数值分析

曹立凡　史万明　编著

北京工业学院出版社

数 值 分 析

曾立凡 史万明 编著

北京工业学院出版社

内 容 简 介

本书对常用的数值算法给出了算法的基本思想、计算公式的详细推导、数字计算机上的实现方法，以及计算机中误差的分析、处理方法和有关数值例子，叙述深入浅出、通俗易懂，便于自学。本书适宜作为高等工科院校的教材，也可以作为工程科技人员在数字计算机上实际解题的参考书。

本书经费景高同志审阅，经兵器工业部第二教材编审委员会计算机及应用编审小组于1986年3月20日审定，同意作为教材出版。

数 值 分 析

曹立凡 史万明 编著

*

北京工业学院出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防科工委印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本15.625印张336千字

1986年12月第一版 1986年12月第一次印刷

印数：1—10500册

统一书号：13434·38 定价：2.60元

前　言

本书是作者多年来教学、科研的总结，系统性强，推导详细，实用为主，侧重于讲解数值方法在电子计算机上的使用问题。我们力求使同类算法都由某一基本原理或某一基本公式出发，以便读者领会和掌握同类算法之间的共性和个性。本书适宜作为高等工科院校的教材，亦可供工程科技人员自学或参考。所需的基础知识以高等数学为主，部分章节使用少量的线性代数知识。

全书由航天工业部二院费景高高级工程师主审，提出很多宝贵意见，特此深切致谢！

由于水平所限，编写时间较紧，书中还会有很多缺点和错误，殷切希望读者给予批评和指正。

曹立凡　史万明

1986.3.

目　　录

第一章　方程的迭代解法

本章所指的方程是代数方程或超越方程，这两种方程的解法很多，本章只介绍它们的迭代解法，并且仅限于求方程的实根。

§1.1　迭代解法

一、根的初值

设有方程

$$f(x)=0 \tag{1.1-1}$$

其中$f(x)$为区间$[a,b]$上的单值连续函数。如果$f(a)\ f(b)<0$，则$f(x)=0$在$[a,b]$中至少有一个实根。这时我们可取a,b的中点$c=(a+b)/2$，若$f(c)=0$，则c就是(1.1-1)式的根；否则再看$f(a)f(c)$及$f(c)f(b)$哪一个是负数，若$f(a)f(c)<0$，则在$[a,c]$上至少有一个实根。如此把区间逐次减半，最后把某一实根圈在$[x_0,x_1]$上，使之满足$|x_1-x_0|<\varepsilon$为止。这里ε是对初值的精度要求，故可取区间$[x_0,x_1]$中的任一点为实根的初值。

按照上面的演算过程，可编出相应的圈根程序，求出在$[a,b]$区间上方程实根的位置。使用前要求给出演算的上限b和下限a，还要求给定增量Δx和误差ε的数值。使用的数学方法如下：从a开始以每步增量Δx计算各子区间终点的$f(x)$值，例如$f(a)$，$f(a+\Delta x)$，$f(a+2\Delta x)$，……，找到在哪个子区间内

$f(x)$的值改变符号，然后将此子区间对分，再找出是在哪一半内改变符号，再继续对分，直到此区间小于 ε 为止。若经上述过程找不到改变符号的区间时，可将Δx减小后继续按上过程进行计算。

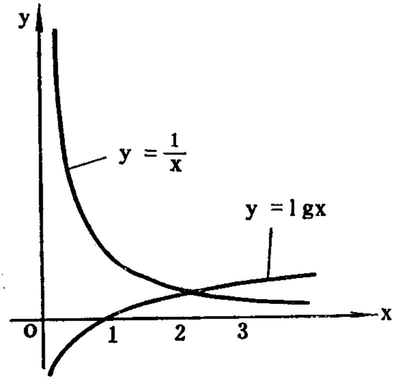


图1.1-1

也可以用其他方法求根的初值，例如用作图的方法。如方程 $x\lg x-1=0$，我们可以把它改写成 $\lg x=1/x$，再分别画出对数曲线及双曲线 $y=1/x$，两条曲线交点的横坐标约为2.5（图1.1-1），则可取 $x_0=2.5$ 为方程实根的初值。对于代数方程，圈定根的定理很多，都可取用。

二、迭代解法

这种解法是由根的近似值出发，通过迭代公式将近似值加以精确化的反复演算过程。方法如下：首先将$f(x)=0$改写为下列形式

$$x=\varphi(x) \tag{1.1-2}$$

$y_1=x$与$y_2=\varphi(x)$的交点A的横坐标ξ即为方程$f(x)=0$的根（图1.1-2）。对于根ξ的近似值x_0，显然$x_0\neq\varphi(x_0)$，否则x_0就是方程$f(x)=0$的根了。为获得较x_0更接近于ξ的近似值，

可过$A_0[x_0,\varphi(x_0)]$点作x轴的平行线交$y_1=x$于A_0'点，设A_0'点所对应的横坐标为x_1，如此继续推作下去，可循折线 $A_0A_0'A_1A_1'$……趋近A点。与此折线上的点A_0，A_1，A_2，……相对应的横坐标x_0，x_1，x_2，……从根的一侧逐步地趋近根ξ。可从上述方法归纳出如下的计算公式：

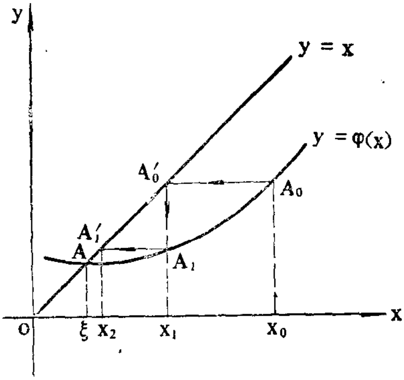


图1.1-2

$$x_1=\varphi(x_0)$$
$$x_2=\varphi(x_1)$$
$$x_3=\varphi(x_2)$$
$$\cdots\cdots$$

或简记为

$$x_{n+1}=\varphi(x_n)$$
$$(n=0,1,2,\cdots\cdots) \tag{1.1-3}$$

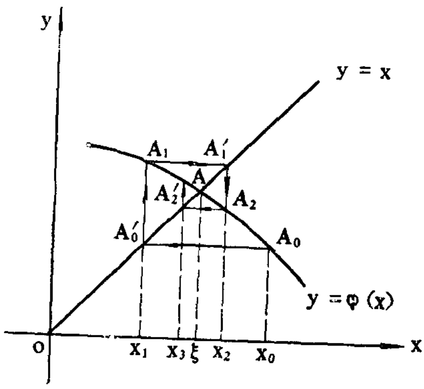


图1.1-3

称公式(1.1-3)为迭代公式。而x_0，x_1，x_2，……依次称为零次，一次，二次，……近似值。这些近似值有时从根的两侧往复地趋向根ξ，如图1.1-3所示，其相应的折线$A_0A_0'A_1A_1'$……呈螺旋线状趋近A点。

如果序列$x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots$收敛于$\xi$，即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$$

因$x_{n+1} = \varphi(x_n)$，两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

所以$\xi = \varphi(\xi)$，即ξ就是方程$x = \varphi(x)$的根，亦即方程$f(x) = 0$的根。

三、迭代解法敛收的条件

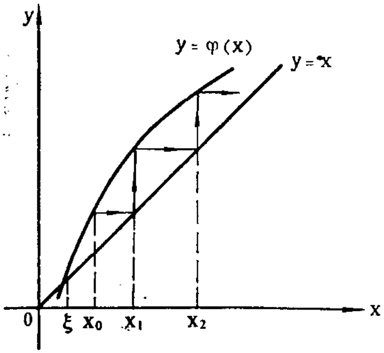
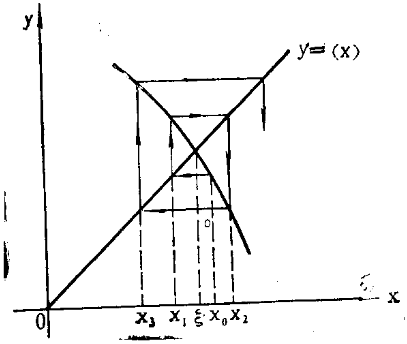


图1.1-4



. 1-5

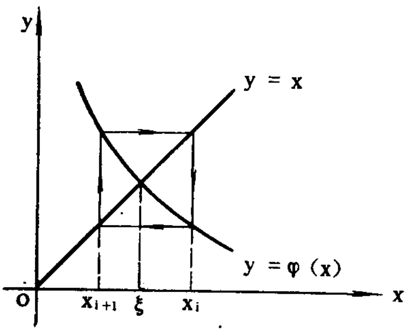


图1.1-6

上面所介绍的用逐次迭代来解方程的方法，不是在任何情况下都是有效的，在某些情况下，折线$A_0A_0'A_1A_1'\cdots\cdots$不趋向于$A$点，如图1.1-4、图1.1-5以及图1.1-6（死循环）所示。那

么，上述迭代过程何时收敛，何时不收敛（即发散）呢？

设$\varphi(x)$有一阶连续导数，ξ为方程$x=\varphi(x)$的根，即$\xi=\varphi(\xi)$，则在ξ和x_0之间可找到η，使

$$x_1-\xi=\varphi(x_0)-\varphi(\xi)=\varphi'(\eta)(x_0-\xi)$$

或

$$\frac{|x_1-\xi|}{|x_0-\xi|}=|\varphi'(\eta)| \tag{1.1-4}$$

从（1.1-4）式可见，若在包含ξ的邻域$[a,b]$内存在有正数$q<1$，使得

$$|\varphi'(x)|\leqslant q<1 \quad x\in[a,b] \tag{1.1-5}$$

成立，则必有：

$$\frac{|x_1-\xi|}{|x_0-\xi|}\leqslant q<1 \tag{1.1-6}$$

上式说明，x_1较x_0更接近于根ξ。

同样有

$$\frac{|x_2-\xi|}{|x_1-\xi|}\leqslant q, \quad \frac{|x_3-\xi|}{|x_2-\xi|}\leqslant q, \cdots\cdots$$

因而

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-\xi|\leqslant q|x_n-\xi|&\leqslant q^2|x_{n-1}-\xi|\\&\leqslant q^3|x_{n-2}-\xi|\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\leqslant q^{n+1}|x_0-\xi|\end{aligned} \tag{1.1-7}$$

因$g<1$，当$n\to\infty$，$x_{n+1}\to\xi$，即x_{n+1}趋近于方程$x=\varphi(x)$，亦即方程$f(x)=0$的根ξ。由此可见，在根ξ的附近$|\varphi'(x)|\leqslant q<1$即为迭代解法收敛的充分条件。实际使用时常用下式进行检验

$$|\varphi'(x_0)|<1 \tag{1.1-8}$$

四、迭代终止的条件

迭代过程$x_{n+1}=\varphi(x_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 不应无休止地进行下去，当

$$|x_n-\xi|<\varepsilon \text{ (对}\xi\text{的精度要求)} \tag{1.1-9}$$

满足时应该终止迭代计算。因ξ未知，所以公式(1.1-9)无法使用。我们可以通过对 $|x_n-\xi|$ 的估计公式间接地来判定。为此我们推导下面几个误差估计公式。

1. 设$|\varphi'(x)|\leqslant q<1, x\in[a,b]$，则

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{q}{1-q}|x_n-x_{n-1}| \tag{1.1-10}$$

证 记 $f(x)=x-\varphi(x)$，则

$$f'(x)=1-\varphi'(x)\geqslant 1-q$$

又因$f(\xi)=0$，所以

$$f(x_n)-f(\xi)=x_n-\varphi(x_n)=\varphi(x_{n-1})-\varphi(x_n)$$

由中值定理得

$$f'(\eta_1)(x_n-\xi)=\varphi'(\eta_2)(x_{n-1}-x_n)$$

所以有 $$|x_n-\xi|=\left|\frac{\varphi'(\eta_2)}{f'(\eta_1)}\right||x_n-x_{n-1}|$$

$$\leqslant\frac{q}{1-q}|x_n-x_{n-1}| \text{ (证毕)}$$

当$q\leqslant\frac{1}{2}$时，$\frac{q}{1-q}\leqslant 1$，则有

$$|x_n-\xi|\leqslant|x_n-x_{n-1}| \tag{1.1-11}$$

若要求$|x_n-\xi|<\varepsilon$，只需$|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon$就行了。

当 $q>\frac{1}{2}$时，$\frac{q}{1-q}>1$，为使$|x_n-\xi|<\varepsilon$，必须要求

$$\frac{q}{1-q}|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon$$

即要求

$$|x_n-x_{n-1}|\leqslant\frac{1-q}{q}\varepsilon=\delta(<\varepsilon) \tag{1.1-12}$$

2. $$|x_n-\xi|\leqslant\frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0| \tag{1.1-13}$$

证 由1知

$$\begin{aligned}|x_n-\xi|&\leqslant\frac{q}{1-q}|x_n-x_{n-1}|\\&=\frac{q}{1-q}|\varphi(x_{n-1})-\varphi(x_{n-2})|\\&=\frac{q}{1-q}|\varphi'(\eta_1)(x_{n-1}-x_{n-2})|\\&\leqslant\frac{q^2}{1-q}|x_{n-1}-x_{n-2}|\\&=\frac{q^2}{1-q}|\varphi(x_{n-2})-\varphi(x_{n-3})|\\&=\frac{q^2}{1-q}|\varphi'(\eta_2)(x_{n-2}-x_{n-3})|\\&\leqslant\frac{q^3}{1-q}|x_{n-2}-x_{n-3}|\end{aligned}$$

…………

$$\leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0| \quad (\text{证毕})$$

当
$$\frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0|<\varepsilon \qquad (1.1\text{-}14)$$

满足时，则必有$|x_n-\xi|<\varepsilon$。

3．$|x_n-\xi|\leqslant\dfrac{|f(x_n)|}{m}, m\leqslant|f'(x)|, x\in[a,b]$。

证 因为
$$f(x_n)-f(\xi)=f(x_n)$$
$$f'(\eta)(x_n-\xi)=f(x_n)$$

所以
$$|x_n-\xi|=\frac{|f(x_n)|}{|f'(\eta)|}\leqslant\frac{|f(x_n)|}{m} \quad (\text{证毕})$$

当$|f(x_n)|\leqslant m\varepsilon$满足时，必有$|x_n-\xi|<\varepsilon$。

例 解方程$x^5-x-0.2=0$。

解 把方程写成

$x+0.2=x^5$

曲线$y=x^5$与直线$y=x+0.2$交点的横坐标约为1,-1,－0.3（如图1.1-7所示），

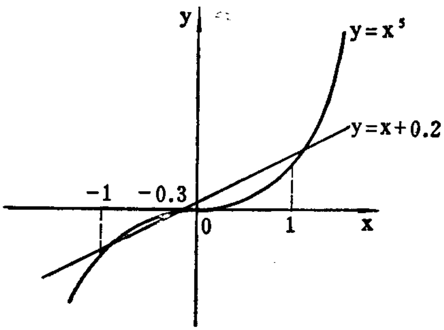


图1.1-7

取$\varphi(x)=x^5-0.2$, $\varphi'(x)=5x^4$

$|\varphi'(1)|=5>1$

$|\varphi'(-1)|=5>1$

$|\varphi'(-0.3)|=0.0405<1$。可见，把方程写成$x=x^5-0.2$的形式时，只能求出－0.3

附近的近似根，其各次迭代值为：

$x_0=-0.3$， $x_1=-0.2024$，$x_2=-0.2003$，$x_3=-0.2003$。

若把方程改写成

$$x=\sqrt[5]{x+0.2}$$

则 $\varphi(x)=\sqrt[5]{x+0.2}$，$\varphi'(x)=\frac{1}{5}(x+0.2)^{-\frac{4}{5}}$

$$|\varphi'(1)|<1,|\varphi'(-1)|<1$$

因此可用公式

$$x_{n+1}=\sqrt[5]{x_n+0.2} \quad (n=0,1,2,\cdots\cdots)$$

来求$x=\pm 1$附近的近似根，其各次迭代值如下：

$x_0=1$， $x_1=1.0371$，$x_2=1.0435$，$x_3=1.0445$，$x_4=1.0447$，$x_5=1.0447$；

$x_0=-1$，$x_1=-0.9563$，$x_2=-0.9456$，$x_3=-0.9430$，$x_4=-0.9423$，$x_5=-0.9421$，$x_6=-0.9421$。

§1.2 使迭代过程收敛和加快收敛的一些方法

为使迭代过程收敛和提高收敛的速度，可设法 1 ）提高初值的精度以减少迭代的次数，通常可采用近似公式或简单的算法确定之。2）减小q值以提高收敛的速度，q值愈小则收敛愈快。一般认为$q<1/10$时收敛较快；$q>1/2$时收敛较慢。3 ）提高收敛的阶数。

对于迭代过程

$$x_{n+1}=\varphi(x_n) \quad (n=0,1,2,\cdots\cdots)$$

有$\xi-x_{n+1}=\varphi(\xi)-\varphi(x_n)=\varphi'(\eta)(\xi-x_n)$，因而