随机信号分析解题指南

李永庆　梅文博　编

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书是一本关于随机信号（随机过程）的基本理论和分析方法、例题及习题的汇编。

全书共分七章，主要内容有：概率论的基础知识，随机过程的基本理论，随机信号通过线性系统与非线性系统的理论及分析方法。各章皆由本章要点、基本内容与例解、习题三部分组成。其中基本内容概括了读者应掌握的基本概念、定义、定理、性质，并针对重要论点配上例题。在书末附有全部习题的答案。

为了便于读者自测综合掌握随机过程基本理论的程度，特设计了10份综合练习。

本书通俗易懂，概念清晰，适于电子工程等专业工科大学师生使用，也可供有关科技人员参考。

李永庆 梅文博 编

北京理工大学出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
地质出版社 印刷厂印刷

850×1168毫米 32开本10.375印张 268千字
1990年12月第一版 1990年12月第一次印刷
ISBN 7-81013-381-0/TN·22
印数：1—4200册 定价：4.3

目　录

第一章　概率论

Ⅰ．本章要点 ……………………………………………… 1

Ⅱ．基本内容与例解 ……………………………………… 1

一、概率简述 ……………………………………………… 1

二、随机变量及其概率分布 ……………………………… 6

三、多维随机变量及其概率分布 ………………………… 8

四、随机变量函数的分布 ………………………………… 19

五、随机变量的数字特征 ………………………………… 25

六、随机变量的特征函数 ………………………………… 35

Ⅲ．习题 …………………………………………………… 39

第二章　随机过程

Ⅰ．本章要点 ……………………………………………… 52

Ⅱ．基本内容与例解 ……………………………………… 52

一、随机过程的基本概念及其统计特性 ………………… 52

二、随机过程的微分与积分 ……………………………… 60

三、平稳随机过程和遍历过程 …………………………… 63

四、随机过程的联合概率分布和互相关函数 …………… 71

五、复随机过程 …………………………………………… 74

六、离散时间随机过程 …………………………………… 79

七、正态随机过程 ………………………………………… 81

Ⅲ．习题 …………………………………………………… 83

第三章　平稳随机过程的谱分析

Ⅰ．本章要点 ……………………………………………… 91

Ⅱ．基本内容与例解 ……………………………………… 91

一、随机过程的谱分析 …………………………………… 91

二、平稳随机过程功率谱密度的性质 …………………… 94

三、平稳随机过程的功率谱密度与自相关函数之间的关系 …… 95

四、离散时间随机过程的功率谱密度 …………………… 98

五、互谱密度……101
六、白噪声……104
Ⅲ．习题……104
第四章　随机信号通过线性系统的分析
Ⅰ．本章要点……110
Ⅱ．基本内容与例解……111
一、线性系统输出-输入统计特性之间的关系……111
二、等效噪声带宽、平均功率和信噪比的计算……125
三、ARMA，MA和AR时间序列信号模型……136
四、线性系统输出端随机信号概率密度的计算……140
Ⅲ．习题……141
第五章　窄带随机过程
Ⅰ．本章要点……158
Ⅱ．基本内容与例解……158
一、希尔伯特变换、解析信号与解析过程……158
二、窄带随机过程……165
三、窄带高斯随机过程包络和相位的概率密度……179
Ⅲ．习题……180
第六章　随机信号通过非线性系统的分析
Ⅰ．本章要点……188
Ⅱ．基本内容与例解……188
一、无惰性非线性系统输出概率密度的计算……188
二、计算非线性系统输出统计特性的各种方法……195
三、非线性系统输出信噪比的计算……215
Ⅲ．习题……219
第七章　几种常用的随机过程
Ⅰ．本章要点……227
Ⅱ．基本内容与例解……227
一、马尔可夫过程……227
二、独立增量过程……243
三、独立随机过程……252
Ⅲ．习题……253
综合练习……259

习题答案……289
〔附录A〕 留数定理及其应用……314
〔附录B〕 拉氏变换和Z变换的平方积分表……320
参考文献……322

第一章 概 率 论

Ⅰ. 本章要点

在教材中，本章论及了概率论的基础知识，具体介绍了概率空间、条件概率空间，随机变量及其概率分布、随机变量函数的分布，随机变量的数字特征、特征函数等概念，它们是学习以后各章的理论工具。

本章的重点及其要求：(1) 随机变量函数的分布，关键是在各种函数变换条件下求出相应的雅可比因子J。(2) 随机变量的数字特征，例如：数学期望、方差、各阶矩的定义和运算性质要熟练掌握；对于随机变量之间的统计独立、不相关、正交各应满足什么样的条件，三者的差别与联系等都要有明确的认识。(3) 随机变量特征函数的定义和性质，以及它与矩的关系，应该能灵活地运用。

Ⅱ. 基本内容与例解

一、概率简述

（一）概率的定义

1．概率的古典定义　事件A的概率的古典定义

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{A\text{中所含样本点数}}{S\text{中所含样本点数}} \tag{1.1}$$

式中S为样本空间，子集$A\subset S$。

2．概率的几何定义　事件A的概率的几何定义

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{A\text{的量度}}{S\text{的量度}} \tag{1.2}$$

3．概率的统计定义　事件 A 的频率定义为

$$f_A^{(n)}=\frac{n_A}{n}=\frac{A\text{出现的次数}}{\text{试验的总次数}} \tag{1.3}$$

我们用事件 A 的频率近似表示事件 A 的概率，这就是概率的统计定义。

综述之，可给概率以如下的数学定义：规定一个试验的所有样本点之集合构成了样本空间 S，在 S 中一个或若干个样本点的适当集合 $\mathscr{F}$，称为事件域，$\mathscr{F}$ 中的每一集合称为事件。若 $A\in\mathscr{F}$，则 $P(A)$ 就是事件 A 的概率。并称这三个实体的结合 $(S,\mathscr{F},P)$ 为一个概率空间。

（二）条件概率与概率的基本定理

1．条件概率的定义　在事件 B 已出现的条件下，事件 A 出现的条件概率为

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\quad P(B)>0 \tag{1.4}$$

或
$$P(A\cap B)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A) \tag{1.5}$$

2．全概率公式　设有 N 个互斥事件 $B_n(n=1,2,\cdots,N)$，它们的和为整个 S，即满足

$$B_i\cap B_j=\phi,\quad i\neq j=1,2,\cdots,N$$

$$\bigcup_{n=1}^{N}B_n=S$$

则
$$P(A)=\sum_{n=1}^{N}P(A|B_n)P(B_n) \tag{1.6}$$

此式称为全概率公式。

3．贝叶斯公式　将条件概率的公式推广到 N 个事件中去，可得

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{N}P(B_i)P(A|B_i)},\quad i=1,2,\cdots,N \tag{1.7}$$

这就是贝叶斯公式。

4．**统计独立**　如果事件 A、B 满足

$$P(A|B)=P(A) \tag{1.8}$$

或

$$P(B|A)=P(B) \tag{1.9}$$

则称这两个事件是统计独立的。并有

$$P(A\cap B)=P(A)P(B) \tag{1.10}$$

（三）例解

〔**例1.1**〕　有一根长为L的电话线BC如图1.1所示，在某一点D处被切断，现欲求点D与点B的距离不小于l的概率。

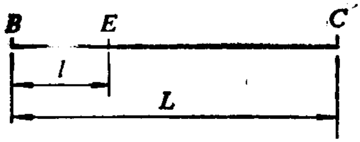

图 1.1　电话线示意图

解：设点E与点B的距离为l，求点D与点B的距离不小于l的概率，就相当于求点D落入EC间的概率。设点D落入EC间的事件为A，由式（1.2）可得所要求的概率为

$$P(A)=\frac{EC}{BC}=\frac{L-l}{L}=1-\frac{l}{L}$$

〔**例1.2**〕　某一基本的二元通信系统，由一部发射机和一部接收机组成，如图1.2所示。发射机经过信道向接收机发送两个符号 0 或 1 中的一个符号。信道偶然地会发生故障，使得当发送 0 时，接收为 1 ，或反之，当发送1时，接收为 0 。

图 1.2　二元通信系统方框图

样本空间有两个元素（1 或 0），我们用$B_i(i=1,2)$分别表示事件“信道前符号为 1 ”和“信道前符号为0”，用$A_i(i=1,2)$

分别表示事件"信道后符号为1"和"信道后符号为0"。若发送符号1和0的概率分别为0.6和0.4。

条件概率描述信道对所发送符号的影响，若各条件概率为

$$P(A_1|B_1)=P(A_2|B_2)=0.95$$

$$P(A_2|B_1)=P(A_1|B_2)=0.05$$

求：$P(A_1)$,$P(A_2)$,$P(B_1|A_1)$,$P(B_2|A_1)$,$P(B_1|A_2)$和$P(B_2|A_2)$。

解：在发射机发送符号1和0时，由于A_1和A_2为接收端仅有可能出现的两个互斥事件，故

$$P(A_1|B_i)+P(A_2|B_i)=1,\ i=1,2$$

由全概率公式，可得到接收符号1和0的概率分别为

$$P(A_1)=P(A_1|B_1)P(B_1)+P(A_1|B_2)P(B_2)$$

$$=0.95\times0.6+0.05\times0.4=0.59$$

$$P(A_2)=P(A_2|B_1)P(B_1)+P(A_2|B_2)P(B_2)$$

$$=0.05\times0.6+0.95\times0.4=0.41$$

根据贝叶斯公式有

$$P(B_1|A_1)=\frac{P(A_1|B_1)P(B_1)}{P(A_1)}=\frac{0.95\times0.6}{0.59}\approx0.966$$

$$P(B_2|A_1)=\frac{P(A_1|B_2)P(B_2)}{P(A_1)}=\frac{0.05\times0.4}{0.59}\approx0.034$$

$$P(B_1|A_2)=\frac{P(A_2|B_1)P(B_1)}{P(A_2)}=\frac{0.05\times0.6}{0.41}\approx0.073$$

$$P(B_2|A_2)=\frac{P(A_2|B_2)P(B_2)}{P(A_2)}=\frac{0.95\times0.4}{0.41}\approx0.927$$

上述结果中，$P(B_1|A_2)$ 和$P(B_2|A_1)$是系统发生故障的概率，而$P(B_1|A_1)$和$P(B_2|A_2)$是系统正确传输符号的概率。

〔例1.3〕 在一只盒子中放有一百只电阻，其阻值和容许偏差如表1.1所示。现从该盒子中任取一只电阻，并设每只电阻被选中的可能性相等。定义三个事件：A为"抽一只47Ω的电阻"，B为"抽一只容许偏差是5%的电阻"，C为"抽一只100Ω的电阻"。试判断三事件A、B、C是否统计独立。

表 1.1 盒中的电阻数（已知阻值和容许偏差）

阻值（Ω）	容许偏差		总计
	5%	10%	
22	10	14	24
47	28	16	44
100	24	8	32
总计	62	38	100

解：因为 $$P(A\cap B)=\frac{28}{100}=0.28$$

而 $$P(A)P(B)=\frac{44}{100}\times\frac{62}{100}\approx 0.273$$

故 $$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

即：事件 A 与 B 不是统计独立的。

因为 $$P(A\cap C)=0$$

而 $$P(A)P(C)=\frac{44}{100}\times\frac{32}{100}\approx 0.141$$

故 $$P(A\cap C)\neq P(A)P(C)$$

即：事件 A 与 C 不是统计独立的。

因为 $$P(B\cap C)=\frac{24}{100}=0.24$$

而： $$P(B)P(C)=\frac{62}{100}\times\frac{32}{100}\approx 0.198$$

故： $$P(B\cap C)\neq P(B)P(C)$$

即 事件 B 与 C 不是统计独立的。

因为 $P(A\cap B\cap C)=0$

而 $P(A)P(B)P(C)=0.44\times 0.62\times 0.32\approx 0.087$

故 $P(A\cap B\cap C)\neq P(A)P(B)P(C)$

因此，事件 A、B、C 不是统计独立的，且它们两两也不统计独立。

二、随机变量及其概率分布

（一）随机变量的定义

设 $(S,\mathscr{F},P)$ 是一个概率空间，对于$s\in S$，$X(s)$ 是一个取实数值的单值函数。若对于任意实数 x_1，$\{s:X(s)<x_1\}$是一随机事件，亦即$\{s:X(s)<x_1\}\in\mathscr{F}$，则称$X(s)$为随机变量，并将它简记为$X$。

（二）离散型随机变量及其分布律

随机变量的全部可能取值是有限个或是可列无限多个，称之为离散型随机变量。

离散型随机变量X的概率分布或分布律定义为

$$P\{X=x_n\}=p_n,\ \ n=1,2,\cdots \tag{1.11}$$

此X的概率分布表或分布列为

$$\begin{array}{c|cccc} X & x_1 & x_2 & \cdots x_n & \cdots \\ \hline p_n & p_1 & p_2 & \cdots p_n & \cdots \end{array}$$

显然，p_n满足

$$\begin{cases} p_n\geqslant 0,\ \ n=1,2,\cdots \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n=1 \end{cases} \tag{1.12}$$

（三）连续型随机变量及其密度函数

对于随机变量X，若存在非负函数$f(x)$，且有$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x<\infty$，使$X$取值于任意区间 (a,b) 的概率为

$$P\{a<X<b\}=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.13}$$

则称X为连续型随机变量；称$f(x)$为X的密度函数或概率密度，并有如下性质

$$\begin{cases} f(x)\geqslant 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1 \end{cases} \tag{1.14}$$

（四）分布函数及其基本性质

1．分布函数　设X是定义在概率空间（$S,\mathscr{F},P$）上的一个随机变量，若$R_1=\{x:-\infty<x<\infty\}$，对于任意的$x\in R_1$，则$X$的分布函数定义为

$$F(x)=P\{X\leqslant x\} \tag{1.15}$$

对于任意实数a、$b(a<b)$，有

$$P\{a<X\leqslant b\}=F(b)-F(a) \tag{1.16}$$

离散型随机变量的分布函数为

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}p_iU(x-x_i) \tag{1.17}$$

式中$U(x)$为单位阶跃函数；$p_i=P(x_i^+)-P(x_i^-)$。离散型随机变量的概率密度为

$$f(x)=\sum_{i}p_i\delta(x-x_i) \tag{1.18}$$

式中　$\delta(x)=\mathrm{d}U(x)/\mathrm{d}x$。

连续型随机变量的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)\mathrm{d}u,\quad x\in R_1 \tag{1.19}$$

若$F(x)$连续可微，则其概率密度为

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.20}$$

混合型随机变量的概率密度为

$$f(x)=b_1\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}+b_2\sum_{i}p_i\delta(x-x_i),\quad b_1\geqslant0,\quad b_2\geqslant0,\quad b_1+b_2=1 \tag{1.21}$$

2．分布函数$F(x)$的基本性质

（1）$0\leqslant F(x)\leqslant1$

（2）$F(x)$为x的单调非降函数。

（3）$F(x)$是右连续的，即：$F(x+0)=F(x)$。

（4）若X的取值全部在区间（a,b）内，则当$x\leqslant a$时，

$F(x)=0$；当$x \geqslant b$时，$F(x)=1$。

三、多维随机变量及其概率分布

（一）二维概率分布及其基本性质

设X、Y为定义在同一概率空间（$S,\mathscr{F},P$）上的两个随机变量，则（X,Y）称为二维随机变量，其联合分布函数为

$$F_{XY}(x,y)=P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}, \quad x,y \in R_1 \tag{1.22}$$

$F_{XY}(x,y)$的基本性质如下：

（1）$0 \leqslant F_{XY}(x,y) \leqslant 1$

（2）$F_{XY}(x,y)$为变量x或y的单调非降函数。

（3）$F_{XY}(x,y)$对变量x或y为右连续。

（4）对任意（x_1,y_1），（x_2,y_2），$x_1<x_2$，$y_1<y_2$，有

$$F_{XY}(x_2,y_2)-F_{XY}(x_2,y_1)+F_{XY}(x_1,y_1)-F_{XY}(x_1,y_2) \geqslant 0$$

若二维随机变量（X,Y）的所有可能取值为有限对或可列无限对时，则称（X,Y）为二维离散随机变量，其概率分布或分布律定义为

$$P\{(X,Y)=(x_i,y_j)\}=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots \tag{1.23}$$

同样，也可列表表示其取值的概率分布情况。显然，p_{ij}具有如下性质：

$$p_{ij} \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}=1, \quad i,j=1,2,\cdots \tag{1.24}$$

二维离散型随机变量（X,Y）的联合分布函数为

$$F_{XY}(x,y)=\sum_{x_i<x}\sum_{y_j<y} p_{ij} \tag{1.25}$$

对于（X,Y）的联合分布函数$F_{XY}(x,y)$，若存在非负的函数$f_{XY}(x,y)$，使对任意的$x,y \in R_1$，有

$$F_{XY}(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{1.26}$$

则称（X,Y）为连续型的二维随机变量，称$f_{XY}(x,y)$为该（X,Y）的联合概率密度。$f_{XY}(x,y)$有如下性质：

（1）$f_{XY}(x,y)\geqslant 0$

（2）$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$

（3）若$f_{XY}(x,y)$在点(x,y)处连续，则有

$$\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\partial y}=f_{XY}(x,y)$$

（4）设G是xoy平面上一个区域，点（X,Y）落在G内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

（二）边沿分布

二维随机变量（X,Y）具有联合分布函数$F_{XY}(x,y)$，而随机变量X、Y各自具有分布函数$F_X(x)$、$F_Y(y)$，称$F_X(x)$、$F_Y(y)$为该（X,Y）关于X、Y的边沿分布函数。边沿分布函数可由联合分布函数来确定

$$\begin{cases}F_{XY}(x,\infty)=F_X(x)\\F_{XY}(\infty,y)=F_Y(y)\end{cases}\tag{1.27}$$

对于连续型随机变量（X，Y），可分别得到（X，Y）关于X、Y的边沿概率密度

$$\begin{cases}f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}y\\f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\end{cases}\tag{1.28}$$

对于概率函数$p_{ij}=p(i,j)=P\{X=x_i,Y=y_j\}$的二维离散型随机变量（$X,Y$），则有

$$\begin{cases}p(i,\cdot)=\sum\limits_{j=1}^{\infty} p(i,j)=P\{X=x_i\}=P_X(x_i),\quad i=1,2,\cdots\\p(\cdot,j)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} p(i,j)=P\{Y=y_j\}=P_Y(y_j),\quad j=1,2,\cdots\end{cases}\tag{1.29}$$

分别称$p(i,\cdot)=P_X(x_i)$、$p(\cdot,j)=P_Y(y_j)$为（X,Y）关于X、Y的边沿概率函数。

（三）相互独立的随机变量与条件分布

1．相互独立的随机变量　设X、Y为两个随机变量，若有

$$F_{XY}(x,y)=F_X(x)F_Y(y),\quad x,y\in R_1 \tag{1.30}$$

则称X、Y为相互独立的随机变量。

当（X,Y）为离散型或连续型随机变量时，X与Y相互独立的条件式（1.30）等价为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\} \tag{1.31}$$

或

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \tag{1.32}$$

2．条件分布　在条件B下，随机变量X的条件分布函数定义为

$$F_{X|B}(x|B)=P\{X\leqslant x|B\}=\frac{P\{X\leqslant x\cap B\}}{P(B)} \tag{1.33}$$

对于连续型随机变量，其条件概率密度为

$$f_{X|B}(x|B)=\frac{\mathrm{d}F_{X|B}(x|B)}{\mathrm{d}x} \tag{1.34}$$

若事件$B=\{y-\Delta y<Y\leqslant y+\Delta y\}$（$\Delta y$很小，几乎趋于0），则有

$$F_{X|B}(x|y-\Delta y<Y\leqslant y+\Delta y)=\frac{\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y}\int_{-\infty}^{x}f_{XY}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y}f_Y(v)\mathrm{d}v} \tag{1.35}$$

上式中，若X、Y为离散型随机变量，且与数值$x_i(i=1,2,\cdots,N)$、$y_j(j=1,2,\cdots,M)$对应的概率为$P(x_i)$、$P(y_j)$，则有

$$f_Y(y)=\sum_{j=1}^{M}P(y_j)\delta(y-y_j) \tag{1.36}$$

$$f_{XY}(x,y)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}P(x_i,y_j)\delta(x-x_i)\delta(y-y_j)$$

(1.37)

假设式（1.35）中Y只取y_k，便得到

$$F_{X|Y}(x|Y=y_k)=\sum_{i=1}^{N}\frac{P(x_i,y_k)}{P(y_k)}U(x-x_i) \tag{1.38}$$

$$f_{X|Y}(x|Y=y_k)=\sum_{i=1}^{N}\frac{P(x_i,y_k)}{P(y_k)}\delta(x-x_i) \tag{1.39}$$

式（1.35）中，若X、Y为连续型随机变量，且$\Delta y\to 0$，则有

$$F_{X|Y}(x|Y=y)=\frac{\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(u,y)\mathrm{d}u}{f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)\mathrm{d}u \tag{1.40}$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \tag{1.41}$$

同理，可得

$$F_{Y|X}(y|X=x)=\frac{\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,v)\mathrm{d}v}{f_X(x)}=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(v|x)\mathrm{d}v \tag{1.42}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \tag{1.43}$$

若两个连续随机变量X、Y互为独立，则有

$$f_{X|Y}(x|y)=f_X(x) \quad 或 \quad f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y)$$

（四）多维随机变量及其概率分布

我们称n个随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$的总体$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为$n$维随机变量。此$\boldsymbol{X}$的分布函数和概率密度分别为

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n\} \tag{1.44}$$

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial^n F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n} \tag{1.45}$$

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$关于X_i的边沿分布函数和边沿概率密度分别为

$$F_{X_i}(x_i) = P\{X_i \leqslant x_i\} = F_X(\infty, \cdots, \infty, x_i, \infty, \cdots, \infty) \tag{1.46}$$

$$f_{X_i}(x_i) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n-1\text{个}} f_X(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) \times \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{i-1} \mathrm{d}x_{i+1} \cdots \mathrm{d}x_n \tag{1.47}$$

若对于任意的实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$，有

$$F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n) \tag{1.48}$$

则称$X_1, X_2, \cdots, X_n$为相互独立的随机变量。

（五）多维正态概率密度的矩阵表示法

若二维正态随机变量（X_1, X_2）的概率密度为

$$f_{X_1X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)} \times \left[\frac{(x_1 - m_{X_1})^2}{\sigma_{X_1}^2} - \frac{2r(x_1 - m_{X_1})(x_2 - m_{X_2})}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} + \frac{(x_2 - m_{X_2})^2}{\sigma_{X_2}^2}\right]\right\}$$

则其矩阵表达式为

$$f_X(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi|\boldsymbol{K}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_X)^T \boldsymbol{K}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_X)}{2}\right] \tag{1.49}$$

式中 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$； $\boldsymbol{x}^T = [x_1 \quad x_2]$； $\boldsymbol{m}_X = \begin{bmatrix} m_{X_1} \\ m_{X_2} \end{bmatrix}$；

$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_X)^T$为列矩阵（$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_X$）的转置矩阵；

$\boldsymbol{K}$为协方差阵，即

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} E[(X_1 - m_{X_1})^2] & E[(X_1 - m_{X_1})(X_2 - m_{X_2})] \\ E[(X_2 - m_{X_2})(X_1 - m_{X_1})] & E[(X_2 - m_{X_2})^2] \end{bmatrix}$$

$|\boldsymbol{K}|$为$\boldsymbol{K}$的行列式；$\boldsymbol{K}^{-1}$为$\boldsymbol{K}$的逆矩阵。

在n维正态随机变量的情况下，定义

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{m}_X = \begin{bmatrix} m_{X_1} \\ m_{X_2} \\ \vdots \\ m_{X_n} \end{bmatrix}$$