

经典流体力学 非线性声学 和近代物理

[美] S. 普特曼 讲授
王本仁 吴君汝 译

科学出版社

53.57

651

1

DG 65/05

经典流体力学、 非线性声学 and 近代物理

〔美〕S. 普特曼 讲授

王本仁 吴君汝 译

科学出版社

1980

内 容 简 介

本书系统论述了声学的经典理论及声学与现代物理学的内在联系,对非线性声学的最新发展作了特别论述。全书共分十五章,其主要内容有:高次谐波和冲击波,色散和声学孤子,声学的 W.K.B. 近似法,超流的一流体理论,朗道二流体理论,超流 ^4He 和超导电性,宏观量子效应,超流氦中的共振模式转换,非线性共振,通向混沌之路,量子声学,量子模式耦合和零点声学噪声的起源。

经典流体力学、 非线性声学 and 近代物理

[美] S. 普特曼 讲授

王本仁 吴君汝 译

责任编辑 韦秀清

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1989 年 9 月第 一 次印刷 开本: 787×1092 1/32

1989 年 9 月第一次印刷 印张: 3 2/3

印数: 0001—1 770 字数: 84,000

ISBN 7-03-001247-X/O·276

定价: 3.40 元

序 言

一个尚未入门的研究工作者会合乎逻辑地提出这样的问题：为什么要学习非线性声学？虽然关于非线性现象在对称破缺、滞后效应和不可逆性方面的重要性，一般说来已有公论，然而，与光学和等离子体物理学相比，声学又有什么特殊性呢？

声学中所能达到的非线性程度远大于非线性光学介质中所能达到的程度。声强级在 $10^{-3}\text{W}/\text{cm}^2$ 时，我们就能清楚地观察到很强的非线性效应；但在非线性光学中，尽管强度高到 $3 \times 10^8\text{W}/\text{cm}^2$ ，我们所能观察到的非线性效应也不到声学中的 0.01%。这种差别的根本原因可能是洛伦兹协变理论的线性特性，而任何封闭的伽利略协变理论必然是非线性的。再强大的激光器也不能改进非线性光学有关的状态，这是因为在强度达到 $10^8\text{W}/\text{cm}^2$ 时，激光早已开始破坏晶体结构了。因此利用声学我们可以很容易进入光学所无法获得的非线性物理的新领域。

与其他系统（如等离子体系统）相比较时，我们必须考虑到输运系数的大小。在磁流体介质和许多声学介质中，这些系数可以很大，然而自然界存在一种特殊的系统，在其中我们可以使这种输运系数任意地小，这种系统就是超流液体氦系统。由于液氦是各向同性的中性介质，因而它给研究工作者提出要用声学方法作为主要探头来研究它的物性。超流液氦的存在是我们研究声学的一个重要原因，它极小的内摩擦更使非线性现象显得格外重要。

正如 Rudenko 强调指出的：非线性声学的理论界限作为一个学科来说并不是很清楚的，也许更好的名词应为非线性波动学。然而我们必须记住：由于以上所讨论过的实际情况，显然非线性声学总是处于非线性波动学的中心位置。

这本讲义是我为 1984 年春天在南京大学讲授非线性声学而写的。讲义本身比较详细，而在当时我并未花精力列出较完整的参考资料，值讲义翻译出版之际，我把参考文献按章列于讲义的最后，以进一步改进这本讲义的质量。

S. 普特曼 (Seth Putterman)

1985 年元月于洛杉矶

致 谢

1984 年春,我荣幸地有机会在南京大学物理系和声学研究所讲授非线性声学。这次访问是由魏荣爵教授通过联合国开发署(联合国教科文组织的下属组织)的资助组织的。在此,我特别以我个人的名义感谢魏教授、吴文虬教授和王本仁教授的好客、富有激励的启发性的讨论、以及为此所做的一切努力。我也要感谢在巴黎的联合国教科文组织的 Ghosh 博士和在北京的联合国开发署的 W. Scholtes 博士在人事方面有力的帮助和组织工作。

最后,我要表示对吴君汝的极大赞赏和感谢,由于他在非线性声学方面的造诣,作为我讲学时的翻译,使本讲座的质量大为提高。

S. 普特曼

目 录

序言	i
致谢	iii
第一章 引论: 基本方程的回顾	1
第二章 线性声学 and 表面波的回顾	7
第三章 高次谐波和冲击波	10
第四章 色散和声学孤子	15
§ 4.1 非线性色散流体力学	15
§ 4.2 Korteweg de Vries (KdV) 型孤子	16
§ 4.3 包络型孤子	17
§ 4.4 非传播型孤子, 极化子	20
第五章 表面水波和粒子的计算	27
第六章 声与声间散射	32
§ 6.1 直接过程和声的衰减系数	32
§ 6.2 Landau-Rumer 过程	36
§ 6.3 复原碰撞和声的玻耳兹曼方程、声学噪声的起源	39
第七章 声学的 W. K. B. 近似法	41
第八章 超流的一流体理论。朗道二流体理论的导出	46
第九章 超流 ^4He 和超导电性	50
第十章 宏观量子效应	56
§ 10.1 旧量子理论	56
§ 10.2 宏观量子化和二维相变	61
§ 10.3 宏观量子叠加态	65
第十一章 超流氦中的共振模式转换	72
第十二章 非线性共振	80

§ 12.1	驱动共振.....	80
§ 12.2	参量共振,次谐波	86
第十三章	非线性力学中的自相似.....	93
第十四章	通向混沌之路.....	99
第十五章	量子声学;量子模式耦合和零点声学噪声的 起源.....	108
参考文献		113

第一章 引论：基本方程的回顾

五个物理变量足以构成描述简单流体系统的状态特征的变量完全集合，也是推导流体力学方程的基本假设。通常常用的五个变量是

$$\begin{aligned} \rho & \text{——密度(克/厘米}^3\text{),} \\ s & \text{——比熵(尔格/克} \cdot \text{度),} \\ \mathbf{v}(v_x, v_y, v_z) & \text{——速度(厘米/秒).} \end{aligned} \quad (1-1)$$

同样也可选用 $\mathbf{J}, \rho, U$ 五个变量：

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \rho \mathbf{v} \text{——动量密度.} \\ U &= U_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 \text{——总能密度.} \end{aligned} \quad (1-2)$$

这里须注意的是，我们把 U_0 看作是密度和熵的函数，即 $U_0 = U_0(\rho, s)$ 。如果考虑到流体是由近阿伏伽德罗常数那么多的相互之间具有强相互作用的粒子所组成的系统，那么用少数几个宏观变量就足以描述这个连续介质系统，确实是奇妙的。在流体动力学方程中，所有的变量都被看作是位置 $\mathbf{r}$ 和时间 t 的函数，即

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \\ \rho &= \rho(\mathbf{r}, t), \\ s &= s(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

这些物理量随时间而变化的规律遵从下述宏观第一原理：

1. 质量守恒原理
2. 动量守恒或连续介质的牛顿定律
3. 能量守恒原理

4. 伽利略协变性

5. 热力学第一和第二定律.

在一定的体积中质量守恒, 即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0. \quad (1-3)$$

对式 (1-3) 在一定体积内积分, 可得

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho d^3r = - \int_V (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) d^3r = - \int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1-4)$$

这里, S 是包围体积的表面积. 式 (1-4) 是守恒定律的典型表达式, 即所考虑的物理量的净变化是由于与该物理量相应的通过该体积表面积的通量流所造成. 方程 (1-4) 也表明了质量不能产生和消失的原理.

熵 s 的守恒方程是从热力学第二定律出发、在忽略所有可产生熵的不可逆过程 (例如粘滞发热和热扩散等) 的假设前提下, 推导而得的, 即

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v}) = 0, \quad (1-5)$$

或者把式 (1-3) 代入, (1-5) 又可写为

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0. \quad (1-6)$$

即在随着流体粒子运动而运动的参考系中, 熵的变化为零. 这里所谓对流导数

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \quad (1-7)$$

是流体粒子某种性质对时间的全导数. $\frac{\partial}{\partial t}$ 仅反映了某物理量在空间某固定点的变化, 而附加项 $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ 是由于粒子在空间的位置是时间的函数而引起的修正.

描写速度场 $\mathbf{v}$ 的方程是连续介质系统中的牛顿定律, 可

以写为

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \equiv \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla_i) \mathbf{v} \right] = \mathcal{F}, \quad (\text{I-8})$$

这里重复的下标表示求和。\$\mathcal{F}\$ 是单位体积的力，该力产生了单位体积的加速度 \$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}\$。\$\mathcal{F}\$ 是 \$\rho\$ 和 \$s\$ 的函数，不同的流体有不同的 \$\mathcal{F}\$ 表达式。为使理论封闭，\$\mathcal{F}\$ 的具体表达式必须知道。对于简单流体(水,酒精,液氮等),

$$\mathcal{F} = -\nabla p(\rho, s), \quad (\text{I-9})$$

这里 \$p\$ 是压强 (力/厘米²)。不同流体具有不同的状态方程 \$p(\rho, s)\$, 它是方程式中区别流体的唯一特征。

如果设

$$\mathcal{F} = \rho \nabla \left(\frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right), \quad (\text{I-10})$$

那么 (I-3) 和 (I-8) 式给出了一个质量为 \$m\$ 的粒子的薛定谔方程。这可作如下变换而推得

$$\phi = \sqrt{\rho} e^{i\phi},$$

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\hbar}{m} \right) \nabla \phi, \quad (\text{I-11})$$

这就是众所周知的 Madelung 变换。

即使 \$\mathcal{F}\$ 具有由式 (I-9) 给出的形式, 我们将会看到在某些情况下, 特别当我们处理某些孤子问题时, 式 (I-3) 和 (I-8) 会给出薛定谔型的方程形式。

更加复杂的 \$\mathcal{F}\$ 的表示式可引起色散(也即频率 \$\omega\$ 不再是波数 \$k\$ 的线性函数的情形)。特别当 \$\mathcal{F}\$ 中包含由重力引起的外力时, 即

$$\mathcal{F} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}, \quad (\text{I-12})$$

那么就导致水表面波的色散关系。既然 (I-12) 式是如此重要, 我们应写下相应的牛顿定律:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \cdot \nabla_j) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \quad (\text{I-13})$$

把式 (I-3) 乘以 $\mathbf{v}$ 再与 (I-13) 式相加, 可以得到

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) = \rho g_i. \quad (\text{I-14})$$

当 $\mathbf{g} \rightarrow 0$ 时, (I-14) 为动量守恒定律.

如果我们再注意到

$$dU_0 = d(\rho \varepsilon), \quad (\text{I-15})$$

这里 ε ——能量/克, 以及流体粒子的热力学第一和第二定律

$$d\varepsilon = T ds - p d(1/\rho), \quad (\text{I-16})$$

那么由式 (I-2)、(I-3)、(I-6) 和 (I-13) 给出

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{v}(U + p)] = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}, \quad (\text{I-17})$$

这就是能量守恒定律. 由于 $\mathbf{g}$ 是保守场, 因此有

$$\mathbf{g} = -\nabla Q.$$

式 (I-17) 可以写成:

$$\frac{\partial}{\partial t} (U + \rho Q) + \nabla \cdot [\mathbf{v}(U + p + \rho Q)] = 0. \quad (\text{I-18})$$

方程式 (I-3)、(I-6) 和 (I-13) 是流体在重力场中作可逆运动的最基本的五个方程. 基本的边界条件是在固体边界处, 速度场的垂直分量应等于固体边界的速度.

在小振幅和线性近似下, 这些方程式描写了声波和流体表面波的传播.

这些方程式的重要特征是它们的非线性特性. 即使认为 s 是常数, 因而 $p = p(\rho)$, 非线性也会从对流导数和对胡克定律的偏离中出现. 将 $p(\rho)$ 在 ρ_0 参考态附近展开, 得

$$p(\rho) = p(\rho_0) + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \delta \rho + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_0 \frac{(\delta \rho)^2}{2} + \dots, \quad (\text{I-19})$$

这里 $\delta\rho = \rho - \rho_0$. 所有的导数都在 s 为常数的条件下计算. 式 (I-3) 和 (I-14) 变为 ($g = 0$)

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \delta\rho = \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \left[\rho v_i v_j + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_0 \frac{(\delta\rho)^2}{2} + \dots \right], \quad (\text{I-20})$$

这里

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s. \quad (\text{I-21})$$

方程 (I-20) 右边的非线性项的来源: (1) 声波速度不是常数, (2) 对流导数引起速度的二次项.

物理上非线性项会引起高次谐波 (在某些情况下会产生次谐波), 一般情况下还会引起波与波之间相互作用. 非线性是冲击波和孤子产生的根源. 非线性可用来说明涡旋运动 (开耳芬定理) 及最后导致湍流谱. 在电介质中, 热运动是用振动来集中表现的, 对这样的系统, 非线性项描写入射声波和热噪声背景之间的相互作用, 这使我们可用流体力学的方程去计算声波的衰减系数.

对于在重力场中的不可压缩流体 ($\rho = \text{常数}$) 的等熵 ($s = \text{常数}$) 运动, 可以用速度势 ϕ ($\mathbf{v} = \nabla\phi$) 及高于平衡值 ζ_0 的流体表面高度 $\zeta(x, y, t)$ 来描述. 将它们代入 (I-3) 和 (I-13) 式中, 可以得到

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (\text{I-22})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + g\zeta + \frac{p}{\rho_0} = \text{常数}, \quad (\text{I-23})$$

(I-23) 式是伯努利定律的一种形式. 假如我们忽略表面张力, 那么在一般情况下由于流体表面上的密度远远小于流体的密度, 则有 $p = p_g = p_0$ (p_g 为汽相的压力, 在临界点附近要特别小心!), 这样可得;

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \right]_{z=\zeta} + g \delta \zeta = 0, \quad (I-24)$$

这里括号内的项取 $z = \zeta$ ，即取在流体表面处的值。我们已取 ζ_0 是平衡面，所以 $\delta \zeta = 0$ ，也即有 $\phi = \phi_0 = \text{常数}$ 而无扰动。为了使理论完备，还需一个联系 ζ 和 ϕ 的方程

$$\frac{D\zeta}{Dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + [\nabla \phi \cdot \nabla]_{z=\zeta} \zeta = \left[\frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{z=\zeta}, \quad (I-25)$$

方程 (I-25) 的意义是液体自由表面高度对时间的全导数等于液体在自由表面处的速度。

方程 (I-22)、(I-24) 和 (I-25) 是水表面波的基本方程。由于对流导数项的存在，它们是非线性的；又由于重力场的存在，它们是色散的。其结果在水表面(至少)存在三种孤子： KdV 型、包络型和极化子型(吴粒子型)。

原则上可以这样求解这些方程，首先找拉普拉斯方程 (I-22) 式的解，然后再加上高度非线性的边界条件来求解。

第二章 线性声学和表面波的回顧

在小振幅的极限情况下，流体力学方程给出 ω 和 k 之间关系的色散方程。为了得到这个方程，我们首先在某恒定参考状态附近进行线性化：

$$\begin{aligned} s &= s_0 + \delta s, \\ \rho &= \rho_0 + \delta \rho, \\ v &= \delta v. \end{aligned} \quad (\text{II-1})$$

则 (I-6) 式变为

$$\frac{\partial \delta s}{\partial t} = 0, \quad (\text{II-2})$$

即小振幅振动是等熵运动。从 (I-20) 式我们得到关于 $\delta \rho$ 的二阶方程

$$\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \delta \rho = 0, \quad (\text{II-3})$$

事实上，这是个波动方程。如取

$$\delta \rho = \rho' \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \quad (\text{II-4})$$

的平面行波解，我们可得到

$$\omega = c_0 k. \quad (\text{II-5})$$

此方程给出了波的传播速度 $c_0 = \frac{\omega}{k}$ 。如果我们对速度也

在某常数附近线性化，即

$$v = v_0 + \delta v,$$

那么连续性方程给出

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + (v_0 \cdot \nabla) \delta \rho = -\rho_0 \nabla \cdot \delta v, \quad (\text{II-6})$$

将此方程和方程 (I-20) 一起, 可以推得

$$\frac{D_0^2}{Dt^2} \delta\rho - c_0^2 \nabla^2 \delta\rho = 0, \quad (\text{II-7})$$

这里

$$\frac{D_0}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla). \quad (\text{II-8})$$

式 (II-7) 的行波解满足下述关系:

$$(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)^2 = c_0^2 k^2, \quad (\text{II-9})$$

此式描述了运动介质中声的多普勒移动。若 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{v}_0$ 平行, 那么 $\omega = v_0 k \pm c_0 k$ 。式 (II-6) 给出声的平面行波的速度振幅和密度摆幅之间要满足的关系式:

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \delta \mathbf{v} = \pm c_0 \delta \rho / \rho_0, \quad (\text{II-10})$$

这里 $\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k}$ 是单位波矢量, 公式中正号对应于平面波沿 x 轴正向传播。

流体重力波的响应和色散关系可这样推得: 首先在线性近似下求解水深为 d 的槽中拉普拉斯方程, 并注意到这里面的 z 坐标是从流体自由表面开始测量的, 那么

$$\phi = A[e^{k(z+d)} + e^{-k(z+d)}] \cos(kx - \omega t). \quad (\text{II-11})$$

边界条件(见图 1)为

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=-d} = 0, \quad (\text{II-12})$$

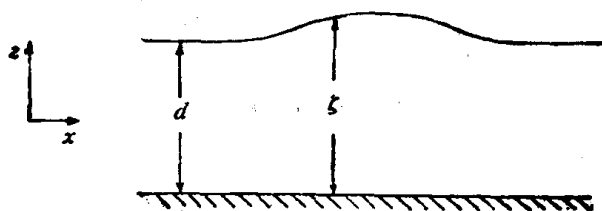


图1 边界条件

在线性近似下, (I-24) 和 (I-25) 式可以用计算 $z=0$ 的值来代替, 即

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right) = 0, \text{ 当 } z=0 \text{ 时.} \quad (\text{II-13})$$

把式 (II-11) 代入, 可得

$$\omega^2 = gk \tanh(kd). \quad (\text{II-14})$$

如果表面张力 σ 存在, 则压力的边界条件会因表面的弯曲而改变, 即

$$p - p_s = \left[\frac{\sigma}{R_1(x, y, t)} + \frac{\sigma}{R_2(x, y, t)} \right],$$

这里 R_1 和 R_2 是流体表面的主曲率半径. 对于 (II-11) 式那样的平面波, 将 (I-24) 式线性化后变为

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\zeta - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right]_{z=0} = 0. \quad (\text{II-15})$$

式 (II-13) 和 (II-14) 变为

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z \partial x^2} \right]_{z=0} = 0, \quad (\text{II-16})$$

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\lambda k^3}{\rho} \right) \tanh(kd).$$

极限情况为

$$kd \ll 1 \quad \omega^2 = gdk + \frac{\sigma dk^3}{\rho}, \quad (\text{II-17})$$

$$kd \gg 1 \quad \omega^2 = gk + \frac{\sigma k^3}{\rho}. \quad (\text{II-18})$$

式 (II-17) 用于长重力波的情况, 式 (II-18) 则用于载有涟漪的短重力波. 我们看到, 一般情况下水波是高度色散的:

$$\frac{k^4}{\omega} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \sim 1. \quad (\text{II-19})$$

• • •