●21世纪最新版

中国名校特级教师

随堂

导教·导学 导练·导考

安春华 主编

高二解析几何

欢迎关注并参与
"金四导"丛书读者
有奖反馈大行动

随堂
导教·导学
导练·导考

高二解析几何

21世纪最新版

中国名校特级教师

主　编　安春华
撰　稿　赵　民　门爱芳　宋呈在
　　　　何金良　王华丽

吉林教育出版社

(吉)新登字 02 号
封面设计:周建明
责任编辑:王世斌　周文胜

"金四导"丛书

中国名校特级教师

随堂导教·导学·导练·导考

高二解析几何

(最新修订版)

安春华(特级教师)　主　编

吉林教育出版社　出版 发行
山东临沭县华艺印务有限公司印刷　新华书店经销
开本:850×1168 毫米　1/32　印张:15.3125　字数:515 千字
2001 年 8 月第 2 版第 2 次印刷
印数:1～5000 册
ISBN 7－5383－3033－X/G·2712
定价:15.80 元

中国名校特级教师

随堂导教·导学·导练·导考（高中）

主编简介

安春华，山东省特级教师，现任淄博七中副校长。

在教学方面，治学严谨，有丰富的教学经验，平时十分注重学生能力的培养，形成了一套比较科学的教学方法，多次被邀请在全市(地)做有关数学素质教育报告，执教示范观摩课，教学成绩一直名列前茅；所辅导的学生在全国数学奥林匹克竞赛中屡次获奖。在教研方面，努力探索，潜心研究，取得了令人瞩目的成绩。在省和国家级期刊上发表过二十余篇学术论文，并有多篇在学术会议上交流，其中影响较大的有《一个值得重视的公式》(《中学生数学》)《在教学中培养学生的运算能力》(《数学教学研究》)《抛物线》(中学数学研究动态》)《如何搞好过渡班教学》(《教学与管理》)《如何抓好高中起始班教学》(《中学教育》)等；主编了《新编高中总复习三考一测丛书·数学》《初等数学分类研究》等十几部著作；承担了一项国家教委"九五规划重点课题"和一项省级课题。先后被授予省教育科研先进工作者、市"十佳职业道德标兵"、市数学学科带头人、市优秀青年知识分子、"振兴淄博"五一劳动奖章、市青年科技奖等荣誉称号。其事迹在省市报纸、电视台中均有过专题报道。

向课堂要效益　倡导教学新理念

——关于《“金四导”丛书》的审读报告

出版缘起：应培养中小学生创新意识与实践能力的急切呼唤之运而生

新世纪的考试制度、考试形式和内容，必将与素质教育相适应，更加注重考查学生的能力、观点和方法。尤其是创新意识和实践能力的考查，将在考试中逐步占有重要的位置。提供一套教辅读物，它能与素质教育、考试改革同步，与课堂教学的进程同步，与学生的能力、观点、方法培养的需求同步，成为当务之急。为此，北京、天津及华东六省近百位著名特级教师精心策划、编写了这套《中国名校特级教师随堂导教·导学·导练·导考》丛书。

栏目分工：凸现随堂理念、权威剖示“五点”——知识点、重、难、疑点与考点间的关联

丛书各分册均以相配套的教材的单元（章）、课（节）为序，并设有如下栏目：

单元（本章）目标　根据各学科主要应培养的能力，提出本单元（章）应培养和考查的具体能力，以及用一定的思想、观点、方法去分析和解决问题的能力，能反映创新意识的能力和实践能力，体现由单纯的知识目标向能力目标的转变，由知识的继承向知识的创新转变。

单元（本章）小结　在学完某一单元（章）的基础上，围绕各能力目标的达成，总结出能力形成的主要途径，应注意的问题和关键，以及如何克服各种失误等。

梳理知识　罗列、梳理本课（节）关键的、重点的知识、规律、技能、观点、方法，进行精析，对达成某些能力的相应知识点进行指点。

表解重点　对容易混淆的内容，利用表或图的形式

进行精析；将易混淆的知识、技能、观点、方法、能力之间的本质区别与联系揭示出来，避免在应用时出现错误。

讨论难点 围绕某课（节）确有难度的课后习题进行讨论，指出解题思路、关键，以及如何避免错误，帮助学生提高分析、解决问题的能力。

剖示考点 通过对历年高考相关热点考题的回顾，使学生对能力考查的形式及其变化，对解题思路及其关键，有个整体的、连续性的思考和把握，形成能力，以便从容应对。本栏目还是全国各地历届高考典型题荟萃。

精解名题 通过对具有前瞻性、典型性的名题进行精析，使学生对学科考试形式和内容改革的思路，有一个超前性的了解，以培养学生的创新精神和实践能力。

关注考试：以题、以练为主，发挥学生主体性作用

测试能力 针对某课（节）的主要能力目标，以高考常考题型为准，适当考虑命题改革总的趋势，设计课（节）能力达标测试题，以求课课通。

单元（本章）能力验收 *A* 卷 用来检测各单元（章）基础知识与基本能力的达成情况。

单元（本章）能力验收 *B* 卷 用来检测各单元（章）综合能力的达成情况。

为了配合期中、期末自测，丛书按照正常的教学进度，以模拟测试形式，分别安排了**“期中测试”“期末测试”**，以便学生作针对性练习。

本丛书力求以学生发展为本，以学生为主体，精讲多练，以练、以题为主，通过学生自主练习、体验、综合与发散，培养创新意识和实践能力。

目　　录

第一章　直　　线

第二章　圆 锥 曲 线

第三章 参数方程、极坐标

第一章 直 线

本章目标

1. 通过对有向线段以及定比分点的学习，培养正确理解概念、掌握重要公式并会灵活运用的能力，加强基本技能、基本方法的训练.

2. 通过对直线的倾斜角、斜率以及直线方程各种形式的学习，熟练掌握倾斜角、斜率之间的关系，培养利用待定系数法求解直线方程的运算能力.

3. 通过对两直线位置关系判定的学习，加强对解析几何基本思想方法的理解、掌握，培养利用数形结合及运动、变化的观点看问题、研究问题的能力.

4. 通过本章的学习，应达到基础知识学习牢固，解题方法灵活多变，深刻领会数形结合思想的作用，提高分析问题和解决问题的能力.

1.1 有向线段、两点的距离

☎ 温理知识

1. 有向线段

(1)有向直线：规定了正方向的直线.

(2)有向线段：规定了起点和终点的线段，如$\overline{AB}$和$\overline{BA}$是两个方向相反的有向线段.

(3)有向线段$\overline{AB}$的长度：线段 AB 的长度，记作$|AB|$.

(4)有向线段$\overline{AB}$的数量：根据$\overline{AB}$与有向直线 l 的方向相同或相反，分别把它的长度加上正号或负号所得的数，记作 AB.

(5)数轴上有向线段的数量公式：$AB = x_B - x_A$.

长度公式：　　　　$|AB| = |x_B - x_A|$.

2. 两点间的距离公式

在直角坐标系中，设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，则

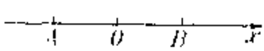
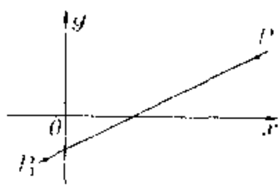
$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

☎ 讲解重点

1. $\overline{AB}$、AB、$|AB|$之间的区别与联系

	有向线段	有向线段的长度	有向线段的数量
记　法	$\overline{AB}$	$\|AB\|$	AB
含　义	有方向的线段	等于线段 AB 的长度	当 $\overline{AB}$ 与规定方向相同时，$AB=\|AB\|$；反之，$AB=-\|AB\|$.
本　质	几何图形	非负实数	实数
	$\overline{AB}$ 与 $\overline{BA}$ 方向相反	$\|AB\|=\|BA\|$	$AB=-BA$

2. 两点间的距离

图形		
公式	$\|AB\|=\|x_B-x_A\|$	(1) $\|P_1P_2\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$； (2) $\|OP_1\|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$； (3) 当 P_1、P_2 在 x 轴(y 轴)上，或者在平行于 x 轴(y 轴)的同一条直线上，则 $\|P_1P_2\|=\|x_1-x_2\|$ (或 $\|P_1P_2\|=\|y_1-y_2\|$).

☎ 讨论难点

1. 注意两线段的数量与长度这两个概念的区别与联系，强化理解 $AB=x_B-x_A$，即后坐标与前坐标的差.

2. 注意运用数形结合思想.证明不等式或其他几何问题，其关键是建立恰当的坐标，确立关键点的坐标.

例1 已知线段$\overline{AB}$的中点为 M，P 为直线 AB 上任意一点.

求证：(1) $PA+PB=2PM$；

(2) $PA^2-PB^2=-2AB\cdot PM$.

【讨论】 (1)同一条直线上的有向线段之间的关系，通过建立数轴，利用公式 $AB=x_B-x_A$，研究十分方便；(2)适当选取某一已知点为原点，用尽可能少的未知量来表示点的坐标，可使问题简化.

【证明】 (1)取 A 为原点、线段 AB 所在直线的任一方向为轴的正方向，建立数轴.

设 A、B、P 的坐标依次为 0、$2b$、x，则 M 的坐标为 b，于是，$PA=0-x$，$PB=2b-x$，$PM=b-x$，$AB=2b$.

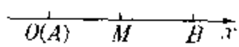


图1-1

$$\because \quad PA+PB=(0-x)+(2b-x)=2b-2x,$$
$$2PM=2(b-x)=2b-2x,$$
$$\therefore \quad PA+PB=2PM.$$

$$(2)\because \quad PA^2-PB^2=(0-x)^2-(2b-x)^2=4b(x-b),$$
$$2AB\cdot PM=4b(b-x),$$
$$\therefore \quad PA^2-PB^2=-2AB\cdot PM.$$

例2 求函数 $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{x^2-4x+8}$的最小值.

【讨论】 本题用通常求函数最值的方法，如不等量分析、基本不等式放缩等均有困难.应该利用函数表达式的特点，数形结合，构造几何模型求解.

【解】 $\because$

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{x^2-4x+8}$$
$$=\sqrt{(x+1)^2+(0-2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(0-2)^2},$$

把函数 $f(x)$理解为 x 轴上动点 $P(x,0)$到两定点 $A(-1,2)$和 $B(2,2)$的距离之和，然后求最小值.

如图 1-2，点 $A(-1,2)$ 关于 x 轴的对称点 $A'(-1,-2)$，则 $f(x)$ 的最小值为

$$|A'B|=\sqrt{(-1-2)^2+(-2-2)^2}=5.$$

即函数 $f(x)$ 的最小值是 5.

注：本题等价于平面几何命题：在直线上找一点使之到直线外两定点的距离之和为最小.

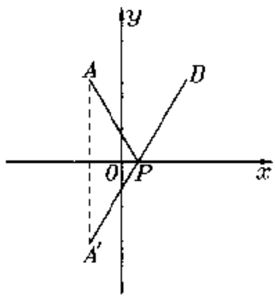


图 1-2

☎ 剖示考点

有向线段、两点的距离公式在高考中会在选择题、填空题中出现，更多地体现在综合题中，特别是两点的距离公式是解析几何中非常重要的公式之一，因而在高考中出现的机率大.

例 1 （1998·全国卷）

设圆过双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的一个顶点和一个焦点，圆心在此双曲线上，则圆心到双曲线中心的距离是______.

【精析】 本题考查双曲线和圆的方程(第二章圆锥曲线)以及两点的距离公式.

【答】 $\frac{16}{3}$.

例 2 （1991·全国卷）

双曲线的中心在坐标原点 O，焦点在 x 轴上，过双曲线的右焦点且斜率为 $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 的直线交双曲线于 P、Q 两点，若 $OP\perp OQ$，$|PQ|=4$，求双曲线的方程.

【精析】 本题考查双曲线性质，两点距离公式、两直线垂直条件，代数二次方程等基础知识以及综合分析能力.

【答】 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

说明：以上两题都与第二章内容有关，暂不能解决，只是借两题说明两点间距离公式的重要性.

☎ 精解名题

有向线段和两点间距离公式，是解析几何的基本概念和工具，与其他章

节也有较强的联系. 如有向线段与代数第八章复数有一定的联系,在复平面内复数可以用向量来表示,而向量又可以用有向线段来表示,线段的长度就是这个向量(复数)的模,线段的方向就是这个向章(复数)的方向. 同时有向线段在物理中力的分解与合成方面有更广阔的施展空间. 两点间距离公式是解析法的基础,一方面使几何问题获得了代数方法的解决,另一方面也为许多代数问题的解决提供了几何直观方法.

本节的题型主要有两种:一是利用 $AB = x_B - x_A$ 解(证)题;二是利用 $|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 解(证)题.

例1 设 A、B、C、D 是直线上任意四点(顺序和位置都任意),且 $\frac{AC}{CB} + \frac{AD}{DB} = 0$.

求证:$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}$.

【精析】 证明有关同一直线上的若干点所成的有向线段的数量等式或条件等式,关键要抓住"数量"这一本质,在直线上建立数轴,把有向线段的值转化为点的坐标,通过计算化简即可证明.

【证明】 取 A 为原点,这条直线的任一方向为轴的正方向,则 A 点坐标为 0,设 B、C、D 三点坐标分别为 b, c, d.

∵ $$AC = c, AD = d, CB = b - c, DB = b - d,$$

$$\frac{AC}{CB} + \frac{AD}{DB} = 0,$$

∴ $$\frac{c}{b-c} + \frac{d}{b-d} = 0,$$

即 $$\frac{c+d}{cd} = \frac{2}{b}.$$

又 $$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{c+d}{cd},$$

且 $$\frac{2}{AB} = \frac{2}{b},$$

∴ $$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}.$$

例2 求与点 $A(2,3)$ 的距离为 3,且到 y 轴距离为 1 的点 B 的坐标.

【精析】 设出 B 的坐标,利用两点间的距离公式以及点 B 到 y 轴距离 1,列出方程求解即可.

【解】 设点 B 的坐标为 (x, y).

由题意知 $\begin{cases}\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=3,\\ |x|=1.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=-1,\\ y_1=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1,\\ y_2=3+2\sqrt{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=1,\\ y_3=3-2\sqrt{2}.\end{cases}$

$\therefore$ B 点坐标为$(-1,3)$或$(1,3+2\sqrt{2})$或$(1,3-2\sqrt{2})$.

例3 试证：对于任意实数 x_1、x_2、y_1、y_2，恒有：$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$.

【精析】 从被证不等式的左边$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$来看，表示了点$(x_1,y_1)$与$(x_2,y_2)$的距离，而右边$\sqrt{x_1^2+y_1^2}$和$\sqrt{x_2^2+y_2^2}$分别是点$(x_1,y_1)$和$(x_2,y_2)$到原点 O 的距离，因此，利用解析法证明此题是十分有利的.

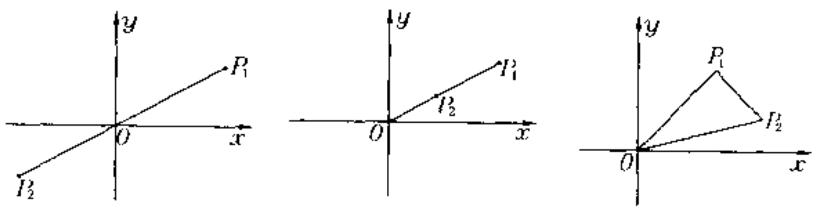


图1-3(1) 图1-3(2) 图1-3(3)

【证明】 设点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$O(0,0)$，则

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

$$|OP_1|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}, |OP_2|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}.$$

(1) 当 O、P_1、P_2 三点共线时，

①若 P_1、P_2 在 O 的两侧，如图1-3(1)，则

$$|P_1P_2|=|OP_1|+|OP_2|;$$

②若 P_1、P_2 在 O 的同侧，如图1-3(2)，则

$$|P_1P_2|<|OP_1|+|OP_2|;$$

(2) 当 O、P_1、P_2 三点不共线时，如图1-3(3)，得$\triangle OP_1P_2$，有

$$|P_1P_2|<|OP_1|+|OP_2|.$$

综上所述，$|P_1P_2|\leqslant|OP_1|+|OP_2|$恒成立.

即 $$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}.$$

说明:从上面的证明中可以看出,“代数问题”与“几何问题”的相互转化是一个很重要的数学思想方法,而且这种转化可以使问题变得容易.此外,请注意证明(1)中讨论的必要性,不能以一般代替特殊,缺少(1)的讨论,证明就不完整了.

☎ 测试能力

一、选择题

1. 数轴上 A、B、C 的坐标分别为 $-7,2,3$,则 $AB+CA=$(　　).

   A. 1　　B. 19　　C. -1　　D. -19

2. 点 $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ 与原点 O 的距离为(　　).

   A. a^2　　B. a　　C. $-a$　　D. $|a|$

3. 以 $A(5,5)$,$B(1,4)$,$C(4,1)$ 为顶点的三角形是(　　).

   A. 直角三角形　　B. 等腰三角形

   C. 等边三角形　　D. 等腰直角三角形

4. 若点 $A(1,2)$,$B(-2,3)$ 与 $C(4,k)$ 在同一条直线上,则 $k=$(　　).

   A. 1　　B. $\frac{7}{3}$　　C. $\frac{11}{3}$　　D. 5

5. 已知点 $A(-1,3)$,$B(3,1)$,点 C 在坐标轴上,$\angle ACB=90°$,则满足条件的点 C 的个数是(　　).

   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 点 $A(1,3)$,$B(5,-2)$,点 P 在 x 轴上,使 $|AP|-|BP|$ 取最大值的点 P 是(　　).

   A. $(4,0)$　　B. $(13,0)$　　C. $(5,0)$　　D. $(1,0)$

二、填空题

7. P、Q、R 是直线 l 上任意三点,则 $PQ+QR+RP=$______.

8. 如图 1-4,写出:$AB=$______,$|BA|=$______,$-CA=$______,$|AC|=$______,$AB+AC=$______,$AB-CA=$______.

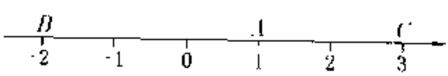


图 1-4

9. 在数轴上已知 B 的坐标为 3,$AB=4$,则 A 点的坐标是______;已知点 B 的坐标为 2,$|BA|=2$,则 A 点的坐标为______;已知点 B 的坐标为 1,$BA=2$,则 A 点的坐标为______.