
8	$(s^2+0.3902s+1)(s^2+1.1111s+1)(s^2+1.1663s+1)(s^2+1.9616s+1)$

§ 1.2 理想低通滤波器的契比雪夫 (Chebyshev)逼近

上一节中讨论的巴特沃斯逼近函数是属于台劳逼近性质的。在逼近区间内,只有一点($\omega=0$)逼近函数和被逼近理想函数的幅度是一致的。可以想象,这种逼近只在 $\omega=0$ 处及其附近有较好的逼近效果,愈远离 $\omega=0$,逼近特性与理想特性相差也愈大,对整个逼近范围来说,它不是一个好的逼近。

如果按照使在逼近区间中最大误差最小化的准则去寻求逼近函数,便可以得到一种新的逼近函数——契比雪夫逼近函数。如果以这种准则去逼近理想低通滤波器的幅度特性,得到的逼近函数就是人们常说的等起伏滤波器特性或契比雪夫滤波器特性。

下面,让我们先讨论契比雪夫多项式,然后再来看如何把契比雪夫多项式应用到对理想滤波器特性的逼近上,最后来讨论逼近函数的建立和这种逼近函数零、极点的特征。

在频域逼近中,契比雪夫多项式是以 n 为参变量、频率 ω 为变

量的函数,一般表达式为

$$C_n(\omega) = \begin{cases} \cos(n \cos^{-1} \omega) & |\omega| \leq 1 \\ \cosh(n \cosh^{-1} \omega) & |\omega| \geq 1 \end{cases} \quad (1.19)$$

由于 $\cos x$ 总是在 0 和 1 之间变化的,可以看出,在通带 $|\omega| < 1$ 内 $C_n(\omega)$ 也是在 0 和 1 之间等起伏的变化。而在通带之外 $|\omega| > 1$, $C_n(\omega)$ 是按指数规律增长。由此可以看出,用它来构成对理想滤波特性的逼近函数是相当合适的。(1.19) 式中 $C_n(\omega)$ 是以超越函数形式给出,又是分段表示的。然而仔细分析(1.19)式,可以发现它可以用 ω 的多项式形式表示出来。并且,对不同的 n 值, $C_n(\omega)$ 可以用递推公式求得。从(1.19)式可以看到,当 $n=0$ 和 $n=1$ 时,分别有

$$\left. \begin{aligned} C_0(n) &= \cos(0) = 1 \\ C_1(n) &= \cos(\cos^{-1} \omega) = \omega \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

也从该式,可以得到一个递推公式。当令 $\phi = \cos^{-1} \omega$ 即有

$$\omega = \cos \phi$$

从 $C_n(\omega)$ 的定义有

$$\begin{aligned} C_{n+1}(\omega) &= \cos[(n+1)\phi] = \cos[n\phi + \phi] \\ &= \cos n\phi \cdot \cos \phi - \sin n\phi \cdot \sin \phi \\ &= 2\cos n\phi \cdot \cos \phi - (\cos n\phi \cdot \cos \phi + \sin n\phi \cdot \sin \phi) \\ &= 2\omega \cdot \cos n\phi - \cos[(n-1)\phi] \\ &= 2\omega C_n(\omega) - C_{n-1}(\omega) \end{aligned} \quad (1.21)$$

从而得到递推公式

$$C_{n+1}(\omega) = 2\omega C_n(\omega) - C_{n-1}(\omega) \quad (1.22)$$

将(1.20)式代入(1.22)式的递推公式便可得到不同 n 值时的契比雪夫多项式。其结果在表 1.2 中给出

表 1.2

n	$C_n(\omega)$
0	1
1	ω
2	$2\omega^2 - 1$
3	$4\omega^3 - 3\omega$
4	$8\omega^4 - 8\omega^2 + 1$
5	$16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega$

从表中给出的契比雪夫多项式还可以看出它的更多的性质。

(1) 当 n 为偶数时, $C_n(\omega)$ 是 ω 的偶函数, 当 n 为奇数时, $C_n(\omega)$ 是 ω 的奇函数。

(2) 当 n 为偶数时, $C_n(0) = (-1)^{n/2}$, $C_n(\pm 1) = 1$ 。

(3) 当 n 为奇数时, $C_n(0) = 0$, $C_n(1) = 1$, $C_n(-1) = -1$ 。

$C_n(\omega)$ 随 ω 变化的图形示于图 1.3。| $C_n(\omega)$ | 在 $|\omega| \leq 1$ 内最大值为 1, 而在 $|\omega| \gg 1$ 时, 则近似于 $2^{n-1}|\omega|^n$ 。可以证明, 任何其它多项式, 若在 $|\omega| \leq 1$ 内其模数具有最大值为 1, 在 $|\omega| \geq 1$ 时必然小于 $2^{n-1}|\omega|^n$ 。这样, 在工程中使用这种函数确定对应 $|\omega| \leq 1$ 及 $|\omega| \geq 1$ 两个区域的幅度-频率特性时, 它比其它多项式有更好的性能, 所以工程上把以契比雪夫多项式构成器件数学模型特性称为最佳特性。

以契比雪夫多项式来逼近理想低通滤波器函数也是很方便的。我们可以按下式的 $\hat{A}(\omega^2)$ 对理想低通特性进行逼近。

$$\hat{A}(\omega^2) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega)} \quad (1.23)$$

其中 ε 是一个很小的实数, 它表示逼近函数在通带中的起伏程度。虽然, 在通带 $|\omega| \leq 1$ 内, 由于 $C_n(\omega)$ 在 0 与 1 之间变动, $\hat{A}(\omega^2)$ 将在 1 与 $1/(1 + \varepsilon^2)$ 之间波动。在阻带 $|\omega| > 1$ 中, 随着 $|\omega|$ 的增加 $\varepsilon^2 C_n^2(\omega)$ 将 $\gg 1$, 幅度响应将以每倍频程 6ndB 的速率迅速下降, 图 1.4 描绘了一个典型的契比雪夫型逼近的幅度响应特性。

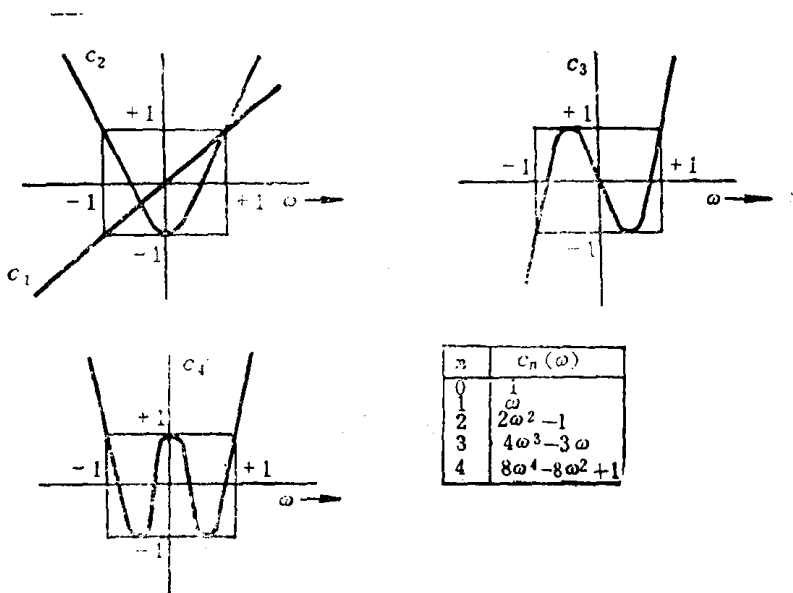


图 1.3

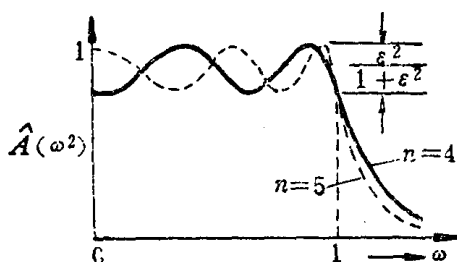


图 1.4

可以看到在 $0 \leq |\omega| \leq 1$ 内, 幅度平方函数曲线最大值和最小值之和为 n 。不管 n 是偶数还是奇数, 在通带边沿 $\omega=1$ 处, $\hat{A}(\omega)$ 总保持通带特性中的最小值。

和上一节的巴特沃斯逼近一样, 最终需要从逼近的幅度函数 $\hat{A}(\omega^2)$ 求得网络的转移函数 $\hat{H}(j\omega)$ 或 $\hat{H}(s)$ 。依照上节的办法, 将 $\hat{A}(\omega^2)$ 解析延拓到整个 s 平面, 求出 s 平面的极点, 取其左半平面的极点构成 $\hat{H}(s)$ 。