初中奥林匹克竞赛试题分类解析

初一数学

初中奥林匹克

竞赛试题分类解析

课堂内外杂志社 编

CHUZHONG AOLINPIKE JINGSAISHITI FENLEIJIEXI

四川科学技术出版社

初中奥林匹克
竞赛试题分类解析

（初一数学）

课堂内外杂志社　编

四川科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中奥林匹克竞赛试题分类解析.初一数学/课堂内外杂志社编.－成都:四川科学技术出版社,2002.1
ISBN 7－5364－4887－2

Ⅰ.初… Ⅱ.课… Ⅲ.数学课－初中－竞赛题－解题 Ⅳ.G632.479

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第097259号

总 策 划 刘信中
康利华
主　　编 张　杰
编　　委 杨　晓　包建华

初中奥林匹克竞赛试题分类解析
(初一数学)

课堂内外杂志社　编
责任编辑　洪荣泽　周科琪
封面设计　杨　峰
版面设计　素　朴
责任校对　渝　蓉
责任出版　李　珉
出版发行　四川科学技术出版社
成都盐道街3号　邮政编码610012
开　　本　850mm×1168mm　1/32
印张8.5　字数176千
印　　刷　成都宇川印刷厂
版　　次　2002年1月成都第一版
印　　次　2002年1月成都第一次印刷
印　　数　1－1 0000册
定　　价　9.00元
ISBN 7－5364－4887－2/G·890

前　言

全国初中应用数学、物理、化学、英语等学科奥林匹克竞赛是国家教委正式批准的一项全国性学科竞赛活动，是课外活动的一种好形式，是素质教育的一个方面，是因材施教的一个主渠道。它不仅有利于拓宽知识面，而且有利于加强教学的实践性，使各学科的基础知识与实际应用有机地结合起来。

为了配合初中学科奥林匹克竞赛的开展，为了给参赛的师生提供导向性的材料，我们约请了部分有丰富竞赛辅导经验的老师，编写了这套《初中奥林匹克竞赛试题分类解析》，按初一数学、初二数学、初三数学、初二物理、初三物理、初三化学（上、下册）、初一英语、初二英语、初三英语分册出版。

本书内容典型充实，形式灵活多变，深、广度有所拓展，力求达到举一反三的效果。它源于教材，高于教材，由浅入深，同步辅导，普及提高，相互兼顾。拥有本书，定有收益。

《初一数学分册》分五章。每章由三部分组成：知识要点、例题精讲、巩固练习。每章后附有自测题（答案、少量提示附在书后）。

由于编写时间比较仓促，不当之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编者

2002 年 1 月

课堂内外杂志社

培养科学创新精神，倡导全新教育理念，

KETANG NEIWAI

传播优秀文化知识，注重个人全面发展

目　录

第一章　数的初步知识

§1.1　自然数的有关性质

一、知识要点

1. 最大公约数

定义 1　如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 d 都是正整数，且 $d|a_1,d|a_2,\cdots,d|a_n$，那么 d 叫做 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公约数. 公约数中最大的叫做 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最大公约数，记作 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

如对于 4、8、12 这一组数，显然 1、2、4 都是它们的公约数，但 4 是这些公约数中最大的，所以 4 是它们的最大公约数，记作 $(4,8,12)=4$.

2. 最小公倍数

定义 2　如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 m 都是正整数，且 $a_1|m,a_2|m,\cdots,a_n|m$，那么 m 叫做 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公倍数. 公倍数中最小的数叫做 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最小公倍数，记作 $[a_1,a_2,\cdots,a_n]$.

如对于 4、8、12 这一组数，显然 24、48、96 都是它们的公倍数，但 24 是这些公倍数中最小的，所以 24 是它们的最小公倍数，记作 $[4,8,12]=24$.

3. 最大公约数和最小公倍数的性质

性质 1　若 $a|b$，则 $(a,b)=a$.

性质 2　若 $(a,b)=d$，且 n 为正整数，则 $(na,nb)=nd$.

性质 3　若 $n|a,n|b$，则 $\left(\frac{a}{n},\frac{b}{n}\right)=\frac{(a,b)}{n}$

性质 4 若 $a=bq+r(0\leqslant r<b)$，则 $(a,b)=(b,r)$. 性质 4 实质上是求最大公约数的一种方法，这种方法叫做辗转相除法.

性质 5 若 $b|a$，则 $[a,b]=a$.

性质 6 若 $[a,b]=m$，且 n 为正整数，则 $[na,nb]=nm$.

性质 7 若 $n|a,n|b$，则 $\left[\frac{a}{n},\frac{b}{n}\right]=\frac{[a,b]}{n}$

4. 数的整除性

定义 3 对于整数 a 和不为零的整数 b，如果存在整数 q，使得 $a=bq$ 成立，则就称 b 整除 a 或 a 被 b 整除，记作 $b|a$. 若 $b|a$，我们也称 a 是 b 的倍数；若 b 不能整除 a，记作 $b\nmid a$.

5. 数的整除性的性质

性质 1 若 $a|b,b|c$，则 $a|c$.

性质 2 若 $c|a,c|b$，则 $c|(a\pm b)$.

性质 3 若 $b|a,n$ 为整数，则 $b|na$.

6. 同余

定义 4 设 m 是大于 1 的整数，如果整数 a,b 的差能被 m 整除，我们就说 a,b 关于模 m 同余，记作 $a\equiv b\pmod{m}$.

7. 同余的性质

性质 1 如果 $a\equiv b\pmod{m}$，$c\equiv d\pmod{m}$，那么 $a\pm c\equiv b\pm d\pmod{m}$，$ac\equiv bd\pmod{m}$.

性质 2 如果 $a\equiv b\pmod{m}$，那么对任意整数 k 有 $ka\equiv kb\pmod{m}$.

性质 3 如果 $a\equiv b\pmod{m}$，那么对任意正整数 k 有 $a^k\equiv b^k\pmod{m}$.

性质 4 如果 $a\equiv b\pmod{m}$，d 是 a,b 的公约数，那么 $\frac{a}{d}\equiv\frac{b}{d}\left(\bmod\frac{m}{(m,d)}\right)$.

二、例题精讲

例 1 设 m 和 n 为大于 0 的整数，且 $3m+2n=225$，

如果 m 和 n 的最大公约数为 15，求 $m+n$ 的值.

（第 11 届“希望杯”初一试题）

解 因为 $(m,n)=15$，故可设 $m=15a,n=15b$，且 $(a,b)=1$. 因为 $3m+2n=225$，所以 $3a+2b=15$. 因为 a,b 为正整数，所以可得 $a=1,b=6$ 或 $a=b=3$，但 $(a,b)=1$，所以 $a=1,b=6$，从而 $m+n=15(a+b)=15\times7=105$.

评注：(1)遇到这类问题常设 $m=15a,n=15b$，且 $(a,b)=1$，这样可把问题转化为两个互质数的求值问题. 这是一种常用方法.

(2)思考一下，如果将 m 和 n 的最大公约数为 15，改成 m 和 n 的最小公倍数为 45，问题如何解决?

例 2 有若干苹果，2 个一堆多 1 个，3 个一堆多 1 个，4 个一堆多 1 个，5 个一堆多 1 个，6 个一堆多 1 个，问这堆苹果最少有多少个?

分析 将问题转化为最小公倍数来解决.

解 设这堆苹果最少有 x 个，依题意得：

$$\begin{cases}x=2q_1+1\\x=3q_2+1\\x=4q_3+1\\x=5q_4+1\\x=6q_5+1\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}x-1=2q_1\\x-1=3q_2\\x-1=4q_3\\x-1=5q_4\\x-1=6q_5\end{cases}$$

由此可见，$x-1$ 是 2,3,4,5,6 的最小公倍数，因为 $[2,3,4,5,6]=60$，所以 $x-1=60$，即 $x=61$.

答：这堆苹果最少有 61 个.

例 3 自然数 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_9,a_{10}$ 的和等于 1001，设 d 为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_9,a_{10}$ 的最大公约数，试求 d 的最大值.

解 由于 d 为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_9,a_{10}$ 的最大公约数，所以和 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9+a_{10}=1001$ 能被 d 整除，即 d 是 $1001=7\times11\times13$ 的约数.

因为 $d|a_k$，所以 $a_k\geqslant d,k=1,2,3,\cdots,10$，从而 $1001=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9+a_{10}\geqslant10d$.

所以 $d\leqslant\frac{1001}{10}<101$，由 d 能整除 1001 得，d 仅可能取值 1，7，11，13，77，91.

因为 1001 能写成 10 个数的和：$91+91+91+91+91+91+91+91+91+182$，其中每一个数都能被 91 整除，所以 d 能达到最大值 91.

例 4 某商场向顾客发放 9999 张购物券，每张购物券上印有四位数码，从 0001 到 9999 号，如果号码的前两位之和等于后两位之和，则这张购物券为幸运券，如号码 0734，因 $0+7=3+4$，所以这个号码的购物券为幸运券. 证明：这个商场所发购物券中，所有幸运券的号码之和能被 101 整除.（第 7 届初中"祖冲之杯"数学邀请赛试题）

证明： 显然，号码为 9999 的购物券为幸运券，除这张外，若号码为 n 的购物券为幸运券，则号码为 $m=9999-n$ 的购物券也为幸运券. 由于 9999 是奇数，所以 m,n 的奇偶性不同，即 $m\neq n$，由于 $m+n=9999$，相加时不出现进位. 就是说，除号码为 9999 的幸运券外，其余所有的幸运券可两两配对，且每对号码之和为 9999，从而可知所有的幸运券的号码之和为 9999 的倍数. 由 $101|9999$，所以所有幸运券的号码之和能被 101 整除.

评注： 本题是通过将数两两配对的方法来解决的.

例 5 在 $1,2,3,\cdots,1995$ 这 1995 个数中，找出所有满足条件的数来：$1995+a$ 能整除 $1995\times a$.（第五届华杯赛决赛试题）

分析 $\frac{1995a}{1995+a}$ 分子、分母都含有 a，对 a 的讨论带来不便，因此可以将 $\frac{1995a}{1995+a}$ 化成 $1995-\frac{1995\times1995}{1995+a}$，这样只有分母中含有 a，就容易对 a 进行讨论.

解 $\frac{1995a}{1995+a}=\frac{1995(1995+a)-1995\times1995}{1995+a}=1995-\frac{1995\times1995}{1995+a}$

因为 $1995+a$ 能整除 $1995\times a$，所以 $\frac{1995a}{1995+a}$ 是整数.

从而$\frac{1995\times1995}{1995+a}$是整数. 因为$1995\times1995=3^2\times5^2\times7^2\times19^2$,所以它的因数$1995+a$可以通过检验的方法定出. 注意到$1\leqslant a\leqslant1995$,所以$1995<1995+a\leqslant3990$.

如果$1995+a$不被19整除,那么它的值只能是以下两种:

$$3\times5^2\times7^2=3675,3^2\times5\times7^2=2205$$

如果$1995+a$能被19整除,但不被19^2整除,那么它的值只能是以下两种:

$$3\times7^2\times19=2793,5^2\times7\times19=3325$$

如果$1995+a$能被19^2整除,那么它的值只能是以下两种:

$$7\times19^2=2527,3^2\times19^2=3249.$$

于是满足条件的a有6个,即从上面6个值中分别减去1995,得到1680、210、798、1330、532、1254.

评注:本题通过对$\frac{1995a}{1995+a}$的适当变形,便于对a的讨论. 讨论时通过将1995×1995分解质因数,然后将因数$1995+a$通过检验的方法定出. 这种方法在解决数的整除问题中经常使用.

例6 $1^1+2^2+3^3+4^4+5^5+6^6+7^7+8^8+9^9$除以3的余数是几?为什么?(第四届华杯赛复赛试题)

解 显然$1^1\equiv1\pmod 3)$,$3^3\equiv0\pmod 3$,$6^6\equiv0\pmod 3$,$9^9\equiv0\pmod 3$,又$2^2=4\equiv1\pmod 3$,$4^4\equiv1^4\equiv1\pmod 3$,$5^5\equiv2^5\equiv(-1)^5\equiv(-1)\pmod 3$,$7^7\equiv1^7\equiv1\pmod 3$,$8^8\equiv(-1)^8\equiv1\pmod 3$.

$\therefore$ $1^1+2^2+3^3+4^4+5^5+6^6+7^7+8^8+9^9\equiv1+1+0+1-1+0+1+1+0\equiv4\equiv1\pmod 3$,即所求余数是1.

评注:用同余式求余数非常方便.

例7 已知:$a=\underbrace{19911991\cdots1991}_{1991\text{个}1991}$,问$a$除以13,所得余数是几?(第三届华杯赛决赛试题)

分析 将a用十进制表示成$a=1991\times(1+10^4+10^8+\cdots+10^{4\times1990})$,1991除以13,所得余数是显然的,主要研究$1+10^4+10^8+\cdots+10^{4\times1990}$

除以 13 的余数规律.

解 $a=1991\times(1+10^4+10^8+\cdots+10^{4\times1990})$

mod 13, $10^3\equiv(-3)^3=-27\equiv-1$, $1+10^4+10^8\equiv1-10+10^2=91\equiv0$, $1991\equiv2$, $\therefore a\equiv2\times(1+10^4)\equiv2\times(1-10)=-18\equiv8$, 即 a 除以 13, 所得余数是 8.

例 8 n 是正偶数, $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 除以 n, 所得的余数互不相同; $b_1,b_2\cdots,b_n$ 除以 n, 所得的余数也互不相同. 证明 $a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n$ 除以 n, 所得的余数必有相同的.

证明: $\because n$ 是正偶数, 所以 $n-1$ 为奇数, $\therefore \frac{n(n-1)}{2}=n\cdot\frac{n-1}{2}$ 不是 n 的倍数.

$\because$ $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 除以 n, 所得的余数互不相同, 所以这 n 个余数恰好是 $0,1,\cdots,n-1$. 从而 $a_1+a_2+\cdots+a_n\equiv0+1+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}\not\equiv0(\mathrm{mod}\ n)$. 同样 $b_1+b_2+\cdots+b_n\equiv\frac{(n-1)n}{2}\not\equiv0(\mathrm{mod}\ n)$, 但 $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)\equiv\frac{(n-1)n}{2}+\frac{(n-1)n}{2}=(n-1)n\equiv0(\mathrm{mod}\ n)$. 所以 $a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n$ 除以 n, 所得的余数必有相同的.

例 9 十进制中, 4444^{4444} 的数字和为 A, A 的数字和为 B, B 的数字和为 C, 求 C.

分析 由于 $10\equiv1(\mathrm{mod}\ 9)$, 所以对整数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有

$$a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\cdots+a_1\cdot10+a_0\equiv a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0(\mathrm{mod}\ 9)$$

它表明十进制中, 一个数与它的各位数字和模 9 同余.

根据上述结论有 $C\equiv B\equiv A\equiv4444^{4444}(\mathrm{mod}\ 9)$. 所以只要估计出 C 的大小, 就不难确定 C.

解 $4444\equiv7(\mathrm{mod}\,9)$, 而 $7^3\equiv(-2)^3=-8\equiv1(\mathrm{mod}\,9)$, 所以 $4444^{4444}\equiv7^{4444}=7^{3\times1481+1}\equiv7(\mathrm{mod}\ 9)$, 所以 $C\equiv B\equiv A\equiv4444^{4444}\equiv7(\mathrm{mod}\ 9)$. 另

一方面，$4444^{4444}<(10^5)^{4444}=10^{22220}$，所以 4444^{4444} 的位数不多于 22220，从而 $A<9\times 22220=199980$，即 A 至多是 6 位数，所以 $B<9\times 6=54$. 在 1 到 53 的整数中，数字和最大的是 49，所以 $C\leqslant 4+9=13$. 在小于 13 的自然数中，只有 7 模 9 同余于 7，所以 $C=7$.

评注：本题用了十进制中，一个数与它的各位数字和模 9 同余这个结论. 根据这个结论逐步估计出 C 的大小，然后定出 C.

三、巩固练习

选择题

1. 两个二位数，它们的最大公约数是 8，最小公倍数是 96，这两个数的和是(　　).

   A. 56　　B. 78　　C. 84　　D. 96

2. 三角形的三边长 a、b、c 均为整数，且 a、b、c 的最小公倍数为 60，a、b 的最大公约数是 4，b、c 的最大公约数是 3，则 $a+b+c$ 的最小值是(　　).

   A. 30　　B. 31　　C. 32　　D. 33

3. 在自然数 1，2，3，…，100 中，能被 2 整除但不能被 3 整除的数的个数是(　　).

   A. 33　　B. 34　　C. 35　　D. 37

4. 任意改变七位数 7175624 的末 4 位数字的顺序得到的所有七位数中，能被 3 整除的数的个数是(　　).

   A. 24　　B. 12　　C. 6　　D. 0

5. 若正整数 a 和 1995 对于模 6 同余，则 a 的值可以是(　　).

   A. 25　　B. 26　　C. 27　　D. 28

6. 设 n 为自然数，若 $19n+14\equiv 10n+3 \pmod{83}$，则 n 的最小值是(　　).

   A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 32

填空题

7. 自然数 n 被 3 除余 2，被 4 除余 3，被 5 除余 4，则 n 的最小值是______.

8. 满足$[x,y]=6$，$[y,z]=15$的正整数组(x,y,z)共有______组.
9. 一个四位数能被9整除，去掉末位数后得到的三位数是4的倍数，则这样的四位数中最大的一个，它的末位数是______.
10. 有一个11位数，从左到右，前k位数能被k整除($k=1,2,3,\cdots,11$)，这样的最小11位数是______.
11. 设n为自然数，则$3^{2n}+8$被8除的余数是______.
12. $1^4+2^4+3^4+4^4+\cdots+1994^4+1995^4$的末位数是______.

解答题

13. 求两个自然数，它们的和是667，它们的最小公倍数除以最大公约数所得的商是120.
14. 已知两个数的和是40，它们的最大公约数与最小公倍数的和是56，求这两个数.
15. 五位数$\overline{4H97H}$能被12整除，它的最末两位数字所组成的数$\overline{7H}$能被6整除，求出这个五位数.
16. 若a,b,c,d是互不相等的整数，且整数x满足等式$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=9$，求证：$4|(a+b+c+d)$.
17. 一个数是5个2，3个3，2个5，1个7的连乘积，这个数当然有许多约数是两位数，这些两位约数中，最大的是多少?
18. 求2^{400}被11除，所得的余数.
19. 证明$3^{1980}+4^{1981}$被5整除.
20. $x_i=1$或-1($i=1,2,\cdots,1990$)，证明$x_1+2x_2+\cdots+1990x_{1990}\neq 0$.

§1.2 特殊的正整数

一、知识要点

1. 完全平方数及其性质

定义1 如果一个数是一个整数的平方，则称这个数是完全平方数. 如：1、4、9、…等都是完全平方数. 完全平方数有下列性

质：

性质 1　任何完全平方数的个位数只能是 0,1,4,5,6,9 中的一个.

性质 2　奇完全平方数的十位数一定是偶数.

性质 3　偶完全平方数是 4 的倍数.

性质 4　完全平方数有奇数个不同的正约数.

性质 5　完全平方数与完全平方数的积仍是完全平方数，完全平方数与非完全平方数的积是非完全平方数.

2. 质数与合数

定义 2　一个大于 1 的整数 a，如果只有 1 和 a 这两个约数，那么 a 叫做质数.

定义 3　一个大于 1 的整数 a，如果有 1 和 a 这两个约数外，还有其他正约数，那么 a 叫做合数.

1 既不是质数也不是合数.

3. 质数与合数的有关性质

(1) 质数有无数多个.

(2) 2 是惟一的既是质数，又是偶数的整数，即是惟一的偶质数. 大于 2 的质数必为奇数.

(3) 若质数 $p|a\cdot b$，则必有 $p|a$ 或 $p|b$.

(4) 若正整数 a、b 的积是质数 p，则必有 $a=p$ 或 $b=p$.

(5) 惟一分解定理：任何整数 $n(n>1)$ 可以惟一地分解为：$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$，其中 $p_1<p_2<\cdots<p_k$ 是质数，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是正整数.

二、例题精讲

例 1　有一个四位数恰好是个完全平方数，它的千位数字比百位数字多 1，比十位数字少 1，比个位数字少 2，这个四位数是 ____.

解　设所求的四位数为 m^2，它的百位数字为 a，则有

$m^2=1000(a+1)+100a+10(a+2)+(a+3)$

$=1111a+1023=11(101a+93)$

因为 11 是质数，所以 $11|(101a+93)$，而 $101a+93=11(9a+8)+$

$(2a+5)$，所以 $11|(2a+5)$. 由题意 $a+3\leqslant 9$，故 $a\leqslant 6$，从而 $a=3$. 于是所求的四位数为 4356.

例 2 一个四位数有这样的性质：用它的后两位数去除这个四位数得到一个完全平方数(如果它的十位数是 0，就只用个位数去除)，且这个平方数正好是前两位数加 1 的平方. 例如 $4802\div 2=2401=49^2=(48+1)^2$，则具有上述性质的最小四位数是______.(1994 年四川省初中数学联合竞赛试题)

解：设具有上述性质的四位数是 $100c_1+c_2$，其中 $10\leqslant c_1,c_2\leqslant 99$，按题意，得：

$100c_1+c_2=(c_1+1)^2c_2=c_1^2c_2+2c_1c_2+c_2$，

$\therefore 100c_1=c_1c_2(c_1+2)$，即 $c_2=\dfrac{100}{c_1+2}$，因而 $(c_1+2)|100$. 又 $10\leqslant c_1\leqslant 99$，所以 $c_1=18,23,48,98$，相应地 $c_2=5,4,2,1$.

于是符合题意的四位数是 1805，2304，4802，9801，其中最小的是 1805.

评注：本题根据题意，列出不定方程，然后利用整数的整除性来求解.

例 3 3 个质数 a、b、c 的乘积等于这 3 个质数和的 5 倍，则 $a^2+b^2+c^2=$______.(1996 年"希望杯"初二试题)

分析 由题意得出 $abc=5(a+b+c)$，由此显然得质数 a、b、c 中必有一个是 5. 不妨设 $a=5$，代入前式中再设法求 b、c.

解 因为 $abc=5(a+b+c)$，所以在质数 a、b、c 中必有一个是 5. 不妨设 $a=5$，于是 $5bc=5b+5c+25$，即 $(b-1)(c-1)=6$，而 $6=2\times3=1\times6$，则 $\begin{cases}b-1=2\\c-1=3\end{cases}$ ①或 $\begin{cases}b-1=1\\c-1=6\end{cases}$ ②，由①得 $b=3,c=4$，不合题意；由②得 $b=2,c=7$，符合题意. 所以所求的 3 个质数是 5，2，7. 于是 $a^2+b^2+c^2=78$.

评注：质数问题常常通过分解质因数来解决.

例 4 试证：一个整数的平方的个位数字为 6 时，十位数字必