

数值分析

● ● 曹立凡 史万明 编著

北京工业学院出版社

数值分析

曹立凡 史万明 编著

北京工业学院出版社

内 容 简 介

本书对常用的数值算法给出了算法的基本思想、计算公式的详细推导、数字计算机上的实现方法，以及计算机中误差的分析、处理方法和有关数值例子，叙述深入浅出、通俗易懂，便于自学。本书适宜作为高等工科院校的教材，也可以作为工程科技人员在数字计算机上实际解题的参考书。

本书经费景高同志审阅，经兵器工业部第二教材编审委员会计算机及应用编审小组于1986年3月20日审定，同意作为教材出版。

数 值 分 析

曹立凡 史万明 编著

*

北京工业学院出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防科工委印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本15.625印张336千字

1986年12月第一版 1986年12月第一次印刷

印数：1—10500册

统一书号：13434·38 定价：2.60元

前 言

本书是作者多年来教学、科研的总结，系统性强，推导详细，实用为主，侧重于讲解数值方法在电子计算机上的使用问题。我们力求使同类算法都由某一基本原理或某一基本公式出发，以便读者领会和掌握同类算法之间的共性和个性。本书适宜作为高等工科院校的教材，亦可供工程科技人员自学或参考。所需的基础知识以高等数学为主，部分章节使用少量的线性代数知识。

全书由航天工业部二院费景高高级工程师主审，提出很多宝贵意见，特此深切致谢！

由于水平所限，编写时间较紧，书中还会有很多缺点和错误，殷切希望读者给予批评和指正。

曹立凡 史万明

1986.3.

目 录

第一章 方程的迭代解法	1
§1.1 迭代解法	1
一、根的初值 二、迭代解法 三、迭代解法收敛的条件	
四、迭代终止的条件	
§1.2 使迭代过程收敛和加快收敛的一些方法	9
一、使用两个迭代值的组合法 二、使用三个迭代值的组合法	
三、改变方程式法之一 四、改变方程式法之二 五、切线法	
六、弦位法及割线法 七、不满足收敛充分条件的处理方法	
八、高阶迭代过程	
§1.3 联立方程组的迭代解法	33
一、解法 二、关于三个收敛的充分条件证明	
§1.4 联立方程组的牛顿线性化解法	42
§1.5 联立方程组的连续解法	45
§1.6 最优化计算简介	47
一、无约束极值问题的一维寻查法 二、求多变量极值的方法	
第二章 线性代数方程组的数值解法	69
§2.1 消元法	70
一、高斯消元法 二、克劳特法 三、平方根法 四、乔累斯基法	
§2.2 矩阵A能分解成LU的条件	96
§2.3 主元素法	99
一、按列选主元素消元法 二、按行选主元素消元法 三、全主元素消元法 四、无回代过程的主元素法	
§2.4 简单迭代法	110
一、简单迭代法 二、简单迭代法的收敛条件 三、使迭代过程	

收敛的一些方法	
§2.5 赛德尔迭代法	122
一、赛德尔解法 二、赛德尔法的收敛条件	
第三章 插值计算	128
§3.1 差商与差分	129
一、差商 二、差分	
§3.2 插值公式	137
一、牛顿基本差商公式 二、拉格朗日插值公式 三、牛顿向前差分公式 四、牛顿向后差分公式 五、高斯第一插值公式	
六、高斯第二插值公式 七、斯梯林插值公式 八、贝塞尔插值公式	
§3.3 插值公式的唯一性及余式	156
一、插值公式的唯一性 二、差商与导数的关系 三、关于余式的估计 四、各种插值公式的余式 五、插值公式的应用	
§3.4 插值计算中的误差	166
一、绝对误差和相对误差 二、舍入方法与有效数字 三、算术运算中的误差 四、插值计算中的误差	
§3.5 误差分配的原则	172
§3.6 分段插值	182
§3.7 埃尔米特插值公式	185
§3.8 样条插值函数	195
一、样条的概念 二、三次样条函数的表达式 三、 k_1 的求解方法	
§3.9 反插值	207
一、使用反函数的插值法 二、解方程法	
§3.10 多元函数的插值方法	214
一、直线插值法 二、曲线插值法	
第四章 数值微分和数值积分	219
§4.1 数值微分	219

§4.2	数值积分	225
§4.3	对称的求积公式	226
	一、对称的求积公式 二、牛顿-柯特斯求积公式 三、关于 $C_r=C_{n-r}$ 的证明 四、复合求积公式	
§4.4	龙贝格法	244
§4.5	切比雪夫求积公式	248
§4.6	高斯求积公式	257
§4.7	利用样条插值函数的求积公式	265
§4.8	重积分的求积公式	266
第五章 常微分方程的数值解法		271
§5.1	引言	271
§5.2	线性多步法	273
	一、线性多步法的建立方法 二、局部截断误差及其误差界 三、整体截断误差及整体误差界 四、线性多步法的相容性 五、线性多步法的收敛性 六、线性多步法的稳定性 七、起始值的求取方法 八、预测-校正法	
§5.3	龙格-库塔法	350
	一、龙格-库塔公式的导出 二、龙格-库塔法的误差界 三、龙格-库塔法的相容性、收敛性和稳定性	
§5.4	高阶微分方程及微分方程组的数值解法	367
	一、一阶联立微分方程组的龙格-库塔解法 二、一阶联立微分方程组的阿当姆斯解法 三、刚性方程组	
§5.5	常微分方程的边值问题	376
	一、边值问题 二、化边值问题为初值问题 三、差分方法 四、尝试法	
第六章 函数逼近		390
§6.1	离散情况下的最小平方逼近	390
	一、最小平方逼近多项式 $P_m(x)$ 的求取方法 二、正规方程的特点及 I 为最小的证明 三、使用正交多项式的最小平方逼近	

四、多元函数的最小平方逼近	
§6.2 连续情况下的最小平方逼近	406
一、方法和公式 二、利用勒让德多项式的最小平方逼近	
§6.3 切比雪夫多项式及函数的切比雪夫展开式	410
一、切比雪夫多项式的定义 二、切比雪夫多项式的一些性质	
三、函数的切比雪夫展开式 四、用切比雪夫多项式表示函数的系数表	
§6.4 最佳一致逼近	422
一、最佳逼近多项式的有关理论问题 二、插值节点的最佳选择	
三、最佳逼近多项式的近似求法——里米兹法	
§6.5 按相对误差的最佳一致逼近	444
附表	448
附录	489

第一章 方程的迭代解法

本章所指的方程是代数方程或超越方程，这两种方程的解法很多，本章只介绍它们的迭代解法，并且仅限于求方程的实根。

§1.1 迭代解法

一、根的初值

设有方程

$$f(x) = 0 \quad (1.1-1)$$

其中 $f(x)$ 为区间 $[a, b]$ 上的单值连续函数。如果 $f(a) f(b) < 0$ ，则 $f(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 中至少有一个实根。这时我们可取 a, b 的中点 $c = (a+b)/2$ ，若 $f(c) = 0$ ，则 c 就是(1.1-1)式的根，否则再看 $f(a)f(c)$ 及 $f(c)f(b)$ 哪一个为负数，若 $f(a)f(c) < 0$ ，则在 $[a, c]$ 上至少有一个实根。如此把区间逐次减半，最后把某一实根圈在 $[x_0, x_1]$ 上，使之满足 $|x_1 - x_0| < \epsilon$ 为止。这里 ϵ 是对初值的精度要求，故可取区间 $[x_0, x_1]$ 中的任一点为实根的初值。

按照上面的演算过程，可编出相应的圈根程序，求出在 $[a, b]$ 区间上方程实根的位置。使用前要求给出演算的上限 b 和下限 a ，还要求给定增量 Δx 和误差 ϵ 的数值。使用的数学方法如下：从 a 开始以每步增量 Δx 计算各子区间终点的 $f(x)$ 值，例如 $f(a), f(a+\Delta x), f(a+2\Delta x), \dots$ ，找到在哪个子区间内

$f(x)$ 的值改变符号, 然后将此子区间对分, 再找出是在哪一半内改变符号, 再继续对分, 直到此区间小于 ε 为止。若经上述过程找不到改变符号的区间时, 可将 Δx 减小后继续按上过程进行计算。

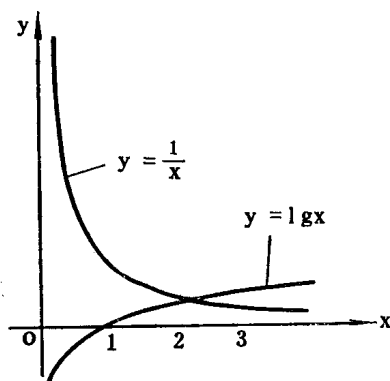


图1.1-1

也可以用其他方法求根的初值, 例如用作图的方法。如方程 $x \lg x - 1 = 0$, 我们可以把它改写成 $\lg x = 1/x$, 再分别画出对数曲线及双曲线 $y = 1/x$, 两条曲线交点的横坐标约为 2.5 (图 1.1-1), 则可取 $x_0 = 2.5$ 为方程

实根的初值。对于代数方程, 圈定根的定理很多, 都可取用。

二、迭代解法

这种解法是由根的近似值出发, 通过迭代公式将近似值加以精确化的反复演算过程。方法如下: 首先将 $f(x) = 0$ 改写为下列形式

$$x = \varphi(x) \quad (1.1-2)$$

$y_1 = x$ 与 $y_2 = \varphi(x)$ 的交点 A 的横坐标 ξ 即为方程 $f(x) = 0$ 的根 (图 1.1-2)。对于根 ξ 的近似值 x_0 , 显然 $x_0 \neq \varphi(x_0)$, 否则 x_0 就是方程 $f(x) = 0$ 的根了。为获得较 x_0 更接近于 ξ 的近似值,

可过 $A_0[x_0, \varphi(x_0)]$ 点作 x 轴的平行线交 $y_1 = x$ 于 A'_0 点，设 A'_0

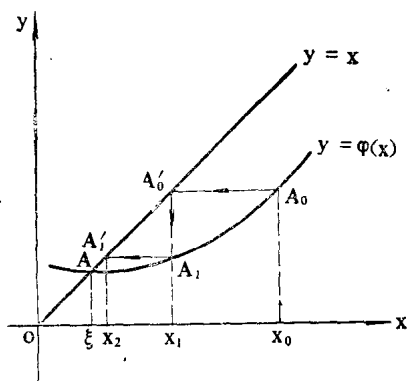


图1.1-2

点所对应的横坐标为 x_1 ，如此继续推作下去，可循折线 $A_0A'_0A_1A'_1\cdots$ 趋近 A 点。与此折线上的点 A_0, A_1, A_2, \cdots 相对应的横坐标 x_0, x_1, x_2, \cdots 从根的一侧逐步地趋近根 ξ 。可从上述方法归纳出如下的计算公式：

$$x_1 = \varphi(x_0)$$

$$x_2 = \varphi(x_1)$$

$$x_3 = \varphi(x_2)$$

.....

或简记为

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

$$(n=0, 1, 2, \cdots)$$

$$(1.1-3)$$

称公式(1.1-3)为迭

代公式。而 $x_0, x_1, x_2,$

..... 依次称为零次，

一次，二次，.....近似值。这些近似值有时从根的两侧往复

地趋向根 ξ ，如图1.1-3所示，其相应的折线 $A_0A'_0A_1A'_1\cdots$ 呈螺旋线状趋近 A 点。

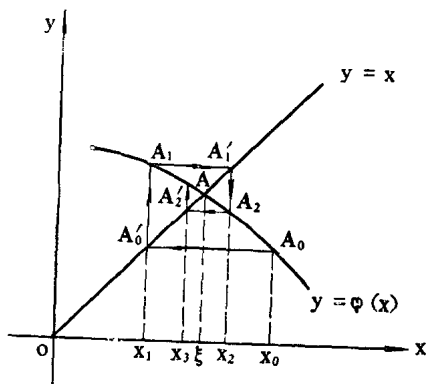


图1.1-3

如果序列 x_0, x_1, x_2, \dots 收敛于 ξ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$$

因 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, 两边取极限得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$$

所以 $\xi = \varphi(\xi)$, 即 ξ 就是方程 $x = \varphi(x)$ 的根, 亦即方程 $f(x) = 0$ 的根。

三、迭代解法收敛的条件

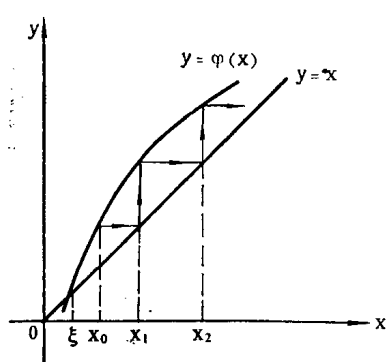


图1.1-4

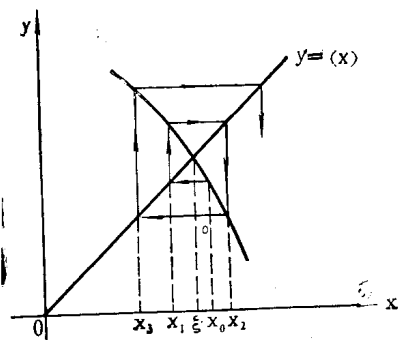


图1.1-5

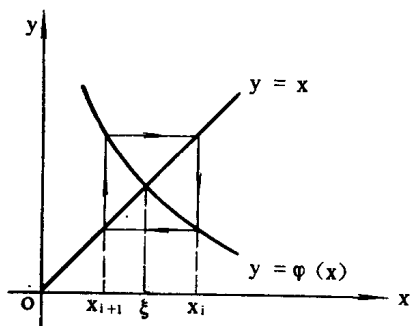


图1.1-6

上面所介绍的用逐次迭代来解方程的方法, 不是在任何情况下都是有效的, 在某些情况下, 折线 $A_0A_0'A_1A_1' \dots$ 不趋向于 A 点, 如图1.1-4、图1.1-5以及图1.1-6 (死循环) 所示。那

么，上述迭代过程何时收敛，何时不收敛（即发散）呢？

设 $\varphi(x)$ 有一阶连续导数， ξ 为方程 $x = \varphi(x)$ 的根，即 $\xi = \varphi(\xi)$ ，则在 ξ 和 x_0 之间可找到 η ，使

$$x_1 - \xi = \varphi(x_0) - \varphi(\xi) = \varphi'(\eta)(x_0 - \xi)$$

或
$$\frac{|x_1 - \xi|}{|x_0 - \xi|} = |\varphi'(\eta)| \quad (1.1-4)$$

从 (1.1-4) 式可见，若在包含 ξ 的邻域 $[a, b]$ 内存在有正数 $q < 1$ ，使得

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad x \in [a, b] \quad (1.1-5)$$

成立，则必有

$$\frac{|x_1 - \xi|}{|x_0 - \xi|} \leq q < 1 \quad (1.1-6)$$

上式说明， x_1 较 x_0 更接近于根 ξ 。

同样有

$$\frac{|x_2 - \xi|}{|x_1 - \xi|} \leq q, \quad \frac{|x_3 - \xi|}{|x_2 - \xi|} \leq q, \dots$$

因而

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \xi| &\leq q |x_n - \xi| \leq q^2 |x_{n-1} - \xi| \\ &\leq q^3 |x_{n-2} - \xi| \\ &\dots\dots\dots \\ &\leq q^{n+1} |x_0 - \xi| \end{aligned} \quad (1.1-7)$$

因 $q < 1$ ，当 $n \rightarrow \infty$ ， $x_{n+1} \rightarrow \xi$ ，即 x_{n+1} 趋近于方程 $x = \varphi(x)$ ，亦即方程 $f(x) = 0$ 的根 ξ 。由此可见，在根 ξ 的附近 $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ 即为迭代解法收敛的充分条件。实际使用时常用下式进行检验

$$|\varphi'(x_0)| < 1 \quad (1.1-8)$$

四、迭代终止的条件

迭代过程 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) 不应无休止地进行下去, 当

$$|x_n - \xi| < \varepsilon \quad (\text{对 } \xi \text{ 的精度要求}) \quad (1.1-9)$$

满足时应该终止迭代计算。因 ξ 未知, 所以公式(1.1-9)无法使用。我们可以通过对 $|x_n - \xi|$ 的估计公式间接地来判定。为此我们推导下面几个误差估计公式。

1. 设 $|\varphi'(x)| \leq q < 1, x \in [a, b]$, 则

$$|x_n - \xi| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \quad (1.1-10)$$

证 记 $\bar{f}(x) = x - \varphi(x)$, 则

$$\bar{f}'(x) = 1 - \varphi'(x) \geq 1 - q$$

又因 $\bar{f}(\xi) = 0$, 所以

$$\bar{f}(x_n) - \bar{f}(\xi) = x_n - \varphi(x_n) = \varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_n)$$

由中值定理得

$$\bar{f}'(\eta_1)(x_n - \xi) = \varphi'(\eta_2)(x_{n-1} - x_n)$$

$$\text{所以有 } |x_n - \xi| = \left| \frac{\varphi'(\eta_2)}{\bar{f}'(\eta_1)} \right| |x_n - x_{n-1}|$$

$$\leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \quad (\text{证毕})$$

当 $q \leq \frac{1}{2}$ 时, $\frac{q}{1-q} \leq 1$, 则有

$$|x_n - \xi| \leq |x_n - x_{n-1}| \quad (1.1-11)$$

若要求 $|x_n - \xi| < \varepsilon$, 只需 $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ 就行了。

当 $q > \frac{1}{2}$ 时, $\frac{q}{1-q} > 1$, 为使 $|x_n - \xi| < \varepsilon$, 必须要求

$$\frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

即要求

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon = \delta (< \varepsilon) \quad (1.1-12)$$

$$2. \quad |x_n - \xi| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| \quad (1.1-13)$$

证 由1知

$$\begin{aligned} |x_n - \xi| &\leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| \\ &= \frac{q}{1-q} |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2})| \\ &= \frac{q}{1-q} |\varphi'(\eta_1)(x_{n-1} - x_{n-2})| \\ &\leq \frac{q^2}{1-q} |x_{n-1} - x_{n-2}| \\ &= \frac{q^2}{1-q} |\varphi(x_{n-2}) - \varphi(x_{n-3})| \\ &= \frac{q^2}{1-q} |\varphi'(\eta_2)(x_{n-2} - x_{n-3})| \\ &\leq \frac{q^3}{1-q} |x_{n-2} - x_{n-3}| \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| \quad (\text{证毕})$$

$$\text{当} \quad \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| < \varepsilon \quad (1.1-14)$$

满足时, 则必有 $|x_n - \xi| < \varepsilon$ 。

$$3. \quad |x_n - \xi| \leq \frac{|\tilde{f}(x_n)|}{m}, m \leq |f'(x)|, x \in [a, b].$$

$$\text{证 因为 } \tilde{f}(x_n) - \tilde{f}(\xi) = \tilde{f}(x_n) \\ \tilde{f}'(\eta)(x_n - \xi) = \tilde{f}(x_n)$$

所以

$$|x_n - \xi| = \frac{|\tilde{f}(x_n)|}{|\tilde{f}'(\eta)|} \leq \frac{|\tilde{f}(x_n)|}{m} \quad (\text{证毕})$$

当 $|\tilde{f}(x_n)| \leq m\varepsilon$ 满足时, 必有 $|x_n - \xi| < \varepsilon$ 。

例 解方程 $x^5 - x - 0.2 = 0$ 。

解 把方程写成

$$x + 0.2 = x^5$$

曲线 $y = x^5$ 与直线
 $y = x + 0.2$ 交点的横
坐标约为 1, -1, -0.3

(如图 1.1-7 所示),

$$\text{取 } \varphi(x) = x^5$$

$$-0.2, \varphi'(x) = 5x^4$$

$$|\varphi'(1)| = 5 > 1$$

$$|\varphi'(-1)| = 5 > 1$$

$$|\varphi'(-0.3)| = 0.0405$$

< 1 。可见, 把方程写成 $x = x^5 - 0.2$ 的形式时, 只能求出 -0.3

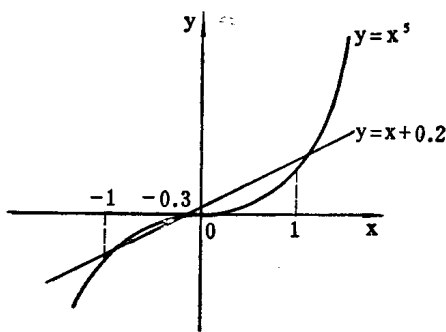


图 1.1-7

附近的近似根，其各次迭代值为：

$$x_0 = -0.3, x_1 = -0.2024, x_2 = -0.2003, \\ x_3 = -0.2003。$$

若把方程改写成

$$x = \sqrt[5]{x+0.2}$$

$$\text{则 } \varphi(x) = \sqrt[5]{x+0.2}, \varphi'(x) = \frac{1}{5}(x+0.2)^{-\frac{4}{5}}$$

$$|\varphi'(1)| < 1, |\varphi'(-1)| < 1$$

因此可用公式

$$x_{n+1} = \sqrt[5]{x_n+0.2} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

来求 $x = \pm 1$ 附近的近似根，其各次迭代值如下：

$$x_0 = 1, x_1 = 1.0371, x_2 = 1.0435, x_3 = 1.0445, \\ x_4 = 1.0447, x_5 = 1.0447;$$

$$x_0 = -1, x_1 = -0.9563, x_2 = -0.9456, x_3 = -0.9430, \\ x_4 = -0.9423, x_5 = -0.9421, x_6 = -0.9421。$$

§1.2 使迭代过程收敛和加快收敛 的一些方法

为使迭代过程收敛和提高收敛的速度，可设法 1) 提高初值的精度以减少迭代的次数，通常可采用近似公式或简单的算法确定之。2) 减小 q 值以提高收敛的速度， q 值愈小则收敛愈快。一般认为 $q < 1/10$ 时收敛较快， $q > 1/2$ 时收敛较慢。

3) 提高收敛的阶数。

对于迭代过程

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

有 $\xi - x_{n+1} = \varphi(\xi) - \varphi(x_n) = \varphi'(\eta)(\xi - x_n)$ ，因而