《现代数学教育丛书》

初中代数教学

贾云山编著

X D S X J Y C S

XIANDAI SHUXUE JIAOYU CONGSHU

湖 南 教 育 出 版 社

《现代数学教育丛书》

初中代数教学

贾云山 编著

顾　问　张孝达

主　编　曹才翰

副主编　贾云山　郭维亮　吴占华

湖南教育出版社

前　　言

本书所论述的"初中代数"，系指初中数学教学大纲所规定的有关"代数"的内容．我们知道，不同时期的初中数学教学大纲规定的有关"代数"的内容，往往是不同的，即使内容相同，教学要求也不尽一样．本书对初中代数内容的分析，是我国实施义务教育后初中代数所要学习的内容．

根据九年义务教育全日制初级中学《数学教学大纲》(试用)（以下简称《大纲》）规定的教学内容和教学要求，初中代数一般分 4 册共 14 章编成．①

第一册（上）：

1．代数初步知识．

2．有理数．

3．整式的加减．

4．一元一次方程．

第一册（下）：

5．二元一次方程组．

6．一元一次不等式和一元一次不等式组．

7．整式的乘除．

第一册（上）、（下）供初中一年级使用．

第二册：

8．因式分解．

---

① 这种编排，系指人民教育出版社出版的义务教育初中数学教材．

9. 分式.

10. 数的开方.

11. 二次根式.

第二册供初中二年级使用.

第三册：

12. 一元二次方程.

13. 函数及其图象.

14. 统计初步.

第三册供初中三年级使用.

初中代数，虽分十四章讲授，但各章内容是在《大纲》规定的教学内容的框架内，采用相互穿插，循序渐近的原则进行安排，主要内容之间联系非常紧密. 这些内容大体是：数、式、方程和不等式、函数初步知识、统计初步等.

因此，本书对初中代数内容的分析分上篇和下篇，上篇总论对初中代数主要内容进行分析，下篇则对教材各章进行分析. 本书还有两篇附录，附录一是课堂教学设计举例，供书写教案时参考；附录二是初中数学（代数部分）教材沿革史料，由陈宏伯撰写.

上篇 总论

> 《大纲》指出：初中代数是使学生在小学数学的基础上，把数的范围从非负有理数扩充到有理数、实数；通过用字母表示数，学习代数式、方程和不等式、函数等，学习一些常用的数据处理方法和算表或计算器的使用方法；发展对数量关系的认识和抽象概括的思维，提高运算能力.

为了达到《大纲》上述教学要求，《大纲》规定了初中代数的主要教学内容. 下面我们对这些内容进行分析.

第一章 数

§1.1 在初中，初一引入**负数**后，把小学学过的数（非负数）扩充到**有理数**. 初二把数扩充到**实数**.《大纲》中规定的数的教学要求是：

> **使学生了解有理数、实数的有关概念，熟练掌握有理数的运算法则，灵活运用运算律简化运算；会查平方表、立方表、平方根表、立方根表或用计算器代替算表.**

上述教学要求与原《大纲》相比，对有理数、实数的有关概念由“理解”改为“了解”；而对有理数的运算法则由“掌握”改为“熟练掌握”，强调“灵活运用运算律简化运算”，并提出了“用计算器代替算表”的要求. 一般在教材的编写中，有关数的内容，除考虑到与式、方程等内容穿插安排外，就是根据《大纲》所

规定的教学要求精神进行选材的．这里所说的选材，包括有关数的内容叙述，例、习题的配置等．

从《大纲》中所规定的数的教学要求可以看出，在初中，虽然数已扩充到实数，但有关数的学习重点是有理数．

§1.2 数是学习数学的基础． 关于数的认识、计算与人们的日常生活、生产实践密切相关．因此，数的学习历来是中小学的主要内容之一．我们知道，对儿童来说，从学习说话开始，就开始认识数，并且总是把数和实际的对象连在一起的，例如数手指和糖果的个数等．这一点，类似于人类文明初期的状况．由人类所创造的数，即把数从所依赖的对象中抽象出来，使之不依赖这些对象的任何性质，经历了一个漫长的历史时期．然而对于今天的儿童来说，他们很快就能做到这一点了．我们知道，从原始的自然数开始，数的一次又一次扩充：自然数、扩大自然数、非负有理数、有理数、实数、复数，它们所经历的时间更长．例如，为了便于作形式计算，需要用到负数，由于它并不象自然数那样直观和具体，便于和实际对象的属性联系在一起，所以，很长一段时间，人们不承认或不理会它．我国最早认识了负数．我国古代数学名著《九章算术》的“方程”一章中，用于解线性方程组的“正负术”给出了正、负数的加、减运算法则．随后不久，我国古代数学家刘徽明确指出：“今两算得失相反，要令正负以名之．正算赤，负算黑，否则以邪正为异．”这对正负数给出了科学的定义，并规定了区分正、负数的具体表示方法．大约五、六百年后，印度才开始认识负数．欧洲则长期缺乏负数的概念，他们不承认负数，说负数是“无稽的”或“虚伪的零下”，说什么既把零看作是“什么也没有”，那么把负数看作是小于零的数是不可思议的．直到中世纪末，人们才普遍承认了负数．实数、复数概念的建立和发展，同样经历了一个漫长的历史时期．但在今天，在中、小学数学中，我们不但要学习自然数，还要学习有理数、实数和复数．

初中主要学习到实数，重点是有理数.

§1.3 有关数的理论发展到今天，已经相当完备了. 数的理论具有高度的抽象性和理论体系的严谨性. 对数的理论作详尽的研究，不是也不可能是中小学数学教学的任务. 事实上，在中小学数学中，有关数的扩充和学习，主要基于实际生活、生产实践和进一步学习的需要，同时，以学生的年龄特征和生活经验为出发点，并以学生的可接受性为依据进行安排的.

我们在小学自然数集的学习中，定义了加法和乘法，并使自然数的加法和乘法服从某些规律. 这些规律如下：

$$a+b=b+a; \qquad \text{(交换律)}$$

$$ab=ba; \qquad \text{(交换律)}$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c; \qquad \text{(结合律)}$$

$$(ab)c=a(bc); \qquad \text{(结合律)}$$

$$a(b+c)=ab+ac \qquad \text{(分配律)}$$

我们知道，在小学数学中，对加法和乘法的定义，以及有关自然数加、乘两种运算服从上述规律，都是以学生的生活经验所能接受的具体实例加以说明的. 上述规律看上去是很显然的. 恰恰是这些看来很简单的规律，是我们扩充数集的基础. 这就是说，每当把数集扩充并**定义**了加法和乘法的运算以后，要**证明**这种运算一定能服从上述运算律.

§1.4 在中、小学数的教学中，数系的扩充，一般遵循以下原则，或者说，数系的扩充满足了以下的条件：

1. 在原有数集（设为 A）中，增添了新的元素，构成了新的数集（设为 B），原有的数集 A 是数集 B 的子集（$A\subset B$).

2. 在新数集 B 里，定义一些基本关系和运算：

使数集 A 里的运算关系仍旧能够保持；

使数集 A 里原有的一些主要性质（基本运算律）仍旧能够成立.

3. 在数集 A 里不能进行的运算在数集 B 里能够进行.

上述原则是数的理论的一部分．这就是说，在中、小学数学的学习中，我们虽不对数的理论作研究，但数的扩充原则是和数的理论相一致的．

§ 1.5　在初一，引进负数集后，把小学里学的数集（非负有理数集）扩充到**有理数集**．教科书中在引入负数的基础上，用实例说明（本来应是定义的）有理数的运算．同时，用有理数运算的实例验证（本来应是证明的）在新数集——有理数集里用实例说明的一些基本关系和运算，仍然符合原数集——非负有理数集里的一些主要性质：基本运算律．教科书中这样处理，既符合有关数的理论，也符合学生的年龄特征和生活经验．多年来的教学实践证明，这是能够被学生接受的．

例如，“符号规则”是我们“定义”的．同样，有理数 的加法法则也是“定义”或“规定”的，而不是“证明”的．实际上也不能加以证明．教科书中举例加以说明，只是为了学生易于接受，阐述其“合理性”而已．我们能够并且必须加以证明的仅仅是，在这些“定义”或“规定”的前提下，基本运算律（交换律、结合律、分配律）仍然保持不变．然而，这种证明，超出了初中学生的可接受性，所以也只能用实例加以验证．

我们看到，教科书中有关“运算法则”和“运算律”虽然同样都是用实例加以说明和验证，但应注意其性质不同．前者是说明“定义”或“规定”的合理性；而后者则是用“验证”代替了“证明”．应当指出，教科书这样处理的目的都是为了便于学生接受．

因此，教科书中在负数引入后，有关运算法则和运算律的处理，教学时都不要加以引伸．同时，有关在有理数集内，代数四则运算的封闭性等，教学时也不要涉及．

§ 1.6　在教科书中，负数引入并把数集扩充到有理数集后，讲了“数轴”的概念．这样，我们就可以给出**有理数的几何解释**．“数轴”概念的讲解，还为进一步扩充数集，建立直角坐标系等打

下了基础.

我们知道，在数轴上，如图 1-1，单位长度是任意选取的. 从数轴上看到，正整数和负整数表示为数轴上的一组**等距离**的点，**正数**在**零点**的**右边**，**负数**在**零点**的**左边**. 为了表示分母为 n 的分数（正分数和负分数），我们可以把单位长线段分成 n 等分，则得到一组**等距离**的**点**，这些点就表示了分母为 n 的分数. 如果我们对每一个整数 n 都这样做，那么所有的有理数将都能用数轴上的点来表示. 数轴上的这些点，我们叫做**有理点**. 这样，我们就给出有理数的几何解释，做到**数形结合**.

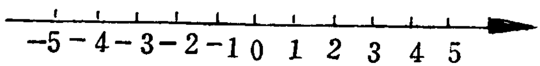


图 1-1

从上述分析可以看出如下基本事实：在每一个不论多么小的区间中，例如，任意 a，b 两点中，都存在着有理点 $c=\frac{a+b}{2}$. 这就是说，**有理点在直线上是稠密的**.

§1.7　虽然有理数全体在数轴上所对应的有理点是处处稠密的，但所有这些有理点却不能覆盖整个直线. 这是因为，如果直线上所有的点都是有理点，或者说覆盖整个直线，那么任何一线段将和单位长线段可通约. 但事实并非如此. 我们知道，**一个正方形的对角线与它的边是不可公度的**. 我们设给定的正方形的边长是选定的单位长，而对角线为 x，如图 1-2.

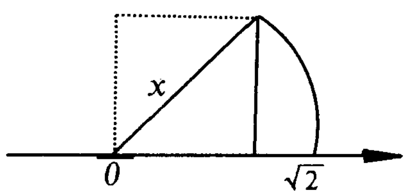


图 1-2

根据勾股定理，我们有

$$1^2+1^2=x^2,$$

即

$$x^2=2.$$

我们用符号 $\sqrt{2}$ 表示 x. 现在我们来证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数，或者说，在数轴上表示 $\sqrt{2}$ 的点不是有理点.

我们用“**反证法**”证明.

现在假定 $\sqrt{2}$ 是有理数，即它可表示为以下形式，

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n}, \tag{1}$$

其中 m 和 n 为互质的自然数，因而，m 和 n 不都是偶数. 把 (1) 的两边平方，得

$$2=\frac{m^2}{n^2}\Longleftrightarrow 2\cdot n^2=m^2.$$

数 $2\cdot n^2$ 是偶数，所以 m^2 是偶数，从而 m 也是偶数. 设

$$m=2\cdot k,$$

等式

$$2\cdot n^2=m^2$$

可以写成

$$2\cdot n^2=m^2\Longleftrightarrow 2\cdot n^2=4\cdot k^2\Longleftrightarrow n^2=2\cdot k^2.$$

由最后一个等式可以看出，数 n^2 也是偶数，从而 n 也是偶数. 这样，我们就得出 m 和 n 都是偶数的结论. 这与假设矛盾. 这就证明了 $\sqrt{2}$ 不是有理数，或者说，在数轴上表示 $\sqrt{2}$ 的点不是有理点.

我们可以很容易作出许多与单位长不可公度的线段. 这样，以数为一方，以直线上的点为另一方，在它们之间如果有一个相互对应的话，就必须引进**无理数**.

我们知道，引进无理数，把数扩充到**实数**后，就**可以把全体实数的集合 R 映射到直线上的点的集合上，反过来也对，直线上的每一个点都有唯一的实数与它对应**. 这就是说，**实数和数轴上的点是一一对应的**.

前面提到，虽然有理点在直线上是稠密的，但却不能覆盖整个直线，这一点仅凭“直觉”显得很奇怪，甚至会认为不可能. 只有当我们证明确有“无理点”存在时，从理论上才接受了有理点不能覆盖整个直线的论点. 引进无理数，把数扩充到实数后，**实数点在直线上是连续的**，或者说，实数点能够覆盖整个直线. 因此，我们有时也将数轴叫做**实数轴**.

§1.8 上述证明，确实能够使学生认识到数学证明的威力，使他们对数学严格逻辑性产生极大的兴趣，从而激发他们学习数学的热情. 然而，上述引入无理数的讲法，对初中学生来说，接受起来是相当困难的. 比如，“反证法”的证明方法，学生还没有学到，因而证明 $\sqrt{2}$ 不是有理数的上述证法就无法进行，等等. 因此，基于教育上的考虑，教科书中无理数的引入，只能采取学生可以接受的方式进行. 义务教育代数第二册“数的开方”一章中，采取了直接从小学及初一数学中有关数的知识过渡的形式，提出：“我们已经知道，有理数包括整数和分数，任何一个有理数都可以写成有限小数…或循环小数的形式……，反过来，任何有限小数和循环小数也都是有理数.”接着说明：“是不是所有的数都可以写成有限小数和循环数小数的形式呢？不是的. 例如

$$\sqrt{2}=1.41421356\cdots,$$

$$\sqrt{3}=1.73205080\cdots,$$

$$\cdots\cdots,$$

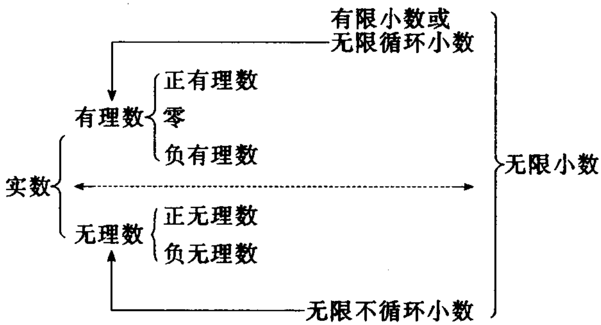
$$\pi=3.14159210\cdots,$$

这些数的小数位数是无限的，而且是不循环的.”由此得出**无限不循环小数叫做无理数**.

教科书中这样引进无理数比较自然，易于被学生接受. 同时，这样引入无理数和现代数的理论是一致的，其背景是：**在数轴上的所有的点，和所有有限及无限十进位小数之间能够建立一个对应**. 或者说，在数的理论中关于实数更为一般的定义：**实数系是**

全体无限小数．有理数是循环小数；无理数是非循环小数．

§1.9 数系扩充到实数系后，一般应对数系扩充的情况做一回顾和小结，以便学生对数系扩充的情况有一个完整、系统的了解．教学时，做这样一个小结非常必要，但应以教科书为准．小结时，可以根据上述分析的精神，把我们学过的数概括列表如下：



小结时，结合学生的实际情况，做一些说明是必要的，但说明的内容不能引伸．虽然教科书中也在数轴上表示出$\sqrt{2}$的点，但证明$\sqrt{2}$不是有理数的问题，不必涉及；实数的有关理论，也不宜补充．

实数是初中数学的基础，也是进一步学习数学的基础．实际上，中学数学里的大部分问题，都是在实数范围进行研究和学习的．因此，教科书中对数的学习，特别是对运用比较广泛的有理数的学习特别重视，除集中讲授有理数的有关内容外，还在不同阶段相关的教材内容中安排了供复习用的数的运算题目，以便使学生能够熟练地进行数的运算，为学好代数其他内容打下坚实的基础．

还应注意的是，通过数的扩充，应使学生理解数系扩充的原则，知道什么是定义的，什么是证明的．虽然目前还不能明确提出“定义”和“证明”的问题，但也应设法使学生明确这一点，避免使两者混淆．运算问题也应把重点放在使学生切实掌握运算法则和运算律上．要创造条件使用计算器进行计算，使学生掌握这种计算工具．

第二章　式

§2.1　式的概念是随着方程和函数的研究发展起来的．现在，我们一般地把一些数以及表示数的字母用运算① 符号连结起来叫做**解析式**，简称**式**．例如：

ab，$a+b$，$x+\frac{1}{3}$，$\frac{50}{100}y-1$，……；

$\frac{m}{n}$，$\frac{s}{a-b}$，$\frac{x^2}{x+3}$，$x^2+x-\frac{1}{x-1}$，……；

$\sqrt{3}$，$\sqrt{\frac{3}{5}}$，$\sqrt{a-b}$，$x+y+\sqrt{x^2+2xy+y^2}$，……；

$\log_2 8$，　$\log_a 2+\log_a \frac{1}{2}$，$-\lg x$，……；

$\sin x+1$，$\cos x+\operatorname{tg} x$，$1-\operatorname{ctg} x$，…….

等等．从形式上看，数和式是不同的．但其实质是：我们应该按照式中所指定的运算顺序，把这些运算实施在数字和字母表示的数上面来求得它的（数）值．正是因为这一事实，也是为着研究上的方便，我们把单独的一个**数字**或一个单独**字母**（表示的数）也算作是一个解析式．

数和式密不可分．数是研究式的基础，而式是数的概念的发展．我们知道，有关数的研究，需要广泛地采用式的表达形式．这

---

① **运算**：在初等数学里所指的运算，是指有限次的加、减、乘（包括自然数次乘方）除运算（也称算术四则运算），开方运算、指数运算、对数运算、三角运算和反三角运算．

一点，在中小学数学教科书中也有所反映．在小学数学里，我们已经用字母 a，b，c 表示已知的但是不定的数；用 x 表示未知而特定的数．例如，关于数的运算律，在小学数学里，已用字母简明地写成：

$$a+b=b+a;$$
$$(a+b)+c=a+(b+c);$$
$$ab=ba;$$
$$(ab)c=a(bc);$$
$$a(b+c)=ab+ac.$$

其中字母 a，b，c 表示的数，在初中阶段可以是任意实数，包括了小学里学过的数，以及中学开始学过的有理数．在这里：

$$a+b, b+a, (a+b)+c, ab, a(b+c), \cdots\cdots$$

都是式．在小学里，我们已经学了简易方程，如

$$4x-36=20,$$

其中 $4x-36$，20 也都是式．这就是说，用字母表示数，以及简单的式子，在小学数学里已经接触过一些．还可以举出各种形体的面积、体积等公式，在小学数学里也都是采用字母所组成的式子来表示的．正是因为上述情况，义务教育代数的第一章为"代数的初步知识"，内容有代数式、公式和简易方程．这些内容既是对小学学过的代数知识的复习、巩固和提高，又是为学习后面的知识作准备．

§2.2 义务教育代数教材中，关于式的系统学习和研究，是在把数扩充到有理数集后，与其它代数内容的学习相适应，穿插安排，由浅入深，由简单到复杂逐步展开．

教科书中有关式的安排大体如下：初一上学期在一元一次方程之前讲"整式的加减"．初一下学期讲"整式的乘除"．初二上学期在因式分解之后讲分式，初二下学期讲二次根式，为初三讲一元二次方程作准备．式的学习是初中代数的重要内容之一．

按照《大纲》的规定，初中代数有关式的教学要求如下：

使学生了解有关代数式、整式、分式和二次根式的

概念，掌握它们的性质和运算法则，能够熟练地进行整式、分式和二次根式的运算以及多项式的因式分解.

上述教学要求与原《大纲》相比，对有关式的概念由“理解”改为“了解”；对有理指数幂的计算以及有关指数式、对数式、三角式的了解都不再做要求.

从《大纲》中所规定的式的教学要求可以看出，在初中**主要学习代数式，重点是有理式（整式、分式）的运算和多项式的因式分解.**

§2.3 式和数一样，也可以进行分类. 由于式中所含运算的不同，式可以区分为两大类：

只含有代数运算① 的解析式叫做**代数式**；

含有初等超越运算②的解析式叫做**初等超越式**，简称**超越式**.

代数式又可根据所含运算不同进行分类：

只含有算术运算的代数式叫做**有理式**；

（其中不含有以字母为除式的有理式，叫做**整式**. 含有以字母为除式的有理式，叫做**分式**.）

含有开方运算的代数式叫做**根式**. 其中含有对字母进行开方运算的代数式，叫做**无理式**.

上述分类如下表所示：

$$\text{式}\begin{cases}\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}\\\text{超越式}\begin{cases}\text{指数式}\\\text{对数式}\\\text{三角式}\end{cases}\end{cases}$$

---

① **代数运算**：算术四则运算、开方运算总称代数运算. 此外，在指数运算中，当指数是有理数时，也是一种代数运算.

② **初等超越运算**：指数为无理数的指数运算、对数运算、三角运算、反三角运算统称初等超越运算.

关于式的分类已如上述，但教材中讲解顺序和叙述形式有所不同．教材中开始没有讲解“式”的更为一般的概念，而是先讲代数式．讲完代数式后，也不是顺序讲有理式、无理式，而是举例说明单项式、多项式，这种说明同样是以所含运算来区别的．而后指出单项式和多项式统称整式．同样，举例说明分式，并指出整式和分式统称有理式．等等．教科书中这样处理，体现了由浅入深，由简单到复杂的原则．

§2.4 在初中代数里，关于式的研究和学习有着两方面的重要意义．一是把普通语言转化为**数学语言**．数学语就是式．二是把式进行各种**恒等变形**，以便达到解决问题时所需要的形式．

我们知道，在数学语言——解析式中的一个符号（数字、字母、运算符号等）表示了普通语言中一个个用词的实际意义．这样，用数学语言替代普通语言，就可以缩短普通语言的叙述．比如，下述普通语言：

甲乙两数的平方和与甲乙两数乘积的二倍的和．

我们用 a，b 代表甲、乙两数，写成数学语言就是

$$a^2 + b^2 + 2ab$$

可以看出，使用**符号**是数学语言的主要**特征**．同时，由于符号的使用，就可能把普通语言从冗长的叙述中解放出来．

符号的使用，是数学发展史上的一件大事．

我们知道，运用符号构成的数学语言，能够精确地表达某种概念、方法和逻辑关系．更为重要的是，对于各种各样的实际问题，包括简单的和复杂的问题，都必须把它转化为数学问题，即运用符号构成各种各样的解析式表达出来，才能使用数学方法得到更好的解决．大家知道，对于解决比较复杂的问题，我们需要研究得出解决这个问题的“数学模型”．即使是一个比较简单的问题，也应研究得出解决这个问题的数学形式．例如：

有一批零件，其形状如图 3，但尺寸有几种规格，为了计算面积，就需要研究得出解决这个问题的数学形式

——计算公式.

由图 2-1 可知：

零件的面积等于一个长方形的面积（长乘宽）与一个梯形的面积（上底加下底乘高除以 2）的和. 现在，我们设这个零件的面积为 S，长方形的长和宽、梯形的上底、下底和高分别如图 3 中所设，转化为数学形式，就是

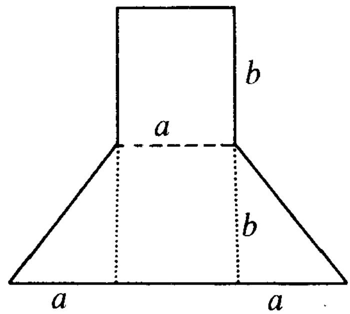


图 2-1

$$S = ab + \frac{1}{2}(a + 3a)b. \tag{1}$$

有了这个公式，就可以计算各种不同规格的零件的面积了. 但我们并不以此为满足. 通过对（1）式的右边的变形，可以得到更为简捷的公式：

$$\begin{aligned} S &= ab + \frac{1}{2}(a+3a)b \\ &= ab + \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot b \\ &= ab + 2ab = 3ab. \end{aligned} \tag{2}$$

很明显，公式（2）比公式（1）简单多了. 公式（2）是通过对公式（1）的右边变形的结果. 由此可以看出，式的变形的重要意义.

式的变形可分为“恒等变形”和“同解变形”两种. 上述公式（1）

$$S = ab + \frac{1}{2}(a + 3a)b$$

变形到公式（2）

$$S = 3ab$$

就是恒等变形. 这种变形要有根据的进行. 我们看到，由公式