

# 高等工程數學

第一冊

著者

克雷斯聚格

譯者

袁定培

東華書局印行



---

**版權所有·翻印必究**

中華民國六十二年十月初版

中華民國六十八年二月七版

大學  
用書 **高等工程數學** (全四冊)

第一冊 定價新臺幣五十元整

(外埠酌加運費滙費)

著者	克	雷	斯	聚	格
譯者	袁		定		培
發行人	卓		鑫		森
出版者	臺灣東華書局股份有限公司				
	臺北市博愛路一〇五號				
印刷者	中	臺	印	刷	廠
	臺中市公園路三十七號				

---

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號  
(61090)

# 原 序

**本書目的** 此書主旨，係對研習工程及物理之讀者，介紹近代數學中，有關實際問題之各種最重要課目。各項主題，依據其在應用方面遭遇之多寡情形，精心加以選擇。近年來，在工程教育專題討論會上，所發表各種有關現代數學之新觀念，均被考慮予以搜集。無論對已在數學訓練方面，早訂有擴展課程計劃之各院校，或正準備適應一般潮流，而加強其數學訓練計劃之學術機構，此書應均適合。

基本微積分，係研讀本書前之惟一先修課程。

本書所搜集之材料，係選自美國，加拿大，及歐洲各學校大學部及研究所內，為研習工程，物理，或數學者所講授之主要課程。

**本書第三版之改進要點**，此一版本與第一、二兩版主要不同之處如下：

習題均已改變。

對工程師們所習用之數值方法，已增列一新章(第18章)，其內容適合每週三小時一學期課程之用。

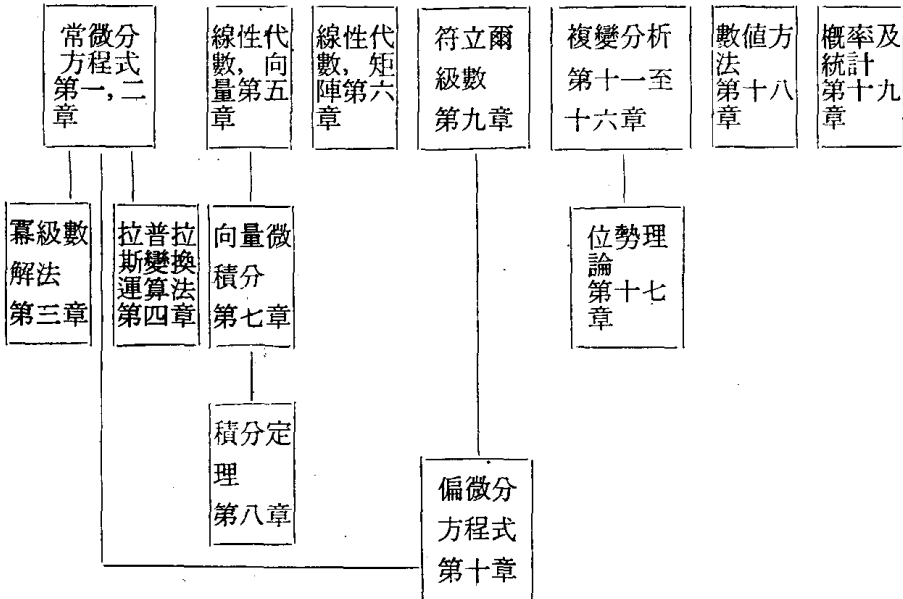
有關線性代數及分析(即包含於第五至八章內之向量和矩陣等)方面之材料，均經修改和擴充。新採取之討論方法，同時注重代數及幾何兩方面之特性。第五章中也增列有向量空間(Vector Space)，內積空間(Inner Product Space)以及泛函數(Functional)分析和應用方面其他重要觀念之介紹。

此種主要改變之動機，係由於最近十年來有關工程數學之發展，特別是由於廣泛利用自動電子計算機解答工程問題之可能性，以及線性代數方法之日增重要性所使然。

其他改進方面，包括貝索函數和雷建德多項式理論之簡要介紹。尤其是此等函數的正交特性，已提前在斯特姆-利奧維爾理論(Sturm-Liouville theory)中予以更詳盡之討論(第三章)。

包含參考文獻的附錄 1 已列入最新資料並加以補充。有關基本及高級函數之各種常用公式，亦經搜集而增列入附錄 3 內，此可替換舊版開始之 0 章。為便利使用本書起見，各類數值表格均經歸納列入附錄 4。

**本書內容及其安排** 本書各重要部分之間，其主題材料之安排，可由下列圖解表示。



本書中對常微分方程式，線性代數和向量分析，以及複變分析，此三種也許是工程師們最感重要之部門，所提供之討論，極具分量。其他如符立爾級數；偏微分方程式，數值方法，以及概率，統計等各章之長度，亦使能包含足夠之材料，以便通常各類課程採作教本之用。

短期課程可予省略之節數，均在每章之前，加以註明。為便利選用本書部分內容起見，各章均儘可能保持其獨立（即互不相關）性。

所有各章均分為若干較短之節數，每節均含有闡釋觀念、方法、結果、以及工程應用之例題及習題。

本書包含各種歷史性之註脚，原始參考文獻，以及 400 個以上之

插圖。

**參考資料** 若干用作參考及進一步研究之書籍，亦經在本書末尾附錄 1 內列表備查。部分有關特殊函數之公式，則包含在附錄 3 內。

**習題和答案** 本書備有 3500 個以上精心選擇之習題，包括簡單之一般練習，以及甚為複雜之實際應用。單號習題答案，列於本書末尾附錄 2 內。

**函數表** 綜合列入附錄 4。

**課程順序建議** 全部材料，可按下列次序研讀，並適宜分作每週 3-5 小時，四個連續學期課程之用：

第一學期：常微分方程式（第一至四章）

第二學期：線性代數及向量分析（第五至八章）。

第三學期：符立爾級數，偏微分方程式（第九，十章），數值方法（第 18 章）

第四學期：複變分析（第十一至十七章）。

另一有關**工程統計學**（每週 3-5 小時；第十九章）之課程，則可在上列之任一學期中，或以後開授。

**單獨一學期課程** 此外本書亦適宜於作一學期獨立課程，每週三小時之用，例如：

常微分方程式入門（第一，二章）

拉氏變換運算法（第四章）

向量代數及微積分（第五，七章）

矩陣及線性方程式系統（第八章）

符立爾級數及偏微分方程式（第九，十章）

複變分析（第十一至十六章）

數值分析（第十八章）

**縮短課程** 縮短課程時，可予省略之節數，均在每章前面，加以註明。

**選擇主題之準則** 本書一類之著作，究應包含那些主題？以及此等主題應如何安排和介紹？

為尋得上述各基本問題之答案起見，吾人可追溯工程數學發展之

一段歷史，此項發展顯示出如下兩種有趣事實。

1. 數學在工程科學中日趨重要，且可預測此項情形，將一直繼續下去。此種趨勢之一重要原因，係由於近代工程問題已變成如此複雜，使得吾人不可能似以往之純靠物理直覺，或僅憑過去經驗以求得其解答。此種實驗方法，過去對若干問題之解答，相當成功。但當極高速度，極大力量，極高溫度，或其他不正常條件摻入時，則無法予以解決而致失敗。且當各種具有不尋常物理特性之近代新穎材料（如塑膠，合金等）出現後，情況更加嚴重。因此上述之實驗工作，達到費時，費力之驚人複雜程度。此時數學乃可予以協助，以籌劃實驗及其構造，計算出實驗數據，並減少其尋求解答之工作與費用。

2. 過去基於純理論性之原因而發展之數學方法，在工程數學中突然變成十分重要。例如矩陣，保角寫像之理論，以及具有循環性解答之微分方程式之理論等。

以上之發展事實，對工程數學教學方面之反應如何？由於所需求之數學不斷增加，吾人應否在課程中，增加更多之主題數目，而致減少每一主題所佔有之時間？或應集中精力，選出若干具有實際重要性之少數重要事物，俾便適於教學訓練，並啓迪學生之數學思想，以發展其本身之創造能力？六十或八十年以前，無人能預知保角寫影或矩陣，將在工程業務之數學部分，佔據重要之位置。在相似情形下，欲預測何類數學理論，在今後二十或三十年，將對工程應用方面增加其重要性，亦屬極為困難。惟無論將發生之事實如何，具有良好數學訓練基礎之學者，將可適合未來之各種需要，而能利用其所學，以熟習新穎數學方法。因此工程數學教育最重要之目標，在使學生如何熟習運用數學之思考方法，並認識各項指導原理及觀念之幕後背景。此點較僅學習如何正式運用數學方法，更為重要。學者應認識數學並非搜羅戲法或秘訣，而係建立在較少數基本觀念上之一門具有實際重要性和系統性科學，其中包含有極具效力之各種統一方法。學者尤應深切體會運用數學程序於工程問題之必要，而發覺理論和應用間之相互關係，有如樹木和果實間之彼此密切性一樣。

讀者將可看出應用數學在解答工程問題時，包含三項主要步驟：

1. 將已知物理資料“翻譯”成數學形式。如此吾人可得出該物理情況之一種數學翻版模型。此模型可能即為一微分方程式，一組聯立線性方程式，或其他之數學代表形式。

2. 將此模型利用數學方法處理之，此即導致已知問題數學形式之解答。

3. 將此數學解答之結果，以物理條件解釋之。

所有以上三步驟似有相等之重要性，而本書在作各種介紹時，主要在輔助讀者，能充分發揮其完成三項步驟之技術。故有關應用問題之選擇，以具有一般性者為優先。

在若干之討論情形下，常不免依賴各種已知結果，其證明之手續或方法，常超出類似本書水準之範圍。遇有此等情形時，書中均一一加以明顯之註解。因困難之隱瞞，或事物之過度簡化，對從事職業性工作之讀者均無裨益。以上即係作者對選擇及介紹本書題材之若干指導原則。各項材料之選擇，均曾根據過去及目前之教學及研究經驗，在極為審慎之態度下，作成決定。有時甯對勸使包含工程數學中之“每一重要事物”之誘惑性建議，拒絕加以考慮。

關於如何方能對各項主題，儘可能作簡單明瞭而準確之介紹方面，作者曾加以特別之努力，其中亦包括註解符號之選擇，每章中水準之深度，逐漸增加，並避免各種艱深理論之跳越及累積。

**銘謝** 作者對其從前許多老師，同事，和同學，在編著本書時所提供之協助和建議，深致謝意。原稿之若干部分，係以油印形式，先分發給各班同學，再由彼等細閱後，加註改進建議退還。與許多工程師及數學家之討論，對作者實有極大之幫助，其中本人願特別提出柏格曼 (S. Bergman)，張伯 (P. L. Chambré)，克郎漢 (A. Cronheim)，德特曼 (J. W. Dettman)，赫爾索 (R. G. Hesel)，克利普 (E. C. Klipple)，孔氏 (H. Kuhn)，曼氏 (H. B. Mann)，馬克思 (I. Marx)，孟羅 (W. D. Munroe)，浦氏 (H. W. Pu)，瑞多 (T. Rado) (十)，史密斯 (H. A. Smith)，史本賽 (J. P. Spencer)，

托德 (J. Todd), 懷斯 (H. J. Weiss), 及衛南斯基 (A. Wilansky) 等在美國之各位教授, 多倫多 (Toronto) 之柯克斯特 (H. S. M. Coxeter) 教授, 以及在歐洲之保羅 (B. Baule), 彭克 (H. Behnke), 費羅原 (H. Florian), 格拉夫 (H. Graf), 何享伯格 (F. Hohenberg), 克羅特 (K. Klotter), 賓氏 (M. Pinl), 路特 (F. Reutter), 史密登 (C. Schmieden), 恩格 (H. Unger), 華爾特 (A. Walther) (†), 衛南德 (H. Wielandt) 教授等。在此作者僅能表示其誠摯之謝意。

最後, 本人應向約翰·衛律和孫氏公司 (John Wiley and Sons) 對其編印此版本書時之有效合作和審慎精神, 表示感謝。

許多讀者所提供之寶貴建議, 均在編印此版時, 予以採納。其他任何對改進本書之批評和意見, 將受本人之衷心歡迎。

愛文-克雷斯聚格  
(Erwin Kreyszig)



# 高等工程數學

## 第一冊目錄

### 第一章 首階常微分方程式

1.1	基本觀念及認識	1
1.2	幾何意義、等斜線	10
1.3	可分離變數方程式	13
1.4	可化成分離變數形式之方程式	22
1.5	恰當微分方程式	25
1.6	積分因子	28
1.7	線性首階微分方程式	31
1.8	參數變化法	37
1.9	電路問題	39
1.10	曲線族，正交軌線	46
1.11	彼卡德疊代法	52
1.12	解答之存在性和唯一性	56

### 第二章 線性常微分方程式

2.1	二階齊次線性方程式	63
2.2	常係數二階齊次方程式	67
2.3	通解。基本解系	70
2.4	特性方程式之複根、始值問題	74
2.5	二重根之特性方程式	78
2.6	自由振動	82
2.7	高奇方程式	92

2.8	解答之存在性和唯一性	94
2.9	任意階數之齊次線性方程式	102
2.10	常係數任意階齊次線性方程式	106
2.11	非齊次線性方程式	109
2.12	解非齊次線性方程式之一法	112
2.13	強迫振動, 諧振	116
2.14	電路問題	124
2.15	藉複數求特解法	128
2.16	非齊次方程式之一般解法	132

### 第三章 微分方程式之冪級數解法, 正交函數

3.1	冪級數解法	136
3.2	冪級數解法之理論基礎	140
3.3	雷建德方程式, 雷建德多項式	146
3.4	推廣之冪級數解法, 指標方程式	151
3.5	貝索方程式, 第一類貝索函數	167
3.6	第二類貝索函數	174
3.7	正交函數之集合	180
3.8	斯特姆—利奧維爾問題	185
3.9	雷建德多項式及貝索函數之正交性	191

### 第四章 拉普拉斯變換運算法

4.1	拉普拉斯變換式、反變換式、線性	198
4.2	微分和積分式之拉氏變換	205
4.3	常微分方程式之變換	211
4.4	部分分式法	214
4.5	例題及應用	220
4.6	拉氏變換式之微分及積分	227
4.7	單位階梯函數	230

4.8.	$t$ -軸上之移位	235
4.9	循環函數	241
4.10	部分拉氏變換公式表	253
附錄 1	參考資料	1
附錄 2	單號習題答案	20
附錄 3	若干特殊函數之公式	38
附錄 4	數值表	47
	中英文名詞對照表	66

# 高等工程數學

## 第二冊 目錄

### 第五章 線性代數第 I 部分：向量

5.1	純量和向量	258
5.2	向量之分量	261
5.3	向量加法，向量乘以純量	264
5.4	向量空間，線性相關和獨立	268
5.5	內積（點積）	274
5.6	內積空間	281
5.7	向量積（叉積）	283
5.8	以分量表示向量積	286
5.9	純量三乘積，其他連乘積	293

### 第六章 線性代數第 II 部分：矩陣及行列式

6.1	基本觀念	300
6.2	矩陣加法，矩陣乘以數字	303
6.3	矩陣之換位，特殊矩陣	305
6.4	矩陣乘法	308
6.5	線性方程式系統，高斯消去法	319
6.6	二階及三階行列式	326
6.7	任意階之行列式	333
6.8	矩陣之秩數，按列相當	346

## 2 高等工程數學 (二)

6.9	線性方程式系統, 解答之存在和一般性質	349
6.10	線性相關及秩數, 奇性矩陣	353
6.11	線性方程式系統, 行列式解法	356
6.12	矩陣之反式	363
6.13	雙線性式, 二次式, 赫米特式, 及反赫米特式	368
6.14	特值, 特性向量	374
6.15	赫米特式, 反赫米特式, 及單元矩陣之特值	382

## 第七章 向量微分・向量場

7.1	純量場及向量場	389
7.2	向量微積分	394
7.3	曲線	397
7.4	弧長	401
7.5	切線, 曲率和撓率	404
7.6	速度及加速度	409
7.7	多變數函數之鏈鎖規則及均值定理	414
7.8	方向導數, 純量場之梯度	419
7.9	坐標系統及向量分量之變換	428
7.10	向量場之散度	433
7.11	向量場之旋度	439

## 第八章 線積分和面積分・積分定理

8.1	線積分	442
8.2	線積分之求值	446
8.3	雙重積分	451

8.4	雙重積分改爲線積分之變換	460
8.5	曲面	468
8.6	切平面、第一基本形式、面積	471
8.7	面積分	479
8.8	三重積分、高斯散度定理	486
8.9	散度定理之結果和應用	492
8.10	司托克定理	499
8.11	司托克定理之結果及應用	503
8.12	與路徑無關之線積分	506
附錄 1	參考資料	1
附錄 2	單號習題答案	20
附錄 3	若干特殊函數之公式	34
附錄 4	數值表	42
	中英文名詞對照表	61

# 高等工程數學

## 第三冊目錄

### 第九章 符立爾級數及積分

- |     |                    |     |
|-----|--------------------|-----|
| 9.1 | 循環函數、三角級數          | 518 |
| 9.2 | 符立爾級數、尤勒公式         | 521 |
| 9.3 | 任意週期之函數            | 530 |
| 9.4 | 偶函數及奇函數            | 534 |
| 9.5 | 半幅展開式              | 540 |
| 9.6 | 不用積分決定符立爾係數        | 545 |
| 9.7 | 強迫振動               | 552 |
| 9.8 | 利用三角函數多項式之近似法、平方誤差 | 556 |
| 9.9 | 符立爾積分              | 559 |

### 第十章 偏微分方程式

- |      |               |     |
|------|---------------|-----|
| 10.1 | 基本觀念          | 570 |
| 10.2 | 繩索之振動、一度波形方程式 | 573 |
| 10.3 | 分離變數法（乘積法）    | 576 |
| 10.4 | 波形方程式之第阿倫伯解法  | 585 |
| 10.5 | 一度熱傳導         | 592 |
| 10.6 | 無限長桿內之熱量傳導    | 599 |
| 10.7 | 薄膜之振動、二度波形方程式 | 604 |

10.8	長方形薄膜	607
10.9	極坐標之拉氏運算	617
10.10	圓形薄膜、貝索方程式	620
10.11	拉普拉斯方程式、位勢	627
10.12	球面坐標內之拉氏方程式、雷建德方程式	632

## 第十一章 複變解析函數

11.1	複數	639
11.2	極限、導數、解析函數	650
11.3	高奇—利曼方程式、拉普拉斯方程式	655
11.4	有理函數、根	662
11.5	指數函數	666
11.6	三角函數與雙曲函數	669
11.7	對數、一般乘冪	674

## 第十二章 保角寫像法

12.1	寫像法	679
12.2	保角寫像法	684
12.3	線性分數變換	690
12.4	特殊線性分數變換	696
12.5	其他基本函數之寫像法	702
12.6	利曼曲面	711

## 第十三章 複變積分

13.1	複平面內之線積分	717
------	----------	-----



13.2	複變線積分之基本性質	725
13.3	高奇積分定理	728
13.4	以不定積分法求線積分值	737
13.5	高奇積分公式	741
13.6	解析函數之導數	744

## 第十四章 數列與級數

14.1	數列	749
14.2	級數	759
14.3	級數收斂及發散之測驗法	766
14.4	級數運算	775
14.5	幕級數	779
14.6	以幕級數表示之函數	789
附錄 1	參考資料	1
附錄 2	單號習題答案	20
附錄 3	若干特殊函數之公式	34
附錄 4	數值表	42
	中英文名詞對照表	61