第三届
国际中国科学史讨论会
论文集

杜石然 主编

科学出版社

第三届国际中国科学史讨论会论文集

杜石然 主编

科学出版社

1990

内 容 簡 介

本书汇集 1984 年在北京召开的第三届国际中国科学史讨论会中文论文 48 篇，内容涉及中国数学史、物理学史、地学史、生物学史、农学史、医学史以及中国古代技术史。这是一本高水平的国际会议论文集，几十位论文撰写人多为国内外有关方面的知名学者。本书可作为科学史学工作者及从事自然科学和社会科学学习与研究工作的大专院校师生的重要参考资料。

第三届国际中国科学史讨论会论文集

杜石然 主编

责任编辑 王玉生 董瑞平

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1990年3月第一版　开本：787×1092 1/16

1990年3月第一次印刷　印张：20

印数：001—860　字数：464,000

ISBN 7-03-000488-4/Z · 23

定价：20.00 元

说　　明

1. 本论文集所收全部为1984年在北京召开的第三届国际中国科学史讨论会上发表的论文。这次会议是历届国际中国科学史会议中规模较大的一次，共交流论文92篇(国内学者48篇,海外来宾44篇)。除李约瑟等特邀的5篇文章在两次全体会议上报告外，其余文章分7组进行交流。第一组为数学和物理学史,第二组为天文学史,第三组为地学史,第四组为生物学(包括农、医)史，第五组为技术史,第六组为科学史的综合研究,第七组为冶金学史。本集论文的学科划分,除将第六第七两组进行对调外,其余顺序均按1984年会议编组顺序。

2. 每一学科内的论文顺序,是按作者姓氏笔画多少排列的,同一笔画的再按点、横、竖、撇的笔形顺序排列。

3. 本集论文力求保持当初发表时的原样，在编辑过程中仅作了一般性加工处理,不妥之处,尚希广大读者予以指正。

编者　杜石然　姜丽蓉

1986年1月

目　　录

一、 中国数学史、物理学史

1. 中国传统数学中的微积分观念和方法

王 渝 生

（中国科学院自然科学史研究所）

（一）

先秦诸子著作中，有若干关于无穷大、无穷小、极限、微元等概念和命题，是为中国传统数学中微积分观念的先声。

儒家孔丘（公元前 551—公元前 479）之孙孔伋（公元前 483—公元前 402）《礼记·中庸》中的

"语大，天下莫能载焉；语小，天下莫能破焉。"

给出了无穷大与无穷小的定义。①

管仲（？—公元前 645）及其弟子著述的《管子·宙合篇》中的

"大之无外，小之无内。"

和《庄子·天下篇》引名家惠施（约公元前 370—公元前 310）的

"至大无外谓之大一，至小无内谓之小一。"

也具有相同的意义。

道家庄周（约公元前360—公元前 280）《庄子·秋水篇》的一组命题

"夫精，小之微也；垺，大之殷也。"

"至精无形，至大不可围。"

"无形者，数之不能分也；不可围者，数之所不能穷也。"

层层深入地对无穷大与无穷小的概念作了更为确切的解释，而且还赋予了数学上的含义。

墨家墨翟（约公元前 490—公元前 403）及其弟子的著述《墨经》（至迟公元前三世纪成书）中，则有关于时间的无穷小量（瞬时）和空间的无穷大量的精确含义

"始，当时也"（《经上》）；"始：时，或有久，或无久，始当无久。"（《经说上》）

"穷，或有前，不容尺也"（《经上》）；"穷：或不容尺，有穷；莫不容尺，无穷也。"（《经说上》）

以及极限和微元的概念

"尺，前于区、穴而后于端"；"体，分于兼也"（《经上》）；"体：若二之一，尺之端也。"（《经说上》）

"端，体之无度而最前者也。"（《经上》）；"端：是无间也。"（《经说上》）

"非半，不斵则不动，说在端。"（《经下》）；"非：斵半，进前取也，前则中无为半，犹

---

① 清末严复（1853—1921）在翻译西方科学著作时，就把当时认为不能再分的无穷小物质微粒"原子（Atom）"译作"莫破尘"。

端也;前后取,则端中也;斮必半,毋与非半,不可斮也。"(《经说下》)

等等。

一般认为,名家公孙龙(约公元前 4 世纪)的"一尺之棰,日取其半,万世不竭"[1]是中国古代极限思想的著名例子。但是,这个命题强调的是有限长度的无限可分性,它在数学上的含义则是一个无穷数列,并没有达到某个确定的极限值的意思。而墨家的"端"的概念,无论是"进前取"还是"前后取"所得到的,在分割到不可以再行分割时,便没有量度,没有间隙,实实在在地达到了确定的极限值。并且,如同一加一得二,部分组成全体一样,"端"可以积累而成为"尺","尺"可以积累而成为"区","区"可以积累而成为"穴"。这分明是积点成线、积线成面、积面成体的原始雏型,不能不说是一种"线元"、"面元"、"体元"的微元概念。

(二)

西汉司马迁(公元前 145—公元前 87)《史记·酷吏传序》称:"汉兴,破觚而为圆,斲雕而为朴。"这里,"破觚为圆"的比喻具有直曲转化的思想,很有可能对魏晋时期的伟大数学家刘徽(约公元 3 世纪)的"割圆术"产生过影响。

公元 263 年,刘徽注解公元一世纪成书的《九章算术》,在《方圆章·圆田术注》中,为了证明圆的面积公式"半周半径相乘得积步",即

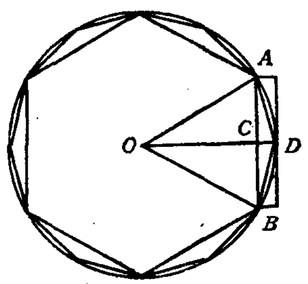

图 1 割圆术

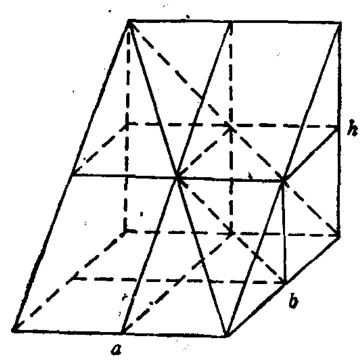

图 2 邪解堑堵术

$$S = \frac{1}{2} lr$$

从圆内接正六边形开始,边数成倍递增,谓之"割圆",这样下去,"割之弥细,所失弥少;割之又割,以至于不可割,则与圆合体而无所失矣。"从"割之又割"到"不可割",从"所失弥少"到"无所失",即当边数增加到无穷大时,圆内接正多边形变成了圆,这是一个明确的取极限并且最终达到了极限值的过程(图 1)。

同样,刘徽在《商功章·阳马术注》中,为了证明阳马(即直角方锥)的体积公式"广袤相乘,以高乘之,三而一",即

$$V = \frac{1}{3} abh$$

"邪解堑堵(即直角三棱柱),其一为阳马,一为鳖臑(即直角四面体)",半其长、宽、高,用图形移补法,在四分之三的体积内证得"阳马居二,鳖臑居一",然后对余下的四分之一体积的两个小堑堵再行分割,即又半其长、宽、高,这样下去,"半之弥少,其余弥细;至细曰微,

微则无形。由是言之，安取余哉？"② 于是，$V_{阳马}:V_{鳖臑}=2:1$ 为"不易之率"。这里，从"弥少"、"弥细"至"微则无形"、"安取余哉"，即不能再分，没有剩余，也是一个明确的取极限并且最终达到了极限值的过程[2]（图 2）。

我们知道，古希腊数学家阿基米德（Archimedes 公元前 287—公元前 212）在《圆的度量》一书中是同时取圆内接和外切正多边形，利用穷竭法和双重归谬法证明圆的面积既不能大于，又不能小于，从而只能等于"两条直角边分别等于圆的周长和半径的直角三角形的面积"的。这种证明过程显然是采用古希腊传统几何体系的形式逻辑演绎方法，"跟我们今天关于数和极限概念并不相干，而只是一些迂回曲折绕过这些概念的途径"[3]，"从微积分发展观点来看"，它"表现出一种枯燥无味的讲究严格的顽固性，阻碍了那些新的思想和发现的生长"。[4]然而，刘徽则继承了我国先秦诸子特别是墨家和道家的生机勃勃的极限观念，并把无穷小分割这种极限方法应用于几何问题的证明之中。

（三）

《九章算术·商功章》中，通过由方堢壔（即正四棱柱）求圆堢壔（即圆柱）、方亭（即正四棱台）求圆亭（即圆台）、方锥（即正四棱锥）求圆锥体积的方法，认识到圆体与其外切方体体积之比等于底面积圆幂与方幂之比。但在《少广章·开立圆术》中，却以圆囷（即圆柱）为立圆（即球）的外切体，把球与外切圆柱的体积之比也视为圆幂与方幂之比，从而得出了错误的球体积公式 $V=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 d^3$。

刘徽发现了这一错误，他认识到这是因为球体与外切圆柱体除了在相切的大圆处之外，在其它任一等高处的截面积之比都不是圆幂与方幂之比。他在《商功章·羡除术注》中，证明同底同高的方锥与阳马体积相等时，用的理由是"推此上连无成不方，故方锥与阳马同实"，即二者在等高处的截面积都是相等的正方形，故它们体积相等（图 3）。因此，刘徽在这里的《少广章·开立圆术注》中，提出再以圆囷"复横规之，则形似牟合方盖"（图4），"合盖者，方率也；丸（即球）居其中，即圆率也"，这是因为球体与其外切牟合方盖在任一等高处的截面积之比都是 $\pi:4$ 从而为解决球体积问题指出了正确的道路。至于牟合方盖体积的求法，刘徽未能解决，他说："敢不阙疑，以俟能言者。"

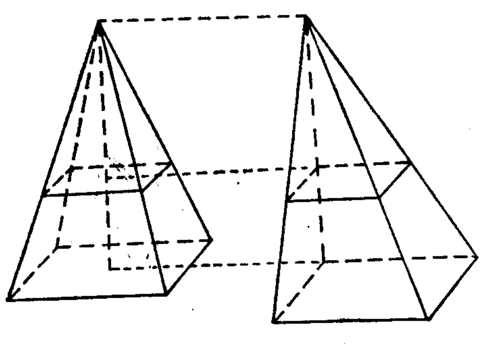

图 3　方锥与阳马同实

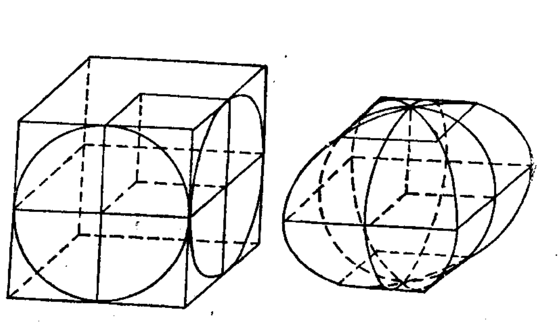

图 4　牟合方盖

② 这些说法与前引《庄子·秋水篇》中那一组命题的用语"小之微也"，"至精无形"，"数之不能分"何其相似耳。

南北朝时期的数学家祖冲之（429—500）之子祖暅依照刘徽的思路，进一步认识到不论立体形状和截面积形状，只要等高处截面积相等，则两体积相等，于是提出著名的“幂势既同，则积不容异”[5]原理，解决了求牟合方盖体积的问题$\left(V_{方盖}=\frac{2}{3}d^3\right)$，从而得出了正确的球体积公式 $V=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}d^3=\frac{\pi}{6}d^3$。[6]

这种把体积看做是由一个一个微小薄片的面积所组成，用无穷小分析法解决四面体及曲面体体积问题的理论，是微积分的原始雏型。联系到当时何承天(370—447)有“连日累岁，积微成著”[7]和《数术记遗》⑧ 中有“不辨积微之为量，讵晓百亿于大千”的话语，而祖暅公理的提出又比西方首先提出这一原理的意大利数学家卡瓦列利(B. Cavalieri, 1598—1647; 1635) 早了一千多年，可以认为，我国南北朝时期的数学家和天文学家在使用微积分概念和方法上已经达到了当时世界上的最高水平。

（四）

祖暅以后，中国传统数学中的微积分观念鲜有继承。唐代王孝通《缉古算经》(7 世纪初)主要解决水利工程中求体积，特别是刍童(即长方棱台)体积的问题。北宋沈括(1031—1095) 从计算“酒家积罂”数和“层坛”体积等实际问题中发现用刍童计算堆垛体积失之过少，于是创立“隙积术”[8]

$$V=\frac{h}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{h}{6}(c-a)$$

开中国传统数学中“垛积术”的先河(图 5)。

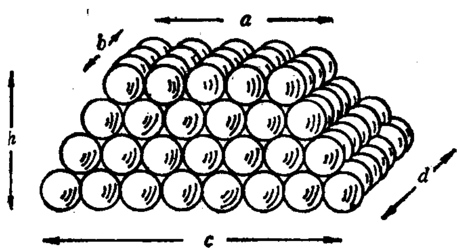

图 5 隙积术

堆垛是累点成线、累线成面、累面成体的实际模型，它同前述墨家关于端、尺、区、穴的原始的微元概念一脉相承。堆垛求积的问题往往是高阶等差级数的求和问题，而一连串三角垛积的值，又正好依次是招差公式中各项的系数。招差术依内插法演算，内插法若不算东汉刘洪《乾象历》(206) 中的一次差内插法，也是从隋刘焯《皇极历》(600) 中

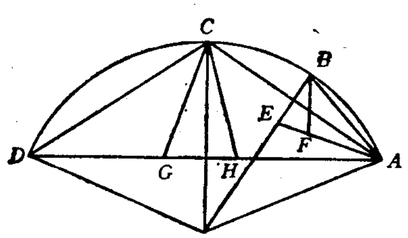

图 6 割圆连比例法

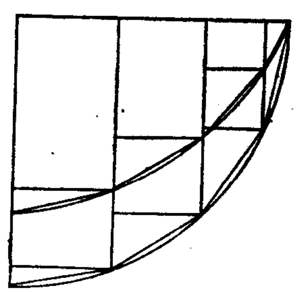

图 7 椭圆求同术

⑧ 原书传本题为“汉徐岳撰，北周甄鸾注”，据钱宝琮考证，系公元 6 世纪的著作。

的二次差内插法开始的。从隋唐经宋元迄明清，一千多年来，内插法、招差术和垛积术的发展，表明擅长处理级数问题是我国传统数学和数理天文学的一大特色。

清初，三角函数幂级数展开式传入我国。④明安图（?-1763）为了证明它们，在刘徽"割圆术"的基础上，创"割圆连比例法"[9]，讨论了任意长度的弦和它所对弧之间的关系。（图 6）其后，项名达（1789—1850）的"椭圆求周术"[10]又把割圆发展到应用于椭圆弧的情形，（图 7）从而使级数理论和对于弦弧、直曲关系转化的认识提高到了一个新的水平[11]。

（五）

中国传统数学中，在微积分方法上有实质性突破的，还是清末数学家李善兰（1811—1882）的"尖锥术"（1845）⑤。

李善兰认为，"诸乘方有线、面、体循环之理"，"诸乘方皆有尖锥"，"诸尖锥有积迭之理"，"多一乘之尖锥皆少一乘方渐增渐迭而成"，"乘愈多，则凹愈甚"。并且，"二乘以上尖锥其所迭之面皆可变为线"，于是"诸尖锥既为平面，则可并为一尖锥"。至于"尖锥之算法，以高乘底为实，本乘方数加一为法，除之，得尖锥积"[12]（图 8）。

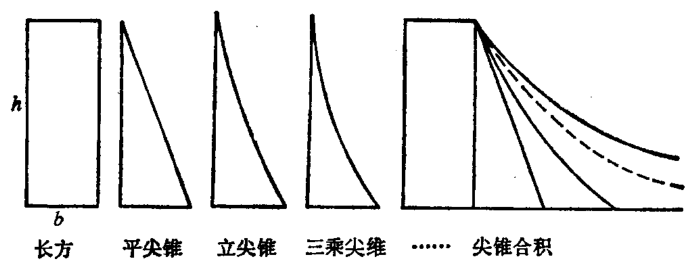

图 8　尖锥术

李善兰的尖锥术，在微积分观念和方法上，有以下几点突破。

第一，"尖锥"概念，是一种处理代数问题的几何模型，它由互相垂直的底线、高线和凹向的尖锥曲线所组成；并且在考虑尖锥合积时，也是使诸尖锥有共同方向上的底线和高线。这样的底线和高线具有平面直角坐标系中纵、横两个坐标的作用。

第二，这种尖锥是由乘方数渐增渐迭而得，尖锥曲线是由随同乘方数一起渐增渐迭的底线和高线这两个坐标所确定的点变动而成的轨迹。由于李善兰把每一条尖锥曲线看作是无穷幂级数中相应的项，实际上他给出了直线（长方、平尖锥），抛物线（立尖锥），立方抛物线（三乘尖锥），……的方程

$$y=b、\ y=\frac{b}{h}x,\ y=\frac{b}{h^2}x^2,\ y=\frac{b}{h^3}x^3,\ \cdots\cdots$$

并指出"乘愈多，则凹愈甚"，这便是由方程的代数性质描述相应曲线的几何性质了。⑥

---

④ 梅成《赤水遗诊》（1723）介绍了"西士杜德美（P. Jartoux, 1664—1720）法"，即有关 π, $\sin\alpha$, $\operatorname{vers}\alpha$ 的三个幂级数展开式，但只有结论，没有证法。

⑤ 李善兰发表有关"尖锥术"的著作《方圆阐幽》、《弧矢启秘》、《对数探源》是在 1845 年，其时西方微积分学尚未传入我国，详见王渝生：《李善兰的尖锥术》，载《自然科学史研究》第二卷第三期（1983）。

⑥ 不仅如此，李善良在《对数探源》中，"凡两残积，此残积之高与彼残积之高，彼截线与此截线可相为比例"，还指出了对数合尖锥曲线乃双曲线的一支，并给出了等轴双曲线的方程 $xy=bh$。详见梅荣照，王渝生：《解析几何能在中国产生吗?》，载《科学传统与文化》，陕西科技出版社（1983）。

第三，尖锥求积的算法，相当于幂函数的定积分公式

$$\int_0^h \frac{b}{h^n} x^n dx = \frac{bh}{n+1}$$

第四，诸尖锥相并，相当于逐项积分法则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^h \frac{b}{h^n} x^n dx\right)=\int_0^h\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b}{h^n}x^n\right)dx$$

李善兰的尖锥术，导源于中国传统数学中的垛积术。他的《垛积比类》[13]在元代朱世杰《四元玉鉴》(1303)三角垛“落一”$\{\sum^n r\}$、“岚峰”$\{r\cdot\sum^n r\}$两大类的基础上，创造了一类新的垛积——“乘方垛”$\{r^n\}$，并有求积公式

$$\sum_{r=1}^{m} r^n=\sum_{k=0}^{n-1} L_k^{n-1}\binom{m+k+1}{n+1}$$

其中，“李氏数” L_k^{n-1} 定义为

$$L_k^{n-1}=kL_k^{n-2}+(n-k)L_{k-1}^{n-2}$$

且具有性质

$$\sum_{k=0}^{n-1} L_k^{n-1}=n!$$

看来，李善兰是先考虑积迭成 n 乘尖锥的 $(n-1)$ 乘方垛体积

$$\begin{aligned} V_{垛} &= \sum_{r=1}^{m} b\left(\frac{r}{m}\right)^n\frac{h}{m}\\ &=\frac{bh}{m^{n+1}}\sum_{k=0}^{n-1}L_k^{n-1}\binom{m+k+1}{n+1}\\ &=\frac{bh}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n-1}L_k^{n-1}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i-k}{m}\right)\end{aligned}$$

然后取极限，即得 n 乘尖锥积

$$\begin{aligned} V_{锥} &= \lim_{m\to\infty} V_{垛}\\ &=\frac{bh}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{n-1}L_k^{n-1}\\ &=\frac{bh}{n+1}\end{aligned}$$

关于“可作为微积分中第一个普遍性的定理，即对任意正整数 n，有与

$$\int_0^a x^n dx=\frac{a^{n+1}}{n+1}$$

相当的定理”[4]，在西方微积分学产生的前夕，17 世纪上半叶有好几位优秀的数学家，如卡瓦列利，托里拆利 (E. Torricelli, 1608—1647)，罗贝瓦尔 (G.P.Roberval, 1602—1675)，费马 (P. Fermat, 1601—1665)，巴斯加 (R.Pascal, 1623—1662)，沃利斯 (J. Wallis, 1616—1703) 等，用他们各自不同的方法研究过这个问题。[4][14][15]李善兰的工作虽然比他们晚了两个世纪，但他是独立得到的，而且采取了极限方法，并具有明显的垛积术渊源，不失中国传统数学的特色。

李善兰还用"分离元数法"求出了二项平方根的幂级数展开式

$$\sqrt{1-x^2}=1-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!!}x^4+\frac{3!!}{6!!}x^6+\frac{5!!}{8!!}x^8+\cdots\cdots\right)$$

结合"尖锥求积术",得到了π的无穷级数表达式

$$\pi=4-4\left(\frac{1}{3.2}+\frac{1}{5.4!!}+\frac{3!!}{7.6!!}+\frac{5!!}{9.8!!}+\cdots\cdots\right)$$

各种三角函数与反三角函数的展开式,以及对数函数的展开式

$$\lg n=\lg(n-1)+\lg e\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot n^k}$$

在使用微积分方法处理数学问题方面取得了卓越的成就。

(六)

综上所述,从先秦到清末, 两千多年来,中国传统数学中的微积分观念是在中国自己的土地上萌芽、生长起来的,尚未发现受过西方数学直接影响的痕迹。

中国传统数学中使用的微积分方法,就其内容来看,是从求面积和体积的问题中产生的,因而也多用于处理几何问题,这在公元五世纪前后取得了辉煌的成就。但由于中国封建社会的长期延续性,社会生产力发展缓慢,工业化机器生产迟迟未能出现, 缺乏物理学特别是动力学对数学发展的需求和刺激,至使这种方法没有象西方那样,最终同变速运动等实际问题相结合而产生质的飞跃。

中国传统数学中使用的微积分方法, 就其表现形式来看,多以文字说明的方式给出,有定性的描述,缺乏定量的分析,缺乏数学公式的表达,即"数而求穷之者,谓以情推,不用筹算。"[16]这样,难以建立严密的理论体系,形成系统的科学方法。

但是,由于中国传统数学中富有的微积分观念和独特的微积分方法, 到了 19 世纪 40 年代,李善兰的工作"已有酝酿由常量数学进入变量数学的预兆"[17], 这使得 50 年代西方的微积分学传入中国以后,很快得到理解、消化和吸收。李善兰首创的"微分"、"积分"等中文译名[18],不仅受到前述何承天"积微成著"、《数术记遗》"积微之为量"的影响, 还可以追溯到更早。例如, 先秦法家荀况(公元前313—公元前 238) 的《荀子·大略》中就有"尽小者大,积微者著"。由此亦可足见我国古代微积分观念发端甚早,渊源甚深。

参　考　文　献

[1] 转引自《庄子·天下篇》。

[2] 郭书春: "刘徽的体积理论",科学史集刊,第 11 期(1984)。

[3] T.L.Heath: A History of Greek Mathematics, Cambridge(1912)。

[4] C.B.Boyer: The Concepts of Calculus, New York(1939)。

[5] 转引自李淳风: 《九章算术·少广章·开立圆术注》。

[6] 杜石然: "祖暅之公理",《数学通报》,第 2 期(1954)。

[7] 见《宋书·律历志·何承天表》。

[8] 沈括: 《梦溪笔谈》卷十八。

[9] 明安图: 《割圜密率捷法》。

[10] 项名达: 《象数一原》。

[11] 何绍庚: "割圆术与圆周率",《中国古代科技成就》,中国青年出版社(1978)。

[12] 李善兰: 《方圆阐幽》,《则古昔斋算学》本。

[13] 李善兰: 《垛积比类》,《则古昔斋算学》,卷四。

[14] E.T.Bell: Men of Mathematics, New York(1937).
[15] F. Cajore:A History of Mathematics, New York, 2nd ed.(1938).
[16] 见刘徽:《九章算术·商功章·阳马术注》。
[17] 见严敦杰:"中国古代自然科学的发展及其成就",见《科学史集刊》,第三期(1960)。
[18] 见李善兰与伟烈亚力(A.Wylie, 1815—1887)合译:《代微积拾级》(1859)。

2. 郑复光《费隐与知录》中的光学知识

王 锦 光

(杭 州 大 学)

《费隐与知录》(以下简作《费》)是清代科学家郑复光(1780—?)的一部自然科学著作。郑复光及其光学著作《镜镜詅痴》(以下简作《镜》)已引起科学史界的注意,并进行了初步研究,发表了一些文章。但《费》知道的人不多,研究的文章也尚罕见①。《费》共有225条,主要讨论物理、气象、天文、生物、医药、烹饪等等。此书的体例采用问答形式,内容着重解决一些自然界和日常生活中的疑难问题,带有科普性质。《费·包序》:"所说皆世人惊骇,以为灾祥奇怪之事,而郑君推本说之,或以物性而殊,或以地形而变,或以目力而别,明白平易如诸指掌。当郑君之未说也,循其迹几乎圣人所不知,及其既说而目验之,则夫妇之所与知也。"正由于这个原因,这本书取名《费隐与知录》②。

这本书自1816年开始写作,到1842年刊行,历20余年③。在这段时间他又写了《镜》(大约19世纪20年代开始,1847年印毕),《镜》是一部光学专著,仿《几何原本》体例,系统性强,但《费》与《镜》有一定联系,特别是《费》中光学几条(以下简作《费·光》)与《镜》关系更加密切。《费·光》对光学某些疑难问题分析讨论,往往补充《镜》的不足,可视为《镜》的应用和发展。而《镜》的系统叙述又为《费》提供基础理论知识。《费·光》中多处注明详见《镜》。

研究《费》的光学知识,除本身意义外,对研究《镜》及郑复光本人很有价值。《费》中关于时间与地点有多处记载,有利于探索郑的生平。《费》和《镜》几乎同时书写,交错进行,相互补充。对某条而言,两书先后不同,详略有异,对研究郑的科学方法及实验进展等等很有益处。本文对《费》的光学知识作初步的探索,向科学史界请教。

《费·光》共有20多条,约占全书十分之一。兹择其有代表性的,归纳为三类,分述于下:

(1) 小孔成像

关于小孔成像最主要的是第77条《隙无定形,漏日恒圆》:"问:'日光穿隙无他物隔,于隙之内必见圆光。而隙不必圆,光何以圆?'曰:'此日体也,予尝见篷漏日光,悉是半月形,忽悟为日食,果然。凡光照平壁,皆见光体所发之光而不见光之体形,故中隔片版,则见版景。使版有方孔,则版景中现礼方光。若引版渐远于壁,则孔之光渐模(模)糊,再远则方孔变为圆光而极清。若再远则仍是圆形,其光渐大而淡矣。试以月上、下弦时,必半圆

① 最近上海科学技术出版社已将《费》影印发行。

② "费隐"是"用广体微"的意思,"与知"是"参与闻知。"《中庸》:"君子之道费而隐。夫妇之愚,可以与知焉"。《四书集注》的《中庸》注:"费,用之广也;隐,体之微。"

③ 《费》第1条及《包序》。

形而为倒像，是月体。盖凡光穿孔则上边照下，下边照上，右照左，左照右。当版离壁近，则金光在孔中心，甚小，故日体外浮光俱入孔内，照其之像甚清。推而远之，其于视法，则孔体觉渐小，日体觉渐大，至日体恰塞孔面，则日外浮光不见，故孔之方景糢(模)糊，而日体倒人见焉。若方孔中离板下边多一物，则其景必在上边而成倒像。(离孔之远，视孔小大。若孔方分，则物离孔约三寸④以外，可远不可近。)此塔景倒垂之理也。《梦溪笔谈》所谓算家称为格术者也。(格术者，日之照物，从日上下两边各出光线，下射于地，中格一物，有孔漏光，日大孔小，则光线约行⑤。孔若近地，则日之上边仍射孔之上边，下边仍射下边，光现孔形无异也，若引孔远于地，则两线必交成角，而上下之相射必相反矣。左右亦然，所为交角也，能不倒像乎?)格一物而成倒像，故老花眼镜以凸处光线之交，如物格之所以取火，见倒日，取景见倒人，亦此理也。(详《镜镜詅痴》)'”

又第 30 条《灯、日穿隙，交角同理》介绍了灯光穿小孔成倒像。

让我们先做实验以证明《费》中第77条记录是翔实的，并且证明光源不限于太阳，这段记录是具有普遍意义的:

[实验一]　实验装置如图 1:

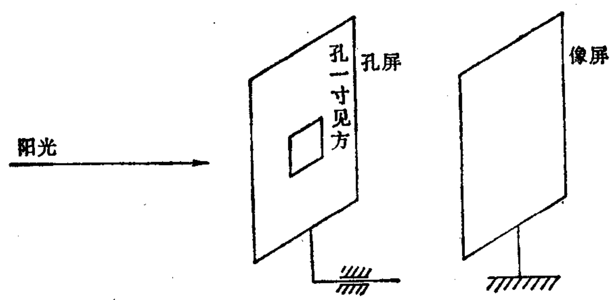

图 1　阳光穿小孔成倒像

实验步骤与结果：将屏孔对准阳光，在像屏上观察太阳的像(日景)，先把孔屏靠拢像屏，次把孔屏离开像屏向左移动，像屏上得到方形光斑。孔屏移至 2.5 厘米左右，光斑模糊起来，再向左移动，像成圆形。

[实验二]在暗室内，以蜡烛为光源，其他仍如图 1。

实验步骤与实验一同，所得结果与实验一相仿。

屏孔改为三角形(边长约 1 市分)，实验结果相同。

《镜》把这个实验改为孔屏固定，移动像屏，来观察所得的像，这样改进，使实验更易操作。《镜》并给出光路图(图 2)。

中国古代对小孔成像很有研究，《墨经》、《梦溪笔谈》对这种实验及其跟光线直进的关系有精辟的描述。赵友钦更做了大规模的对比实验，研究小孔成像的各种性质，包括光线通过大孔的情况，但对小孔附近成正像的情况没有人研究过，郑复光注意到这个问题，做了一系列的实验，包括正像、模糊无像及倒像，揭示了全过程。

④ 当为清制度量衡，一尺近乎一市尺，下同。

⑤ 约行线:“两(光)线……若相距不等，……若自阔向狭言言之，名约行线，……约行线愈行愈狭，必交合为一。”(《镜》卷一“原线”，第 6 页下)。

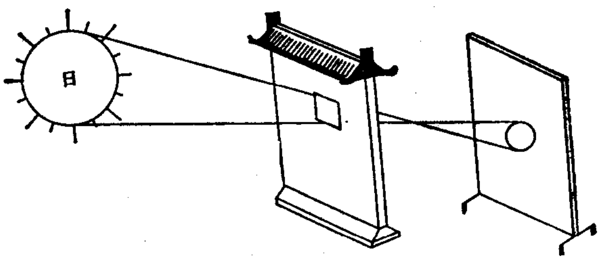

图 2　根据《镜镜詅痴》图而绘

《费》的第 211 条《隔孔取景，凸镜异同》把小孔成像跟凸透镜成像两件事联系起来，加以比较。

（2）凸透镜与冰透镜向日取火

论凸透镜向日取火主要为第 128 条《凸镜取火，由于光浓》："问'凸镜取火由于光线交角（详见《镜镜詅痴》），而日穿孔亦有交，何故无火？'曰：'日光生火，必由光盛，故镜有凸浅无火者，必经一寸以内，而交角长数尺（如中花镜内凸之类是也）。有凸深无火者，必径六分以内，而日景止如粟（如远镜内凸之类是也）。盖凸深而径短，则光小不盛焉。凸浅斯限长，则光淡不盛焉（镜小限长，则浮明四映，故虚淡不真）。日之穿孔，虽有交角，若孔大径寸，则交角必数尺，此所谓光淡不盛也，若交角数寸，则孔体必分许，此所谓光小不盛也，日之穿孔，随在有之，若易得火，则人其危矣，此亦造物之微意也夫。'"

"凸镜"即凸透镜，"径"为凸透镜的直径（设为 D），"限"为焦距（设为 f）。这条实以相对孔径 D/f，亦即以集光本领 $(D/f)^2$ 来讨论凸透镜能否取火。提出：凸透镜焦距大的（大至数尺），口径在一寸以内不能取火；凸透镜焦距小的，口径在 6 分以内也不能取火。把焦距小的（凸深）而口径小的视为"光小不盛"，焦距大的（凸浅）视为"光浅不盛"。

郑复光还制造冰透镜，做向日取火的实验，获得成功。《费》第 69 条记录了这个实验。"问：'《博物志》云，削冰令圆，向日，以艾承景则有火，何理？'曰：'余初亦有是疑。后乃试而得之。盖冰之明澈，不减水晶，而取火之理在于镜凸。嘉庆己卯，余寓东淘，时冰冻甚厚。削而试之，甚难得圆，或凸而不光平，俱不能收光，因思得一法：取锡壶底微凹者贮热水旋而熨之，遂光明如镜，火煤试之而验。但须日光盛，冰明莹形大而凸稍浅（径约 3 寸，外限须约 2 尺），又须靠稳，不摇方得，且稍缓耳。盖火生于日之热，虽不系镜质。然冰有寒气能减日热。故须凸浅径大，使寒气远而力足焉。'"

嘉庆已卯即 1819 年，东淘即今江苏省东台县⑥。

这一条记录包括有实验时间、地点、实验目的、仪器制备，实验步骤、实验结果与实验注意点等，无异是一份完整的实验报告。

用冰制透镜向日取火，中国自《淮南万毕术》、《博物志》等书提出后，许多人对此发生怀疑，冰透镜在阳光下是否会熔化变形，光线经过冰后是否失去热量，致使冰透镜不能向日取火。实在说直至今天，也还有人怀疑，特别是生活在温暖地方的人。本文笔者因此也亲做实验。在 1983 年 10 月至 11 月，当时杭州尚无天然的冰，于是利用冰箱来制造冰透镜。开始把水盛在金属半球壳里，放置在冰箱中，俟水凝固成冰后，用热水将金属半球

⑥　东淘，"扬州府东台县也"（《费》第 83 条）。

壳加温，取下冰透镜。但这样制得的冰透镜含气体很多，“有纹似萝卜花”⑦，在阳光下不能取火，实验失败了。做了几次，失败几次，后改用瓷碗来盛水，水中预先放一块明澈的冰，再放置在冰箱里，凝固后取出，得到明莹的冰透镜。把它放在烈日下，对准日光，把火柴或疏松的小纸片放在焦点上，一会儿，火柴燃烧起来，实验成功。这样：(1) 亲身证实了冰透镜能向日取火；(2) 深切地体会到这实验难度较大及冰之明莹的重要性；(3) D/f 要相当大，即口径宜大，焦距宜短。

郑复光很注意 D/f 的数值，在《费》中，取口径 $D=3$ 寸$=0.3$ 尺；焦距 $f=2$ 尺；则相对孔径 $D/f=0.15$；后来在《镜》中，把口径增大，D 取 0.5 尺；焦距缩短，f 取 17 寸即 1.7 尺(或 1.8 尺)，则 $D/f=0.3$。这样后一次的实验容易做得成功了。这个进展应是郑复光反复摸索，多次实验而得到的。

郑复光在后一次实验中，他要减小焦距采用了双凸透镜，这说明郑氏十分熟悉透镜性质的。还应指出，郑氏制造冰透镜用“旋熨法”，十分别致，有创造性。

在国外，也有人做过冰透镜向日取火的实验，英国科学家胡克（1635—1703）在英国皇家学会中曾表演过这个实验 [1]。近来，还有人对冰透镜的制造方法与用途进行研究，有趣的是，他的方法与郑氏的方法大致类似，并把冰透镜用来取火与摄影，获得成功[2]。

(3) 近视、老花与眼睛的调节

关于这方面，主要的有：第 155 条《短视不衰，亦当别论》，“问：‘老花、短视，一由于睛长之申缩，一由于睛凸之甚微，故有视近、视远之分，《镜镜诊痴》言之详矣。或谓短视人视近至老不衰良然。其理安在？’曰：‘目之不同，除病伤外，止少目、老花、近视三种。少年之光力既足，远近咸宜，固无论已。其老花、短视皆目之不良者也。但老花由于精衰，短视则由于目累。故老花必在齿长之年，短视或在垂髫之日矣。至于一切能力老则渐衰，老花、短视其情一也、顾老花以视近见绌，老则弥甚，人亦觉其衰。短视以视近见长，老仍能视，人不觉其衰。唯一己可默喻也。而或不甚留意，或不引人自证虚已，以推求则已，终不觉矣。且人情无不好胜，讳言衰老，其蔽之也，众矣。若夫老花视远时竟胜于少年，则非此老花之精足，乃适值少年稍稍短视而不自知者耳。至短视者，八、九十岁虽自言视近如常，而观其目睛如隐云雾，微作兰色，非目衰之证欤？’”第 157 条《目视近远，收展其光》：“问‘《镜镜诊痴·原目》云，睛形二解，一外凸聚光，一内长伸缩。故妙龄可聚成三角，以察细近，可展杀三角，以瞩高远。又一系云，目前数寸隔纱视物，合眸微启，则经纬井然，而外物不清。若张其目，则物呈露，而纱茫然，以为伸缩眸子之证，理固应尔。而又云，短视多矇眬其目而视远，知其伸缩与常人反，何以验之？’曰：‘远镜视远应缩，故知张目为缩也，短视以矇眬觑远而用远镜必更缩，以斯知其与常人反也。’”

短视则今谓近视，睛长(或内长)为眼球轴的长度，睛凸(或外凸)为眼球的晶体。所论各点，大部分大体上合乎现代光学原理，小部分是有问题的，郑复光解释眯眼视物为调节焦距是错误的，正常眼‘合眸微启’可视明数寸前之经纬，实在是缩小瞳孔而增大景深所致，近乎小孔成像而非焦距的调节。近视眼“矇眬其目而视远”(此处“矇眬”作眼欲闭又欲张之状⑧)它也是跟上述缩小瞳孔而增景深的道理相同的。

郑复光的《费》中的光学知识是西方传来的光学知识影响的，但他又继承了中国传统

⑦ 《镜》卷四“取光”(第 60 页上)。

⑧ 台湾《中文大辞典》的“矇眬”条。