2001年

全国硕士研究生入学考试复习指导丛书

数学

附解题指导

（理工类）

李正元 主编

QUANGUO SHUOSHI YANJIUSHENG RUXUE KAOSHI FUXI ZHIDAO CONGSHU

高等教育出版社

2001年全国硕士研究生入学考试复习指导丛书

数　学 附解题指导

（理工类）

主编　李正元

编者　刘西垣　周民强　林源渠

周建莹　尤承业　娄元仁

孙山泽

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学·理工类·解题指导/李正元主编. 一北京：高等教育出版社，2000.3

（2001年全国硕士研究生入学考试复习指导丛书）

ISBN 7－04－008581－X

Ⅰ.数… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.D13－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第03880号

责任编辑 吴 向 **特约编辑** 李凌云

封面设计 顾 斌 **责任印制** 韩 刚

书 名	2001年全国硕士研究生入学考试复习指导丛书—数学·附解题指导（理工类）		
主 编	李正元		
出版发行	高等教育出版社		
社 址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电 话	010－64054588 021－62587650	传 真	010－64014048 021－62551530
网 址	http://www.hep.edu.cn		
印 刷	高等教育出版社印刷厂		
开 本	787×1092 1/16	版 次	2000年3月第1版
印 张	28.75	印 次	2000年3月第1次印刷
字 数	680 000	定 价	29.80元

编者的话

2001年全国硕士研究生入学考试的时间越来越近了. 为了协助广大考生加强数学训练，提高应试能力，我们编写了数学科目的考前复习指导用书.

数学科目的考试分理工和经济两个大类. 对于每一大类，复习指导用书又分复习用书(即《数学·附解题指导》)和练习用书(即《数学·模拟试题与试卷》)两册，配套使用.

复习用书分为三个部分：高等数学、线性代数、概率论与数理统计初步. 每一部分又分为若干章节. 编写指导思想、结构和内容以教育部制定的考试大纲为依据. 陈述方式除给出基本事项或知识要点外，均通过典型例题或历年试题来介绍解题思路与方法. 考虑到应试的实际情况，题型的选择与解法也可能是综合型的，即在保证重点的情况下不排除运用后续的知识.

练习用书分为三个部分：单元练习、综合练习、模拟试卷. 单元练习部分仍按章节体系编写；综合练习则只按学科分支编排；模拟试卷按专业分类，每类三组题[如数学(一)有三组……数学(四)有三组]. 练习用书供考生自我练习用，虽然附有参考答案，但考生务必自己首先独立解题，然后，根据需要，再与解答进行对照和分析.

历年考试命题的特点是量大、面广，为了取得理想的成绩，我们提出以下几点注意，供考生参考.

1. “先易后难”. 这是考试的一般原则.

2. “一传到位”. 这里借用排球运动的术语，是指在解题时一定要及时弄清楚本命题内容所涉及的范围，以及熟悉解决这类问题的基本途径或常规方法. 例如求函数的导数问题，首先要弄明白该函数是以什么形式出现的，若是分段函数，则在分段点必须用左、右求导的方法进行；如果该函数以积分形式出现，如求

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x xf(x-t)\mathrm{d}t,$$

因为是对 x 求导，而积分号下又含有变量 x，这在定积分的学习中是没有的，所以我们只能设法通过变换将积分号下的 x 化去，使被积函数中不再出现 x，即写成

$$\int_0^x xf(x-t)\mathrm{d}t = x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal[\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u]{x-t=u} -x\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u = x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u.$$

然后就可以求导了.

3. “胸有典型”. 这里所说的“典型”是指每一部分内容里最基本且常用的某些范例. 而“胸有”的意思是必须熟知这些事实. 例如在微积分中的两个重要函数极限；基本初等函数的导数公式；等价极限关系：

$$\varphi(x)\sim\sin\varphi(x)\sim\tan\varphi(x)\sim\ln(1+\varphi(x))\quad(x\to 0),$$

其中 $\varphi(x)\to 0\ (x\to 0)$；$p$ 级数，x^{-p} 的广义积分；基本幂级数的和，如

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\ \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),$$

以及基本初等函数泰勒级数展式等等.显然,若对这些事实能"想到就来",则将对解答试题大有助益.

4."步步为营".为了从形式上减少命题数量,也为检查考生的解题能力,试卷上常出现多种概念、方法并存的所谓综合命题.此时,我们必须将整个命题分成若干小题,一步一步地解出来.要做到这一点,第一要有信心,第二要分解步骤.如1999年微积分部分有试题:

"设 $y(x)$ $(x\geqslant 0)$ 二阶可导且 $y'(x)>0$, $y(0)=1$. 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x, y)$作该曲线的切线及 x 轴的垂线,上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1,区间$[0, x]$上以 $y=y(z)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2,并设 $2S_1-S_2$ 恒为1,求此曲线 $y=y(x)$ 的方程."

这一试题属于综合题型.从命题100多字的陈述中一句一句读下来,易知它涉及求切线、面积与函数等,从而要分三个步骤一一解决.

第一求切线:因为在点 $P(x, y)$的导数是 $y'(x)$,所以过此点的切线为

$$Y-y=y'(x)(X-x).$$

第二求面积:S_1 是直角三角形面积,S_2 是曲边梯形面积,要用定积分,即 $S_2=\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$.

第三求 $y(x)$:在上面两步中,由于 $y(x)$是未知的,故具体的面积值并未求出,都是变量 x 的函数.为求出 $y(x)$,就微积分范围而言,是属于微分方程求解的问题.那么方程在哪里?其实题设指出的 $2S_1-S_2=1$ 就是方程,即

$$\frac{y^2}{y'}-\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=1.$$

要从这一方程解出 $y(x)$来,必须把积分号下的 y"解放"出来,办法当然是求导,最后可得

$$yy''=(y')^2,$$

这就是 $y=y(x)$ 满足的微分方程,由微分方程理论可解出.

总起来说,就是先易后难,一传到位,胸有典型,步步为营.

此外,需要提醒读者的是,对于本书所编的大量例题和练习,并非每题都要细读细做,而应根据自己的具体情况来定.虽然每年的试题都有些变化,但知识的范围和结构基本相同,因此,掌握基本概念、基础理论、常用方法是最重要的.精读,学会解决一定数量的范例不失为应试的重要方法.

本书是北京大学数学科学学院举办的硕士研究生入学考试数学辅导班的教材.对本书中存在的不足之处,请广大读者提出意见和建议.**欢迎考生参加我院举办的暑期辅导班**.

编　者

于北京大学数学科学学院

2000年2月

目 录

第一部分　高等数学

第一章　函　数

按照考试大纲，本章的考试内容包括：一元函数和多元函数的概念，函数的表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，反函数、复合函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数以及简单应用问题中函数关系的建立等方面.

本章的考试要求是：理解一元函数和多元函数的概念，掌握函数的表示方法，了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性，理解复合函数的概念，了解反函数和隐函数的概念，掌握基本初等函数的性质及其图形，会建立简单应用问题中的函数关系式.

在历年的试题中，既有单纯考查函数有关知识的题目，也有许多把函数有关知识融汇于其它内容当中的综合性题目.

§1　函数的有关概念和几种特性

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，x 的变动域是 D，如果对于每个数 $x \in D$，按照某一对应规则，变量 y 总有唯一确定的一个数值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y = f(x), x \in D$；数集 D 叫做函数 $y = f(x)$ 的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的函数值，记作 $f(x_0)$，当 x 取遍 D 的每一个数值时，对应的函数值的全体组成的数集

$$Z = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\} \tag{1.1}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的值域.

定义 1.2　设 D 是 n 维空间中一个给定的点集，如果对于每个点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$，变量 y 按照一定对应规则总有唯一确定的一个数值和它对应，则称变量 y 是变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 元函数，记作 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，点集 D 叫做函数 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的定义域，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 叫做自变量，y 叫做因变量.

当 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 取遍 D 的每一个点时，对应的函数值的全体组成的数集

$$Z = \{y \mid y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D\} \tag{1.2}$$

称为函数 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的值域.

显然，当 $n = 1$ 时，n 元函数就是定义 1.1 中定义的一元函数；当 $n \geqslant 2$ 时，n 元函数统称多元函数.

定义 1.3　设函数 $f(x)$ 的定义域是 D，集合 $X \in D$. 如果存在数 K_1，使得

$$f(x) \leqslant K_1 \tag{1.3}$$

对于任何 $x \in X$ 成立,则称函数 $f(x)$在 X 有上界,数 K_1 称为函数 $f(x)$在 X 的一个上界;如果存在数 K_2,使得

$$f(x) \geqslant K_2 \tag{1.4}$$

对于任何 $x \in X$ 成立,则称函数 $f(x)$在 X 有下界,数 K_2 称为函数 $f(x)$在 X 的一个下界;如果存在数 $M > 0$, 使得

$$|f(x)| \leqslant M \tag{1.5}$$

对于任何 $x \in X$ 成立,则称函数 $f(x)$在 X 上有界,数 M 称为函数 $f(x)$在 X 上的一个界,否则称函数 $f(x)$在 X 上无界.

容易证明,函数 $f(x)$在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.注意,如果 M 是函数 $f(x)$在 X 上的一个界,则任何比 M 更大的正数也是函数 $f(x)$在 X 上的界,所以一个有界函数必有无穷多个界,可以证明其中必有一个最小的界.对于函数的上界和下界也有类似的结论.

如果函数 $f(x)$在其定义域上有界,则称为有界函数;否则称为无界函数.

想要证明一个函数 $f(x)$是有界函数,应按照定义找到 $f(x)$在其定义域上的一个界 M;反之,如果想要证明一个函数 $f(x)$是无界函数,则应说明任何正数 M 都不是 $f(x)$的界,也就是说:对于任意给定的 $M > 0$, 都存在 $x_M \in D$, 使得 $|f(x_M)| > M$ 成立.

不难看出,只需把 x 换为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,上面有关函数有界性的讨论,对于多元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$同样是成立的.

定义 1.4 设函数 $f(x)$的定义域是 D,区间 $I \in D$. 如果对于任何 $x_1, x_2 \in I$, 只要 $x_1 < x_2$, 就有

$$f(x_1) < f(x_2), \tag{1.6}$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上(严格)单调增加;如果对于任何 $x_1, x_2 \in I$, 只要 $x_1 < x_2$, 就有

$$f(x_1) > f(x_2), \tag{1.7}$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上(严格)单调减少.

如果函数 $f(x)$在其定义域上单调增加,则称 $f(x)$为单调增加函数(简称增函数);如果函数 $f(x)$在其定义域上单调减少,则称 $f(x)$为单调减少函数(简称减函数);单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

定义 1.5 设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称.如果对于任何 $x \in D$, 总有

$$f(x) = f(-x), \tag{1.8}$$

则称 $f(x)$为偶函数;如果对于任何 $x \in D$, 总有

$$f(x) = -f(-x), \tag{1.9}$$

则称 $f(x)$为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的;奇函数的图形关于原点是对称的.

定义 1.6 设函数 $f(x)$的定义域是 D. 如果存在常数 $T > 0$, 使得对于任何 $x \in D$, 总有

$$x \pm T \in D, \tag{1.10}$$

$$f(x+T)=f(x), \tag{1.11}$$

则称 T 是 $f(x)$的一个周期,称 $f(x)$是以 T 为周期的周期函数.

显然,如果 T 是函数 $f(x)$的一个周期,则 T 的任何整数倍倍数也是函数 $f(x)$的周期,因而一个周期函数必有无穷多个周期;为了确定起见,我们所说的周期函数的周期都是指它的最小正周期(如果存在的话).

设 T 是函数 $f(x)$的周期,则在它定义域内每个长度为 T 的区间上,$f(x)$有相同的图形.

注意,有关函数奇偶性、单调性和周期性的讨论只对一元函数有效.

定义 1.7 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D,值域是 Z. 如果对于每个 $y\in Z$,存在唯一的 $x\in D$ 满足 $f(x)=y$,把 y 看作自变量,把 x 看作因变量,则 x 是一个定义在 $y\in Z$ 上的函数,记此函数为

$$x=f^{-1}(y)\ (y\in Z), \tag{1.12}$$

称之为 $y=f(x)\ (x\in D)$ 的反函数.

习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,所以通常把反函数表达式中的 x 和 y 对换,写成

$$y=f^{-1}(x)\ (x\in Z) \tag{1.13}$$

的形式. 这样一来,在同一个直角坐标系中,函数 $y=f(x)\ (x\in D)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)\ (x\in Z)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

很明显,(严格)单调函数一定有反函数;若某个函数不是单调函数,但是它的定义域能够分为若干个单调区间,则在每个单调区间中该函数就有一个相应的反函数. 同单调性一样,仅对一元函数才能讨论其反函数问题.

定义 1.8 设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 D_f,值域是 Z_f,函数 $u=g(x)$ 的定义域是 D_g,值域是 Z_g. 如果 $Z_g\cap D_f\neq\varnothing$,则称函数

$$y=f[g(x)],\ x\in D=\{x\,|\,g(x)\in D_f\} \tag{1.14}$$

是由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数. 变量 u 称为中间变量.

定义 1.9 常数函数、幂函数、对数函数、指数函数、三角函数和反三角函数等六种函数称为基本初等函数. 基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算所得到的函数称为初等函数.

初等函数有很多好的性质,它们是微积分的重要研究对象.

定义 1.10 设 $F(x,y)$是一个已知二元函数,I 是一个区间. 如果对于每个 $x\in I$,都存在唯一的 y 满足方程 $F(x,y)=0$,则称这个函数 $y=y(x)$ 为方程 $F(x,y)=0$ 在区间 I 上确定的隐函数.

从定义 1.10 可知,把隐函数 $y=y(x)$ 代入方程 $F(x,y)=0$,就得到在区间 I 上成立的恒等式

$$F[x,y(x)]\equiv 0,\ x\in I. \tag{1.15}$$

尽管在大多数情况下,不能从方程 $F(x,y)=0$ 解出隐函数 $y=y(x)$ 的显式表达式,然而,却可利用恒等式(1.15)来研究隐函数的许多性质,如:隐函数的可微性以及导数公式等.

与定义 1.10 类似，还可以定义由方程 $F(x, y, z)=0$ 确定的隐函数 $z=z(x, y)$ 以及由方程组 $F(x, y, u, v)=0$ 和 $G(x, y, u, v)=0$ 确定的两个隐函数 $u=u(x, y)$ 和 $v=v(x, y)$ 等等更复杂的隐函数.

例 1.1(1987 年)① $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$ 是

(A) 有界函数. (B) 单调函数. (C) 周期函数. (D) 偶函数.

【分析】 已知 $\sin x$ 和 $\cos x$ 分别是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数和偶函数，于是对于任何实数 x 有

$$f(-x)=|(-x)\sin(-x)|e^{\cos(-x)}=|(-1)^2x\sin x|e^{\cos x}=f(x).$$

这表明 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数.

【答】 选(D).

【讨论】 由类似的计算可得 $g(x)=x\sin xe^{\cos x}$ 也是 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数. 还可得到一般性的结论：两个奇函数之积是偶函数；两个偶函数之积仍是偶函数；任一函数 $y=f(u)$ 与偶函数 $u=g(x)$ 的复合函数 $f[g(x)]$ 也是偶函数.

作为进一步的练习，我们来证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是有界函数，也不是单调函数.

要证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是有界函数，即需证明任何正数 M 都不是 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的界. 事实上，对于任意给定的 $M>0$，令 $x_M=2[M]\pi+\frac{\pi}{2}$，于是

$$|f(x_M)|=x_M.$$

我们来证 $x_M>M$ 总是成立的：若 $0<M<1$，则有 $x_M=\frac{\pi}{2}>1>M$；若 $n\leqslant M<n+1\ (n=1, 2, \cdots)$，则有 $x_M>2n\pi>n+1>M$；综合起来即得 $|f(x_M)|>M$ 成立. 这表明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的确不是有界函数. 注意，如果在有限区间 $[a, b]$ 上讨论，则 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上必为有界函数(请读者求出 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个界来).

要证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调函数，只需比较函数值 $f(0)$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $f(\pi)$. 注意 $f(0)=f(\pi)=0$，而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$. 这表明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上既不是单调增加的，也不是单调减少的，从而它在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调函数.

把上述证明一般化可得，若存在 $x_1, x_2, x_3\in I$ 且 $x_1<x_2<x_3$，但 $f(x_1)<f(x_2)$ 与 $f(x_2)>f(x_3)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$ 与 $f(x_2)<f(x_3)$) 同时成立，则 $f(x)$ 在区间 I 上不是单调函数.

例 1.2 证明 $f(x)=x-[x]$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界周期函数.

【分析】 可通过取整函数 $y=[x]$ 分段变化的规律来了解函数 $f(x)=x-[x]$ 是怎样变化的.

【证】 当 $n\leqslant x<n+1\ (n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 时，有

$$f(x)=x-[x]<n+1-n=1,$$

$$f(x)=x-[x]\geqslant n-n=0.$$

即 $0\leqslant f(x)<1$，这表明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界函数.

又因对于任何实数 x，总有

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-([x]+1)=x-[x]=f(x),$$

所以，$f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数.

例 1.3(1988 年) 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

【分析】 按照复合函数的定义，从 $f(x)$ 的解析式可得复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的一般形式，把它与题设的 $f[\varphi(x)]$ 的解析式比较，即可求得 $\varphi(x)$ 及其定义域.

① 1987 年指本例为 1987 年研究生入学考试试题. 下同.

【解】 注意

$$f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)} = 1 - x,$$

解出即得

$$\varphi^2(x) = \ln(1 - x),$$

由于 $\varphi(x) \geqslant 0$，于是

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1 - x)},$$

它的定义域是

$$D = \{x \mid \ln(1 - x) \geqslant 0\} = \{x \mid 1 - x \geqslant 1\} = \{x \mid x \leqslant 0\}.$$

例 1.4(1996 年) 方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有______个实根.

【分析】 记 $f(x) = |x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x$，易见 $f(x)$是定义域 $D = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ 的偶函数，且 $f(0) = -1 < 0$. 于是方程 $f(x) = 0$ 的实根个数恰为方程 $f(x) = 0$ 的正根个数的 2 倍.

注意，当 $x \geqslant 1$ 时 $f(x) = \sqrt[4]{x} + \sqrt{x} - \cos x \geqslant 2 - 1 > 0$，这表明 $f(x) = 0$ 的正根必在区间 $(0, 1)$内.

在闭区间$[0, 1]$上，$f(x)$是连续函数，$f(0) \cdot f(1) < 0$；由 $\sqrt[4]{x}$，$\sqrt{x}$ 在$[0, 1]$上单调增加，$\cos x$ 在$[0, 1]$上单调减少可知 $f(x)$在$[0, 1]$上单调增加. 由此可知，函数 $f(x)$在$(0, 1)$内有且仅有一个零点，即方程 $f(x) = 0$ 在区间$(0, 1)$内有且仅有一个根.

综上所述，方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有两个实根.

【答】 应填 2.

§2 分段函数与积分上限的函数

在自变量的不同变化范围中，自变量与因变量的对应法则用不同的式子来表示的函数称为分段函数. 绝对值函数 $y = |x|$，取整函数 $y = [x]$ 等都是分段函数.

若 $f(x)$在区间$[a, b]$上可积，它在部分区间$[a, x]$上的定积分在区间$[a, b]$上定义了一个函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

称为用变上限定积分定义的函数或积分上限的函数.

在考研数学试题中经常出现这两类函数，因此有必要重视这两类函数的有关概念和运算.

例 2.1(1992 年) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0, \\ x^2 + x, & x > 0, \end{cases}$ 则

(A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leqslant 0, \\ -(x^2 + x), & x > 0. \end{cases}$　　(B) $f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0, \\ -x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$

(C) $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0, \\ x^2 - x, & x > 0. \end{cases}$　　(D) $f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$

【分析】 本题实质上是求分段函数 $y = f(u)$ 与函数 $u = -x$ 的复合函数的解析式的问题，通常采用代入法：用$-x$ 代替分段函数 $y = f(x)$ 中的自变量 x，然后将所得结果变形和化简，从而选出正确答案. 注意

$$f(-x) = \begin{cases} (-x)^2, & -x \leqslant 0, \\ (-x)^2 + (-x), & -x > 0, \end{cases} = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0, \\ x^2 - x, & x < 0. \end{cases}$$

这表明答案(D)是正确的.

【答】 选(D).

例 2.2(1997 年) 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ 2+x, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

【分析】 本题与例 2.1 是同一类型的题目,因而可用同样的方法解决.首先,用 $f(x)$代替 $g(x)$的自变量 x,得

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ 2+f(x), & f(x)>0.\end{cases}$$

由 $f(x)$的定义知,当 $x<0$ 时 $f(x)=x^2>0$;而当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)=-x\leqslant 0$,于是

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-(-x), & x\geqslant 0,\\ 2+x^2, & x<0,\end{cases}=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0,\\ 2+x^2, & x<0.\end{cases}$$

这表明答案(D)是正确的.

【答】 选(D).

【讨论】 作为练习,我们来求复合函数 $f[f(x)]$, $f[g(x)]$, $g[g(x)]$ 的解析式.

首先,用 $f(x)$代替 $f(x)$的自变量 x,得

$$f[f(x)]=\begin{cases}f^2(x), & f(x)<0,\\ -f(x), & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

由 $f(x)$的定义知,当 $x<0$ 时 $f(x)=x^2>0$,当 $x=0$ 时 $f(0)=0$,当 $x>0$ 时 $f(x)=-x<0$,于是

$$f[f(x)]=\begin{cases}(-x)^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x^2, & x<0\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x^2, & x<0.\end{cases}$$

其次,用 $g(x)$代替 $f(x)$的自变量 x,得

$$f[g(x)]=\begin{cases}g^2(x), & g(x)<0,\\ -g(x), & g(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

注意,$g(x)=2+|x|\geqslant 2$,因而 $g(x)<0$ 的解集是空集,$g(x)\geqslant 0$ 恒成立,于是

$$f[g(x)]=-g(x)=-2-|x|.$$

类似可得

$$g[g(x)]=2+|g(x)|=2+g(x)=4+|x|.$$

例 2.3(1996 年) 设 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$ 求 $f(x)$的反函数 $g(x)$的表达式.

【分析】 分段函数 $f(x)$的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 被分成三个区间 $(-\infty,-1)$, $[-1,2]$ 和 $(2,+\infty)$. 在每个区间中 $f(x)$有不同的解析式,但分别是单调增加的.又因 $\lim\limits_{x\to-1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to-1-0}(1-2x^2)=-1=f(-1)$, $\lim\limits_{x\to2+0}f(x)=\lim\limits_{x\to2+0}(12x-16)=8=f(2)$,从而 $f(x)$在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上也是单调增加的.于是其反函数存在,且可分别在区间 $(-\infty,-1)$, $[-1,2]$ 和 $(2,+\infty)$ 中求其解析式.

若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调,求它的反函数的程序是:求 $f(x)$当 $x\in I$ 时对应的值域 Z;把 $y=f(x)$ 中的变量 x 和 y 对换,即把它写成 $x=f(y)$ 的形式;解出 $y=g(x)$,这就是所求的反函数的解析式,其定义域是 $x\in Z$.

【解】 当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$y=1-2x^2$ 的值域 $Z_1=\{y\mid y=1-2x^2,\ x<-1\}=\{y\mid y<-1\}$；把 $y=1-2x^2$ 改写成 $x=1-2y^2$，可解得 $y=-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}$.

当 $x\in[-1,2]$ 时，$y=x^3$ 的值域 $Z_2=\{y\mid y=x^3,\ -1\leqslant x\leqslant 2\}=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 8\}$；把 $y=x^3$ 改写成 $x=y^3$，可解得 $y=\sqrt[3]{x}$.

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$y=12x-16$ 的值域 $Z_3=\{y\mid y=12x-16,\ x>2\}=\{y\mid y>8\}$；把 $y=12x-16$ 改写成 $x=12y-16$，可解得 $y=\dfrac{1}{12}(x+16)$.

综合即得 $f(x)$ 的反函数是

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \dfrac{1}{12}(x+16), & x>8.\end{cases}$$

例 2.4 设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^{x^3+x}f(t)\mathrm{d}t=x$，则 $f(2)=$ ________.

【分析】 设积分上限的函数 $\Phi(u)=\int_0^u f(t)\mathrm{d}t$，则 $\int_0^{x^3+x}f(t)\mathrm{d}t$ 是 $y=\Phi(u)$ 与 $u=x^3+x$ 的复合函数 $\Phi(x^3+x)$. 由题设知 $\Phi(x^3+x)=x$ 是恒等式，我们的任务是由此求 $f(x)$ 在 $x=2$ 的函数值 $f(2)$.

为此，必须将恒等式 $\Phi(x^3+x)=x$ 两端对 x 求导数，并利用积分上限的函数的导数公式以及复合函数求导法则才能得出正确结果.

【解】 设

$$\Phi(u)=\int_0^u f(t)\mathrm{d}t,\ u=x^3+x.$$

由 $f(x)$ 连续可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^3+x}f(t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x^3+x)=\Phi'(x^3+x)(3x^2+1)=(3x^2+1)f(x^3+x),$$

又因 $\Phi(x^3+x)\equiv x$，于是

$$(3x^2+1)f(x^3+x)\equiv 1.$$

令 $x=1$ 即得

$$f(2)=\frac{1}{4}.$$

例 2.5(1987 年) 设 $I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)$ 连续，$t>0$，$s>0$，则 I 的值

(A) 依赖于 s，t.　　(B) 依赖于 s，t，x.

(C) 依赖于 t，x，不依赖于 s.　　(D) 依赖于 s，不依赖于 t.

【分析】 I 是用变上限定积分定义的一个一元函数. 作变量代换 $u=tx$ 就不难得出这个结论. 注意，在变量代换 $u=tx$ 之下，$f(tx)=f(u)$，$t\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$，对应于 x 从 0 变到 $\frac{s}{t}$，u 从 0 变到 s，于是

$$I=\int_0^s f(u)\mathrm{d}u.$$

这表明答案(D)正确.

【答】 选(D).

例 2.6(1997 年) 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$，则 $F(x)$

(A) 为正常数.　(B) 为负常数.　(C) 恒为零.　(D) 不为常数.

【分析】 利用被积函数是以 2π 为周期的周期函数，首先可将积分上、下限中的变量 x 去掉，即