高等学校教材

高等数学

（第三版）　下册

同济大学数学教研室　主编

高等教育出版

高等学校教材

高等数学

（第三版）

下册

同济大学数学教研室　主编

高等教育出版社

本书第三版是由同济大学数学教研室的同志，根据在第二版教学实践中所积累的经验，吸取了广大教师所提出的宝贵意见，以及按国家教委批准的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》修改而成的.

本书分上、下册出版. 下册内容为多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程，书末还附有习题答案.

本书结构严谨，说理浅显，叙述详细，例题较多，便于教学，可作为高等工业院校教材，也可作为工程技术人员的自学用书.

责任编辑　丁鹤龄

高等学校教材

高 等 数 学

（第 三 版）

下 册

同济大学数学教研室 主编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 14.875 字数359 000

1978 年 10 月第 1 版 1988年 9 月第 3 版 1988年 9 月第 1 次印刷

印数 0 001—65 160

ISBN7-04-000915-3/O·675

定价 3.60 元

目　　录

第八章　多元函数微分法及其应用……………………………1

第一节　多元函数的基本概念……………………………1

一、区域(1)　二、多元函数概念(4)　三、多元函数的极限(7)　四、多元函数的连续性(10)　习题 8-1(13)

第二节　偏导数……………………………14

一、偏导数的定义及其计算法(14)　二、高阶偏导数(19)　习题 8-2(21)

第三节　全微分及其应用……………………………22

一、全微分的定义(22)　*二、全微分在近似计算中的应用(27)　习题 8-3(30)

第四节　多元复合函数的求导法则……………………………31

习题 8-4(39)

第五节　隐函数的求导公式……………………………40

一、一个方程的情形(40)　二、方程组的情形(43)　习题8-5(47)

第六节　微分法在几何上的应用……………………………48

一、空间曲线的切线与法平面(48)　二、曲面的切平面与法线(53)　习题 8-6(56)

第七节　方向导数与梯度……………………………57

一、方向导数(57)　二、梯度(60)　习题 8-7(64)

第八节　多元函数的极值及其求法……………………………65

一、多元函数的极值及最大值、最小值(65)　二、条件极值拉格朗日乘数法(71)　习题 8-8(75)

*第九节　二元函数的泰勒公式……………………………75

一、二元函数的泰勒公式(75)　二、极值充分条件的证明(80)

*习 题 8-9(83)
*第十节 最小二乘法……………………………………83
*习 题 8-10(89)
第九章 重积分……………………………………………90
第一节 二重积分的概念与性质…………………………90
一、二重积分的概念(90) 二、二重积分的性质(94) 习题 9-1(96)
第二节 二重积分的计算法………………………………98
一、利用直角坐标计算二重积分(98) 习题 9-2(1)(107) 二、利用极坐标计算二重积分(109) 习题 9-2(2)(115) *三、二重积分的换元法(117) *习 题 9-2(3)(123)
第三节 二重积分的应用…………………………………124
一、曲面的面积(125) 二、平面薄片的重心(128) 三、平面薄片的转动惯量(130) 四、平面薄片对质点的引力(131) 习题 9-3(133)
第四节 三重积分的概念及其计算法……………………134
习 题 9-4(138)
第五节 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分………140
一、利用柱面坐标计算三重积分(140) 二、利用球面坐标计算三重积分(142) 习 题 9-5(148)
*第六节 含参变量的积分…………………………………150
*习 题 9-6(156)
第十章 曲线积分与曲面积分……………………………158
第一节 对弧长的曲线积分………………………………158
一、对弧长的曲线积分的概念与性质(158) 二、对弧长的曲线积分的计算法(161) 习 题 10-1(165)
第二节 对坐标的曲线积分………………………………166
一、对坐标的曲线积分的概念与性质(166) 二、对坐标的曲线积分的计算法(170) 三、两类曲线积分之间的联系(176) 习题 10-2(178)
第三节 格林公式及其应用………………………………179

一、格林公式(179) 二、平面上曲线积分与路径无关的条件(185) 三、二元函数的全微分求积(188) 习题10-3(192)

第四节 对面积的曲面积分……………………………………194

一、对面积的曲面积分的概念与性质(194) 二、对面积的曲面积分的计算法(195) 习题10-4(199)

第五节 对坐标的曲面积分……………………………………201

一、对坐标的曲面积分的概念与性质(201) 二、对坐标的曲面积分的计算法(207) 三、两类曲面积分之间的联系(201) 习题10-5(213)

第六节 高斯公式 通量与散度…………………………………214

一、高斯公式(214) *二、沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件(219) 三、通量与散度(220) 习题10-6(222)

第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度…………………………224

一、斯托克斯公式(224) *二、空间曲线积分与路径无关的条件(230) 三、环流量与旋度(232) *四、向量微分算子(234) 习题10-7(235)

第十一章 无穷级数……………………………………………237

第一节 常数项级数的概念和性质……………………………237

一、常数项级数的概念(237) 二、无穷级数的基本性质(241) 三、级数收敛的必要条件(243) *四、柯西审敛原理(245) 习题11-1(246)

第二节 常数项级数的审敛法…………………………………247

一、正项级数及其审敛法(247) 二、交错级数及其审敛法(256) 三、绝对收敛与条件收敛(258) 习题11-2(264)

*第三节 广义积分的审敛法 Γ-函数……………………………265

一、广义积分的审敛法(265) 二、Γ-函数(272) *习题11-3(274)

第四节 幂级数……………………………………………………275

一、函数项级数的一般概念(275) 二、幂级数及其收敛性(276) 三、幂级数的运算(282) 习题11-4(285)

第五节 函数展开成幂级数……………………………………286

一、泰勒级数(286) 二、函数展开成幂级数(289) 习题 11-5(297)
第六节 函数的幂级数展开式的应用……………………298
一、近似计算(298) 二、欧拉公式(303) 习题 11-6(305)
*第七节 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质……………………305
一、函数项级数的一致收敛性(305) 二、一致收敛级数的基本性质(310) *习题 11-7(316)
第八节 傅立叶级数……………………317
一、三角级数 三角函数系的正交性(317) 二、函数展开成傅立叶级数(320) 习题 11-8(328)
第九节 正弦级数和余弦级数……………………329
一、奇函数和偶函数的傅立叶级数(329) 二、函数展开成正弦级数或余弦级数(333) 习题 11-9(335)
第十节 周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数……………………336
习题 11-10(340)
*第十一节 傅立叶级数的复数形式……………………341
*习题 11-11(344)
第十二章 微分方程……………………345
第一节 微分方程的基本概念……………………345
习题 12-1(350)
第二节 可分离变量的微分方程……………………351
习题 12-2(359)
第三节 齐次方程……………………360
一、齐次方程(360) *二、可化为齐次的方程(365) 习题 12-3(368)
第四节 一阶线性微分方程……………………368
一、线性方程(368) 二、贝努利方程(372) 习题 12-4(375)
第五节 全微分方程……………………376
习题 12-5(379)
*第六节 欧拉-柯西近似法……………………380
*习题 12-6(385)

第七节　可降阶的高阶微分方程……………………………385
一、$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程(385)　二、$y''=f(x,y')$型的微分方程(388)　三、$y''=f(y,y')$型的微分方程(391)　习题12-7(394)
第八节　高阶线性微分方程……………………………395
一、二阶线性微分方程举例(395)　二、线性微分方程的解的结构(398)　*三、常数变易法(401)　习题12-8(405)
第九节　二阶常系数齐次线性微分方程……………………………406
习题12-9(416)
第十节　二阶常系数非齐次线性微分方程……………………………417
一、$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型(418)　二、$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型(421)　习题12-10(425)
*第十一节　欧拉方程……………………………426
*习题12-11(428)
第十二节　微分方程的幂级数解法……………………………428
习题12-12(433)
*第十三节　常系数线性微分方程组解法举例……………………………433
*习题12-13(437)
习题答案……………………………439

本书重点：1.多元复合函数求导的链式法
2.二、三重积分的计算与应用.
3.平面上曲线积分的计算与Green公式
4.正项、交错级数的敛散性的判别
5.幂级数的R、I的求法
6.一、二阶线性微分方程的解法

难点：1.链式法则求偏导数；2.二、三重积分化成累次积分
3.重积分的物理应用—微元法.
4.线、面积分的应用
5.级数敛散性的判别.

方向导数存在的条件：

① 必要条件：偏导数存在

② 充分条件：　$\Delta u + du + o(\rho)$

$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\rho}$

第八章　多元函数微分法及其应用

上册中我们讨论的函数都只有一个自变量，这种函数叫做一元函数．但在很多实际问题中往往牵涉到多方面的因素，反映到数学上，就是一个变量依赖于多个变量的情形．这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题．本章将在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的微分法及其应用．讨论中我们以二元函数为主，因为从一元函数到二元函数会产生新的问题，而从二元函数到二元以上的多元函数则可以类推．

第一节　多元函数的基本概念

一、区　域

讨论一元函数时，经常用到邻域和区间概念．由于讨论多元函数的需要，我们首先把邻域和区间概念加以推广，同时还要涉及其它一些概念．

1．邻域

设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 是某一正数．与点 $P_0(x_0, y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x, y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0, \delta)$，即

$$U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\},$$

也就是

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}.$$

在几何上，$U(P_0,\delta)$就是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$为中心、$\delta>0$ 为半径的圆的内部的点 $P(x,y)$的全体.

如果不需要强调邻域半径 δ，则用 $U(P_0)$表示点 P_0 的 δ 邻域.

2. 区域

设 E 是平面上的一个点集，P 是平面上的一个点. 如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$ 使 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的内点（图 8-1）. 显然，E 的内点属于 E.

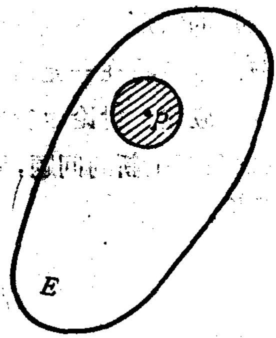

图 8-1

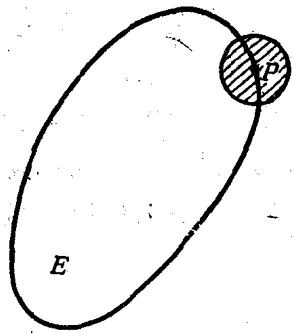

图 8-2

如果点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集. 例如，点集 $E_1=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 中每个点都是 E_1 的内点，因此 E_1 为开集.

如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点（点 P 本身可以属于 E，也可以不属于 E），则称 P 为 E 的边界点（图 8-2）. E 的边界点的全体称为 E 的边界. 例如上例中，E_1 的边界是圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$.

设 D 是开集. 如果对于 D 内任何两点，都可用折线连结起来，且该折线上的点都属于 D，则称开集 D 是连通的.

连通的开集称为区域或开区域. 例如，$\{(x,y)\mid x+y>0\}$ 及 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 都是区域.

开区域连同它的边界一起，称为闭区域，例如

$$\{(x,y)\mid x+y\geqslant 0\}\text{及}\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$$

都是闭区域.

对于点集E如果存在正数K,使一切点$P\in E$与某一定点A间的距离$|AP|$不超过K;即

$$|AP|\leqslant K\text{ 对一切 }P\in E\text{ 成立},$$

则称E为有界点集，否则称为无界点集. 例如:

$$\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$$

是有界闭区域,$\{(x,y)\mid x+y>0\}$是无界开区域.

3. 聚点

设E是平面上的一个点集，P是平面上的一个点. 如果点P的任一邻域内总有无限多个点属于点集E,则称P为E的聚点. 显然，E的内点一定是E的聚点. 此外，E的边界点也可能是E的聚点. 例如,设

$$E_2=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant 1\},$$

那末点(0,0)既是E_2的边界点又是E_2的聚点，E_2的这个聚点不属于E_2. 又例如，圆周$x^2+y^2=1$上的每个点既是E_2的边界点，也是E_2的聚点,而这些聚点都属于E_2. 由此可见,点集E的聚点可以属于E,也可以不属于E.

4. n维空间

我们知道,数轴上的点与实数有一一对应关系,从而实数全体表示数轴上一切点的集合,即直线. 在平面上引入直角坐标系后,平面上的点与二元数组(x,y)一一对应，从而二元数组(x,y)全体表示平面上一切点的集合,即平面. 在空间引入直角坐标系后,空间的点与三元数组(x,y,z)一一对应，从而三元数组(x,y,z)全体表示空间一切点的集合,即空间. 一般地,设n为取定的一个自然数,我们称n元数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体为n维空间,而每个n元数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为n维空间中的一个点,数x_i称为该点的第

个坐标. n 维空间记为 $\mathbb{R}^n$.

n 维空间中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 间的距离规定为

$$|PQ|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

容易验知，当 $n=1,2,3$ 时，由上式便得解析几何中关于直线(数轴)，平面，空间内两点间的距离.

前面就平面点集来陈述的一系列概念，可推广到 n 维空间中去. 例如，设 $P_0\in\mathbb{R}^n$，δ 是某一正数，则 n 维空间内的点集

$$U(P_0,\delta)=\{P\,\big|\,|PP_0|<\delta,P\in\mathbb{R}^n\}$$

就定义为点 P_0 的 δ 邻域. 以邻域概念为基础，可定义内点、边界点、区域、聚点等一系列概念.

二、多元函数概念

在很多自然现象以及实际问题中，经常会遇到多个变量之间的依赖关系，举例如下:

例 1 圆柱体的体积 V 和它的底半径 r、高 h 之间具有关系

$$V=\pi r^2h.$$

这里，当 r、h 在集合 $\{(r,h)\,|\,r>0,h>0\}$ 内取定一对值 (r,h) 时，V 的对应值就随之确定.

例 2 一定量的理想气体的压强 p、体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系

$$p=\frac{RT}{V},$$

其中 R 为常数. 这里，当 V、T 在集合 $\{(V,T)\,|\,V>0,\ T>T_0\}$ 内取定一对值 (V,T) 时，p 的对应值就随之确定.

例 3 设 R 是电阻 R_1、R_2 并联后的总电阻，由电学知道，它们之间具有关系

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}.$$

这里，当 R_1、R_2 在集合 $\{(R_1,R_2)\mid R_1>0,R_2>0\}$ 内取定一对值 (R_1,R_2) 时，R 的对应值就随之确定.

上面三个例子的具体意义虽各不相同，但它们却有共同的性质，抽出这些共性就可得出以下二元函数的定义.

定义 1 设 D 是平面上的一个点集. 如果对于每个点 $P(x,y)\in D$，变量 z 按照一定法则总有确定的值和它对应，则称 z 是变量 x、y 的二元函数(或点 P 的函数)，记为

$$z=f(x,y)\quad(\text{或 } z=f(P)).$$

点集 D 称为该函数的定义域，x、y 称为自变量，z 也称为因变量. 数集

$$\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为该函数的值域.

z 是 x、y 的函数也可记为 $z=z(x,y)$，$z=\varphi(x,y)$ 等等.

类似地可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$ 以及三元以上的函数. 一般地，把定义 1 中的平面点集 D 换成 n 维空间内的点集 D，则可类似地定义 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. n 元函数也可简记为 $u=f(P)$，这里点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$. 当 $n=1$ 时，n 元函数就是一元函数. 当 $n\geqslant2$ 时，n 元函数统称为多元函数.

关于多元函数的定义域，与一元函数相类似，我们作如下约定：在一般地讨论用算式表达的多元函数 $u=f(P)$ 时，就以使这个算式有确定值 u 的自变量所确定的点集为这个函数的定义域. 例如，函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域为

$$\{(x,y)\mid x+y>0\}$$

(图 8-3)，这是一个无界开区域. 又如，函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)$ 的定义域为

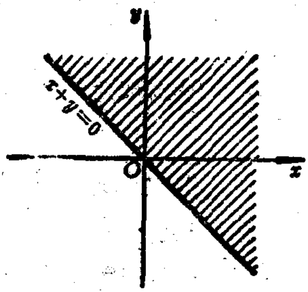

图 8-3

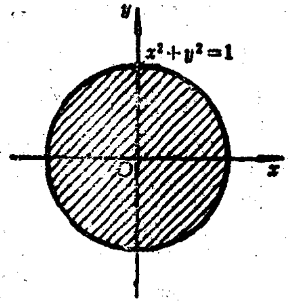

图 8-4

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$$

(图 8-4)，这是一个有界闭区域.

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D. 对于任意取定的点 $P(x,y)\in D$，对应的函数值为 $z=f(x,y)$. 这样，以 x 为横坐标、y 为纵坐标、$z=f(x,y)$ 为竖坐标在空间就确定一点 $M(x,y,z)$. 当 (x,y) 遍取 D 上的一切点时，得到一个空间点集

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),\ (x,y)\in D\},$$

这个点集称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形(图 8-5). 通常我们也说二元函数的图形是一张曲面.

例如，由空间解析几何知道，线性函数

$$z=ax+by+c$$

的图形是一张平面；由方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的图形是球心在原点、半径为 a 的球面，它的定义域是圆形闭区域

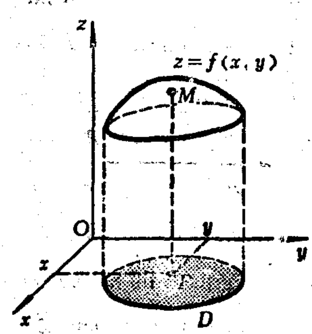

图 8-5

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}.$$

在 D 的内部任一点 (x,y) 处，这函数有两个对应值，一个为

$\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，另一个为$-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. 因此，这是多值函数. 我们把它分成两个单值函数:

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \text{ 及 } z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

前者表示上半球面，后者表示下半球面. 以后除了对多元函数另作声明外，总假定所讨论的函数是单值的；如果遇到多值函数，可以把它拆成几个单值函数后再分别加以讨论.

三、多元函数的极限

我们先讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0$, $y\to y_0$，即 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限.

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点. 首先，$P\to P_0$ 表示点 P 以任何方式趋向点 P_0，也就是点 P 与点 P_0 间的距离趋于零，即

$$|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0.$$

当然，这里只需考虑使函数 $z=f(x,y)$ 有定义的那些点 P，即 $P\in D$. 其次我们注意到，由于 P_0 是 D 的聚点，因此点 P 趋向点 P_0 总是可能的，因为根据聚点概念，在点 P_0 的任意邻域内（无论邻域的半径如何小），都有属于 D 的无限多个点.

与一元函数的极限概念相仿，如果在 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的过程中，对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于一个确定的常数 A，我们就说 A 是函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的极限. 二元函数的极限也可用"ε-δ"方式描述如下.

定义 2 **设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点. 如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于适合不等式**

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x,y)\in D$，都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A,$$

或
$$f(x,y)\to A\quad(\rho\to 0),$$
这里 $\rho=|PP_0|$.

为了区别于一元函数的极限，我们把二元函数的极限叫做二重极限.

例 4 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\quad(x^2+y^2\neq 0)$，

求证
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$$

证 因为

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|=|x^2+y^2|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant x^2+y^2,$$

可见，对任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，则当

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$$

时，总有

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

成立，所以
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$$

我们必须注意，所谓二重极限存在，是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数都无限接近于 A. 因此，如果 $P(x,y)$ 以某一特殊方式，例如沿着一条定直线或定曲线趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，即使函数无限接近于某一确定值，我们还不能由此断定函数的极限存在. 但是反过来，如果当 $P(x,y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数趋于不同的值，那末就可以断定这函数的极限不存在. 下面

用例子来说明这种情形。

考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

显然，当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴趋于点 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{x\to 0}f(x,0)=\lim_{x\to 0}0=0;$$

又当点 $P(x,y)$ 沿 y 轴趋于点 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{y\to 0}f(0,y)=\lim_{y\to 0}0=0.$$

虽然点 $P(x,y)$ 以上述两种特殊方式（沿 x 轴或沿 y 轴）趋于原点时函数的极限存在并且相等，但是 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 并不存在. 这是因为当点 $P(x,y)$ 沿着直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

显然它是随着 k 的值的不同而改变的。

利用点函数的形式，n 元函数的极限定义可叙述如下.

定义 3 设 n 元函数 $f(P)$ 的定义域为点集 D，P_0 是 D 的聚点. 如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于适合不等式

$$0<|PP_0|<\delta$$

的一切点 $P\in D$，都有

$$|f(P)-A|<\varepsilon$$

成立，则称 A 为 n 元函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A.$$

当 $n=1$，即 $f(P)$ 为一元函数时，定义 3 就成为一元函数极限的定义. 当 $n=2$ 时，定义 3 就与定义 2 一致而成为二元函数极限