应用数学丛书

矩阵理论

王耕禄　史荣昌　编著

国防工业出版社

内容简介

本书比较全面地介绍了矩阵理论的基础知识。全书由两大部分组成，第一部分主要介绍矩阵代数、矩阵变换和二次型；第二部分介绍了矩阵的微分、积分、矩阵函数和矩阵方程等内容。

本书可供高等工科院校的大学生和研究生作为矩阵理论课程的参考书，也可供工程技术人员参考。

应用数学丛书

矩阵理论

王耕禄　史荣昌　编著

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

昌平县马池口印刷厂印装

850×1168 1/32 印张12⁷/₈ 339千字

1988年5月第一版　1988年5月第一次印刷　印数：0,001—4,650册

ISBN7-118-00231-3/O14　定价：3.80元

出 版 说 明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术领域的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相关，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深，广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程，控制工程，系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作，更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学，应用数学有关领域的基础介绍，应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成体系，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生，教师、从事科研生产的工程师参考。

前　言

近年来，由于自然科学和工程技术的迅速发展，电子计算机的普遍使用，理论研究的深入，使得矩阵理论的应用日益广泛。因为矩阵的方法在处理问题时有既简洁又明了的优点，因而越来越得到人们普遍的重视，矩阵的方法必将成为探索新理论的重要工具。

本书比较详细地介绍了矩阵理论的基础知识。全书分为两大部分，第一部分，即第一章至第七章，主要阐述矩阵代数和矩阵变换。在矩阵代数部分加强了分块矩阵的运算，并引入了矩阵的克罗内克尔乘积；在矩阵变换部分讨论了矩阵的等价变换，合同变换和相似变换，以及矩阵在等价、合同、相似意义下的标准形；给出了判别二次型正（负）定、半正（负）定的方法。第二部分是矩阵分析，阐述了矩阵范数，矩阵的微分和积分，矩阵函数，矩阵方程等内容。在最后两章结合应用介绍了状态转移矩阵的概念，线性振动和线性系统的稳定性。又介绍了瑞利商，圆盘定理和广义逆矩阵等概念。

阅读此书需要具备行列式和微积分的基本知识。书中有少数定理的证明没有给出，这是出于两种考虑，一种是证明比较简单，读者可以自己完成，另一种则是由于要用到较多的数学知识，因此将证明略去，只叙述结论。

最后，请读者对本书多加批评与帮助，使本书的缺点和错误能得以纠正。

目　录

第一章　矩阵及其运算

§1.1　矩阵的概念

定义1.1　数域[●] F中的$m\times n$个数排成的m行n列的矩形阵列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为F上的$m\times n$矩阵，其中$a_{ij}(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$称为矩阵$A$的元素。

通常用大写字母A、B、C…来代表矩阵。矩阵A也可简记为(a_{ij})，为指明行数和列数也记为$A_{m\times n}$或$A=(a_{ij})_{m\times n}$，a_{ij}表示位于矩阵第i行第j列的元素，a_{ij}也称为矩阵A的(i,j)元素。

如果一个矩阵的行数与列数相同，都等于n，则称该矩阵为**n阶方阵**。

如果F上的两个矩阵A和B都是$m\times n$矩阵，且对应元素相等：$a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，就称**$A$与$B$相等**，记为$A=B$。例如，若

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -3 & b \end{pmatrix}$$

则必有$a=7$，$b=8$。

● 所谓数域是指复数的一个集合，其中至少含有两个不同的数，并且集合中任意两个数的和、差、积、商（除数不能为零）仍在该集合中。例如一切实数的集合（用R表示）和一切复数的集合（用C表示）均为数域。

由一行组成的矩阵称为行矩阵；由一列组成的矩阵称为列矩阵。若一个矩阵的元素全是零，就称该矩阵为**零矩阵**，记为$O_{m\times n}$，有时也简记为O[一]。

在主对角线以外的所有元素均为零的n阶方阵

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_n \end{pmatrix}$$

称为**对角矩阵**，记为diag $(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$。当$k_1=k_2=\cdots=k_n=1$时，则称此对角矩阵为**单位矩阵**，记为$I_n$或$I$，因此$I_n=(\delta_{ij})$[二]。

现在我们考察由矩阵的某些元素所构成的矩阵。设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，A的第$i_1,\ i_2,\ \cdots,i_k$行，第$j_1,j_2,\cdots,j_k$列的元素构成的方阵

$$\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant m \\ 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n \end{matrix}$$

称为矩阵A的k**阶子阵**，记为$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$。

例1 设

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & f \\ c & d & e & f & g \\ d & e & f & g & h \end{pmatrix}$$

则

[一] 以后，零矩阵也用数零0表示，根据上下文是不难辨认的。

[二] $\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$，$\delta_{ij}$称为克罗内克尔符号。

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\2 & 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & c & e\\c & d & f\\e & f & h\end{pmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & e\\c & f\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=c\text{ ㊀}$$

这些均为A的子阵。

A的子阵$A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$的行列式称为**矩阵$A$的$k$阶子式**，记为$\det A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$。方阵$A$的最大子式是$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$，称为**矩阵$A$的行列式**，记为$\det A$。当$\det A=0$时，称$A$为**奇异矩阵**，否则$A$称为**非奇异矩阵**。

n阶方阵A的k阶子阵

$$A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}\qquad 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$$

称为A的**k阶主子阵**，$\det A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}$称为$A$的**$k$阶主子式**，特别的，称子阵

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}\qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

为A的**k阶顺序主子阵**，而$\det A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}$称为$A$的**$k$阶顺序主子式**。例如，

㊀ 我们把一阶矩阵(a)也常记为a。

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

的主子式为

$$a,\quad e,\quad i,\quad \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

$$\det A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

顺序主子式为

$$a,\quad \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix},\quad \det A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

我们把数域F上$m\times n$矩阵的全体所构成的集合记为$F^{m\times n}$。

定义1.2 矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$的不等于零的子式的最高阶数称为矩阵A的**秩**，记为$r(A)$。

显然，$r(A)\leqslant \min(m,\ n)$。$n$阶方阵$A$如果它的秩是$n$，即$\det A\neq 0$，称$A$为**满秩矩阵**（即**非奇异矩阵**），否则就称A为**降秩矩阵**（即**奇异矩阵**）。零矩阵没有不等于零的子式，故零矩阵的秩是零。

定理1.1 矩阵$A_{m\times n}$的秩等于r的充分必要条件是$A_{m\times n}$中存在一个不等于零的r阶子式，而A中任何$r+1$阶子式（如果有的话）都等于零。

证明 必要性是显然的。

充分性 已知A的$r+1$阶子式都等于零，根据行列式按一行展开的定理可知：A的$r+2$阶子式也都等于零。这是因为任何一个$r+2$阶子式均可表为$r+1$阶子式的线性组合。由此可知，A中任何阶数大于$r+1$的子式都等于零。因此矩阵A中不

为零的子式的最高阶数为 r，即 A 的秩等于 r。证毕。

例 2 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

因为 $\det A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}=30\neq 0$，而所有的 3 阶子式全为 0，故 $r(A)=2$。

§1.2 矩阵的加法与乘法

以下讨论的矩阵，都是指的数域 F 上的矩阵。

一、加法

定义1.3 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，以 A，B 对应元素的和为元素而构成的矩阵，称为 A，B 之和，记为 $A+B$，即

$$A+B\triangleq(a_{ij}+b_{ij})^{●}$$

得出两个矩阵和的运算称为矩阵的**加法**。

由定义可知，只有行数、列数分别相等的矩阵才能相加。例如

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+c_1 & a_2+c_2 & a_3+c_3 \\ b_1+d_1 & b_2+d_2 & b_3+d_3 \end{pmatrix}$$

显然有 $A+0=A$。

加法运算满足：

（1）$A+B=B+A$（交换律）

（2）$(A+B)+C=A+(B+C)$（结合律）

这里 A，B，$C\in F^{m\times n}$。

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，我们称 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为 A 的**负矩阵**，记为 $-A$。显然有 $A+(-A)=0$。有了负矩阵，两个矩阵的差可定

● $\triangleq$ 表示"根据定义相等"。

义为：

$$A-B \triangleq A+(-B)$$

二、乘法

定义1.4 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times p}$，A与B的乘积是矩阵$C=(c_{ij})_{m\times p}$，其中

$$c_{ij} \triangleq \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$$

记为$C=AB$。

由矩阵乘积的定义可知：矩阵A与B的乘积C是一个$m\times p$的矩阵，C的位于第i行第j列的元素c_{ij}等于前一矩阵A的第i行与后一矩阵B的第j列的对应元素乘积之和。并且还要求前一矩阵的列数与后一矩阵的行数相等，否则不能相乘。如果两个矩阵是同阶方阵，那么总是可乘的。

得出矩阵乘积的运算称为矩阵的乘法。

例如

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 & a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3 \\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 & b_1c_1+b_2d_2+b_3d_3 \end{pmatrix}$$

$$(b_1 b_2 \cdots b_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1 b_2 \cdots b_n)=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ & \cdots\cdots & & \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1 a_{11} & k_2 a_{12} & \cdots & k_n a_{1n} \\ k_1 a_{21} & k_2 a_{22} & \cdots & k_n a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_1 a_{m1} & k_2 a_{m2} & \cdots & k_n a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1 a_{11} & k_1 a_{12} & \cdots & k_1 a_{1n} \\ k_2 a_{21} & k_2 a_{22} & \cdots & k_2 a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_m a_{m1} & k_m a_{m2} & \cdots & k_m a_{mn} \end{pmatrix}$$

有了矩阵的乘法，任一线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

就可简洁地用矩阵方程的形式表成：

$$AX = B$$

其中 A 表示线性方程组的系数矩阵：$A=(a_{ij})_{m\times n}$，X，B 分别为

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

在作矩阵的乘法运算时，我们应注意：矩阵的乘法一般是不满足交换律的。例如

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}$$

而

$$BA=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

故 $AB\neq BA$，即矩阵的乘法是有序的。所以两个矩阵相乘时，其次序是重要的，因此常称乘积 AB 是矩阵 A 左乘 B 或矩阵 B 右乘 A 而得到的。

这个例子还说明，两个非零矩阵之积可以是零矩阵，这也是矩阵乘法的特点之一。由此还可得出，矩阵乘法的消去律不成立，即当 $AB=AC$ 时，不一定有 $B=C$。

如果 $A\neq 0$，$B\neq 0$，而 $AB=0$，则称矩阵 A，B 互为**零因子**，称 A 为 B 的**左零因子**，B 为 A 的**右零因子**。

如果有 $AB=BA$，则称矩阵 A 与 B 是可交换的。

容易验证矩阵的乘法运算满足：

（1）$(AB)C=A(BC)$（结合律）

（2）$(A+B)C=AC+BC$（分配律）

$C(A+B)=CA+CB$

单位矩阵在矩阵的乘法中起着类似数 1 的作用，即

$$A_{m\times n}I_n=A_{m\times n},\quad I_mA_{m\times n}=A_{m\times n}$$

设 A 是一个 n 阶方阵，我们以通常的方式规定矩阵的方幂：

$$A^k\triangleq\underbrace{AA\cdots A}_{k\text{个}}\quad(k=1,2,\cdots);\quad A^0\triangleq I$$

由矩阵的结合律可知：

$A^kA^l=A^{k+l}$，$(A^k)^l=A^{kl}$，k，l 为正整数。

因为矩阵的乘法不满足交换律，所以一般地

$$(AB)^k \neq A^kB^k$$

如果 $A^2=A$，则称 A 为**幂等矩阵**，如果有正整数 k，使 $A^k=0$，则称 A 为**幂零矩阵**。

例 3 设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n$，$n$ 为正整数，试求 A^n。

解 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}=I+B$

其中 $B=\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，而 $B^2=0$。

因为 $IB=BI$，所以有

$$\begin{aligned}A^n&=(I+B)^n=I^n+C_n^1I^{n-1}B+C_n^2I^{n-2}B^2+\cdots+B^n\\&=I+nIB=I+nB\\&=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & na\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & na\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

例 4 试用归纳法证明：

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & & O\\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ 0 & & & & \lambda\end{pmatrix}^n_{n\times n}=\begin{pmatrix}\lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & C_n^2\lambda^{n-2} & \cdots & C_n^{n-1}\lambda\\ & \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & \cdots & C_n^{n-2}\lambda^2\\ & & \lambda^n & \ddots & \vdots\\ & & & \ddots & C_n^1\lambda^{n-1}\\ 0 & & & & \lambda^n\end{pmatrix}$$

（请读者给出证明）。

三、数乘

定义1.5 数 $k\in F$，矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，以 k 与 A 的每一个元素之积为元素而构成的矩阵，称为 k 与 A 的**数量积**，记为 kA 或 Ak。即

$$kA \triangleq Ak \triangleq (ka_{ij})$$

得出数与矩阵乘积的运算称为**数与矩阵的乘法**，简称**数乘**。

在以后的讨论中，数 k 都是指某数域 F 中的数，一般不再一一说明。

例如 $$k\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 \end{pmatrix}$$

数乘运算满足：

（1）$(k+l)A=kA+lA$（分配律）

（2）$k(A+B)=kA+kB$（分配律）

（3）$k(lA)=(kl)A$（结合律）

（4）$k(AB)=(kA)B=A(kB)$

称矩阵

$$kI=\begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}$$

为**数量矩阵**。

设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则

$$(kI_m)A=A(kI_n)=kA$$

上式表明，数量矩阵 kI 与任意矩阵 A 的乘积，如同用数 k 乘以矩阵 A。特别地，如果 A 为 n 阶矩阵，kI 为 n 阶数量矩阵，则

$$(kI)A=A(kI)$$

此式表明，数量矩阵与任意的同阶矩阵作乘法是可以交换的。其逆也成立，即与任意 n 阶矩阵相乘为可交换的矩阵一定是数量矩阵（证明留给读者）。

如果 A 是一个 n 阶方阵，则有

$$\det(kA)=k^n\det A$$