FEI XIAN XING BO DONG

非线性波动

〔日〕
谷内俊弥
西原功修

原子能出版社

非线性波动

〔日〕谷内俊弥
西原功修　著

徐福元
张家泰　译
丁启明

金尚宪　校

原子能出版社

非 线 性 波 动

〔日〕谷内俊弥　西原功修　著

徐福元　张家泰　丁启明　译

金尚宪　校

原子能出版社出版

（北京2108信箱）

国防科委印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

☆

开本787×1092 1/32·印张9·字数200千字

1981年3月第一版·1981年3月第一次印刷

印数001—5000·统一书号：15175·274

定价：1 15元

内 容 简 介

本书主要阐述非线性波的运动规律和数学处理方法。

全书共分四章。第一章由简单模型出发介绍非线性波的形成和特征。第二章讨论非线性方程的一般性质和特征线解法，着重讨论击波传播理论。第三章利用递减微扰法导出各种（耗散型或色散型）非线性方程，分析了非线性波之间的相互作用。第四章以散射反演方法为中心讨论典型非线性方程的各种精确解法，并由此揭示孤立子的各种性质。

本书系日本大学物理专业高年级学生和研究生的教材。它可供我国高等学校物理、力学、光学、数学等专业的师生阅读。也可供从事等离子体物理学、流体力学、晶格力学、非线性光学、应用数学和工程方面的科技人员参考。

前　　言

近几年来，在物理学和工程学的许多领域中，非线性波的传播越来越受到重视。一般把服从于非线性（发展）方程的有限振幅的波叫做非线性波，本书的目的是讨论它的传播。众所周知，由于在非线性方程中解的叠加不成立，对于物理学者和工程学者所熟识的方法——Fourier 展开和 Laplace 变换不能发挥威力，所以它的性质还不大清楚。但是最近随着各种非线性波动现象问题的提出和电子计算机的发展，使它的研究取得快速的进展，搞清了各种新的问题。

非线性波，大体上说也和线性波一样，可大致区分为耗散性的和色散性的。但是，对于非线性波，如果忽略耗散性和色散性，波的相速度一般仅由振幅决定。在这种情况下，通常振幅越大波的相速度就越大。因此，如果开始时大振幅波在小振幅波的后面，则随着时间的增长，大振幅波将追上前面的小振幅波，发生波的突陡，最后波被破坏。数学上，在没有耗散性和色散性的非线性发展方程（非线性双曲型方程）中，通常光滑解在有限时间后过渡为不连续解，(强意义的）解失掉了。这是在线性时所见不到的显著特征。而耗散性和色散性抑制由这个非线性引起的波的突陡，造成急陡而又光滑的波形担负着把时间发展持续下去的重要任务。

作为这种耗散型非线性波的典型例子，可以举出超声速飞机产生的冲击波。扫过冲击波阵面的气体由于粘滞性而被加热，这个耗散性与由飞行器引起波的突陡相平衡而形成冲击波。冲击波不仅在气体中传播，而且也在液体和固体中传

播，特别是爆炸产生的冲击波问题应用范围也很广。此外，在高温电离气体的等离子体中，也含有与电磁场相互作用在内的电磁流体冲击波。另一方面，作为波的相速度在因波长而不同的色散性介质中传播的非线性波的典型例子，可以举出孤立波。这种孤立波是由于非线性引起的突陡和色散效应平衡而形成的脉冲状的波，对于和波长比较水深浅的水面波，人们很早就知道了。近似地描述其传播的非线性方程，是由Kortweg和de Vries从流体力学方程推导出来的，这实际上可追溯到1895年。取发现者的名字，这个方程一般叫做Kortweg-de Vries方程（K-dV方程）。但是，将孤立波看作象粒子行为那样的波包——“孤立子”，大约是十年前出现的新事情。就是Zabusky和Kruskal把K-dV方程做数值积分，发现在直线上行进的孤立波碰撞前后不改变形状，并象粒子那样行为。随后，Gardner等人把K-dV方程用量子力学的散射反演方法精确求解成功，发现孤立子对应于Schrödinger算符的束缚态。由此，解析地证明了孤立子的粒子性。进而明白了在非线性弱的情况下，很一般的色散型非线性发展方程系统可以用K-dV方程来近似，从而确立了“孤立子”的普遍形象。

K-dV方程所明确的另一种特性，就是在周期边界条件下，初始状态在有限时间以后可再现的回归性。这同下述的想法是不相容的，即认为在非线性系统中，开始时尽管有某些波型被激发，但由于非线性相互作用，经过充分的时间后，在所有的波型中能量是均分的。这个事实，首先是由Fermi-Pasta-Ulam根据非线性相互作用的谐振子序列的数值解析指出的，因此和晶格力学中的非线性问题有关系。最近对孤立子研究所取得的成果是惊人的，孤立子的粒子性和系

统的回归性，在实验上也被证明了，在这十年间非线性波的理论可以说焕然一新。另外应用的范围也从流体力学、等离子体物理学、晶格力学和非线性光学，扩展到物理学和工程学的很多领域。最近，把孤立子考虑为基本粒子模型的大胆尝试也开始出现了（在Zabusky和Kruskal以前，Perring和Skyrme采用把作为基本粒子模型的 Klein-Gordon 方程非线性地推广为一般叫做Sine-Gordon方程，它是相对论不变的非线性波动方程，发现它的孤立波解并不因碰撞而破坏）。

在本书中，我们打算尽可能统一地处理这样多的领域中出现的非线性波的传播，介绍在许多现象中能够直接应用的一般解法。另外，想尽量突出现象中的共同本质部分，而且对非线性波现象背后存在的与普遍自然规律的相互关系，也要尽可能搞得稍微明白一些。因此，本书的读者对象是在物理学和工程学方面热衷于或者从现在起即将热衷于非线性波传播理论的研究人员和学生，以及对物理学和数学的中间领域感兴趣的人。本书不打算写得象汇集计算技术和应用举例的公式手册那样，而宁可抓住由少数典型例题得来的特性，尽力推导出它的一般性质。这样，追求数学的严密性不是本书的目的，并且是非数学家的作者所不能做到的。但是，也并不是原封不动地允许实用上不加思考地使用方便的计算方法。在这方面起桥梁作用也是本书的一个任务，进行这个冒险尝试能否成功？不少地方还期待读者提出宝贵的批评。特别是，虽然提出了发展方程的解的问题，但没有详细涉及初值和边值的假定是否合适这样一个数学上的基本问题，而且在某种情况下，用物理概念来代替对这个问题的讨论。另外，也有个别地方把数学上定义的概念用物理直观加以说明，或

者坚持自以为是的解释。但是，这也是为了使应用于实际问题的人容易理解和判断。

本书的内容大致可分为三部分。第一部分讨论耗散性在充分弱极限下的非线性双曲型方程、由其特征线法产生的解法、包含向不连续解的弱解推广和作为弱解的冲击波的传播理论等成为中心。第二部分说明在非线性弱的情况下，把一般的非线性发展方程系统的解法归结为少数可精确求解的非线性方程的渐近方法。而第三部分叙述精确求解这些方程的方法，主要是散射反演方法。

首先在第一章中，用简单的模型表示由波的突陡引起的非线性波的特征，抑制波的突陡的耗散性和色散性仍然用简单模型说明。特别是作为耗散的非线性方程的典型，介绍了可精确求解的Burgers 方程，相当详细地研究了它的特性。根据这一章的研究，冲击波最本质的部分可以说能够掌握了。

第二部分分为五节，从§2.1—2.3给出非线性双曲型方程的一般性质和特征线法，§2.4以气体冲击波为例，讲述了冲击波的性质、构造和传播。特别以用不连续面代替冲击波时，作为从满足守恒定律的解中选择具有物理意义解的一般原理，给出了发展性条件。这就是熵增加原理的推广，从而可以讨论时间轴方向和耗散性的关系。§2.5讨论了四维空间中双曲型方程的特征曲面和波头速度的关系（即使省略§2.4和§2.5，也不妨碍对后一章的理解）。

在第三章，用叫做递减微扰法的渐近方法，把一般的非线性发展方程系统归结为非线性弱的情况下可精确求解的简单的非线性方程。首先说明用这种卓越的微扰法，由使用的时空变数的展开参数所引伸的物理意义，引入作为其基础的

所谓远方场的概念。然后把一般的耗散系统归结为 Burgers 方程，进而把弱色散系统归结为K-dV方程。接着在§3.5—3.7中指出，当具有强色散的平面波的振幅和相位在时间上和空间上被缓慢调制时，这个调制可以用把振幅的二次方作为位势的非线性Schrödinger方程来近似。然后考察此方程的简单解，求出被调制成脉冲状而行进的解。因为这个波形的包络面象孤立子的行为，所以取名为包络孤立子。另外也提到多维问题，其中之一是以包络孤立子说明波被自己产生的势捕获而聚焦的“波的自聚焦”。§3.8是关于波的参量相互作用，以三波共振相互作用为中心。这里说明用平均法消去快振动，导出关于慢变化部分方程的方法（平均法)。然后，以非线性光学为例，导出关于三个平面波的慢变化振幅和相位的联立方程。由此明确了波的参量激发机构，并且讨论了振幅的时空调制是怎样传播的。最后提出在由双能级原子组成的介质中，入射一个和共振频率几乎相等的超短波脉冲时无吸收透射现象，即在非线性光学中的自感应透明度，指出在理想化的情况下它可以用Sine-Gordon方程来近似。于是，根据这个方程的特性，可把自感应透明度作为孤立子的传播来处理。

第四章是对第三章中导出的简单的色散型非线性方程给以精确求解，并由此说明孤立子的特性。首先，从根据散射反演法求解K-dV方程的解法开始，以此为基础证明存在无穷个守恒定律，进而把K-dV方程写成正则形式，指出哈密顿算符是能够分离的，即它是完全可积系统。再从物理的观点讨论周期性边界条件下的回归性，以户田晶格为例，介绍了它和晶格力学的关系。在§4.4中用一般的格式开展了将

K-dV方程的散射反演解法公式化了的Lax理论。在§4.5中，作为Lax理论的应用例子，用散射反演方法解非线性Schrö-dinger方程。在§4.6中，作为线性方程中的叠加原理的推广，考察接触变换之一的Bäcklund变换，指出从真空递增地求多重孤立子解的方法。进而证明，根据Bäcklund变换，Sine-Gordon方程也同样可以用散射反演方法求解。这些可用散射反演方法求解的方程有共同的特性，在最后一节中，在叫做AKNS形式的范围内将统一地讨论这些方程。

本书是以物理系研究生的讲义为基础写成的，但是因为补充了大量的说明，所以具有学院四年级的程度就足可以阅读并掌握其内容。应该声明，由于篇幅所限只好省略许多课题。例如，生态学中的非线性波动和与它有关的现象也是人们感兴趣的问题，但没有介绍〔关于这方面内容，请参看山口冒哉著的“非线性现象数学（基础数学丛书11）”，朝仓书店（1972）出版〕。另外在本书中主要处理了一维波的传播。然而，多维的传播，它的本质部分也往往可以以一维传播为基础来掌握。而本质上和一维不同的性质则尚未充分阐明，这可以说是今后的问题。另外，引用的文献大部分只是从手头有的文献中选出，因而一定是不完全的。但是，我们认为是重要的论文，也将其原文内容编进了本书。

本书在发行时，承蒙岩波书店的诸位特别是片山宏海氏的多方帮助，愿意再一次表示感谢。另外，对在阅读原稿时，提出有益意见的并木美喜雄氏、堀淳一氏以及对给我们指出缺点和错误的大学研究院、学院的诸位学生，也表示感谢。特别是在写第四章时，不少地方得到児玉裕治先生的建议。

谷内俊弥　西原功修　　1977年3月

目　　录

第一章　模型的考察

§1.1　追 赶 理 论

直线上依次排着N个各种身高的人，使这个直线向相同方向运动时，考察一下连结这些人头所得到的曲线随时间的变化。假设$t=0$时身高为h_i（$i=1$，2，3，……，N)的人的位置记为x_i。当N个人同时以常速度v运动时，沿着（x，t)平面上的直线$x-vt=x_i$，h_i为常数，因此这个曲线不随时间变化，而以速度v作平行移动。让我们把上面的事实取极限过渡到连续体上进行考察，即如果假定把在空间和时间上连续光滑变化的x和t的函数$h(x,t)$作为上面所考虑的以v平行移动的曲线，那么，因为沿着$x-vt=$常数的直线h为常数，故有

$$\frac{\mathrm{d}h(x,t)}{\mathrm{d}t}=0. \qquad (1.1.1)$$

这里，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$是沿直线$x-vt=$常数的方向微分：

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}[h(x+v\Delta t,t+\Delta t)-h(x,t)]/\Delta t$，故得

$$\frac{\partial h}{\partial t}+v\frac{\partial h}{\partial x}=0. \qquad (1.1.2)$$

这个偏微分方程的解，是以速度v平移的曲线，即

$$h(x-vt), \qquad (1.1.3)$$

把上式代入（1.1.2)式并进行微分，是容易验证这一点的。

此外(1.1.3)式表示以相速度v向正x方向传播的波(一般地，把向一个方向传播的波叫做行波，特别是象上面叙述的波形不变的情形，往往叫做永久行波)。

更一般地，我们考察速度v随空间、时间变化的情形。这时，曲线$h(x,t)$随时间变形，但和前面一样，沿着

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v(x,t) \tag{1.1.4}$$

所表示的曲线，h仍然为常数。因此，若把这个曲线族用参数ξ表示为$\varphi(x,t)=\xi$，则h为φ的函数$h(\varphi)$(如果把φ固定，则h为常数)。实际上，因为沿着这个曲线有

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}t+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x=0,$$

所以由 (1.1.4)式得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0, \tag{1.1.5}$$

因而容易证明$h(\varphi)$是 (1.1.2) 式的解，即

$$\frac{\partial h}{\partial t}+v\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}\;\frac{\partial h}{\partial\varphi}+v\frac{\partial\varphi}{\partial x}\;\frac{\partial h}{\partial\varphi}$$

$$=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial\varphi}=0.$$

这样，由方程 (1.1.4) 或 (1.1.5) 所给出的在(x,t)平面上的曲线$\varphi(x,t)=\xi$，具有非常重要的意义，以后就叫做特征线。

可是，步行速度一般是因人而异，因此，我们假定速度v与人的身高h成正比。这时，高个子将追上并超越最初在前面的矮个子，这将发生与以前不同的现象，象上面所考虑的

曲线的连续变形，在有限时间以后便不再成立了（如果道宽狭窄不能超越，那么在产生追赶的地方，便发生某种混乱状态或冲击，可以想象，剧场等地在一个非常时刻有很多人向狭窄出口拥挤所发生的状态）。但是，直到追赶发生以前，曲线$h(x,t)$的变化仍然可以用（1.1.2)式描述，因此为了简单起见，假设$v=h$，则得到

$$\frac{\partial h}{\partial t}+h\frac{\partial h}{\partial x}=0 \tag{1.1.6}$$

这时，沿特征线（各人的轨迹）

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=h \tag{1.1.7}$$

身高h仍然是常数。因此，上式容易求出积分，实际上，特征线显然是直线：

$$x=h(\xi,0)t+\xi. \tag{1.1.8}$$

这里斜率$h(\xi,0)$是在$t=0, x=\xi$时h的初值，而上式表示x轴的各点上通常以不同斜率出来的直线，当然它们不是互相平行的。例如，让我们来考察两条特征线：$x_1=h(\xi_1,0)t+\xi_1$；$x_2=h(\xi_2, 0)t+\xi_2$。如果设$\xi_1<\xi_2$，$h_1>h_2$ [$h_i=h(\xi_i,0)$，$i=1,2$]，则显然在时刻$t=(\xi_2-\xi_1)/(h_1-h_2)$这两条特征线相交（发生追赶）.这就是说，在这一点函数h至少同时具有两个不同的值h_1，h_2（成为多值函数）。因此，一般来说非线性方程（1.1.6）在全部时间内不一定存在单值的解。

作为例子，如果我们设在$t=0$时取$a>0$，并考察

$$\text{(A)} \qquad h=\begin{cases}1 & (x\leqslant -a)\\ -\dfrac{x}{a} & (-a\leqslant x\leqslant 0)\\ 0 & (0\leqslant x)\end{cases}$$

的初始值，则从$t=0$，$x=x_0$出来的特征线，可以分成如下三组：

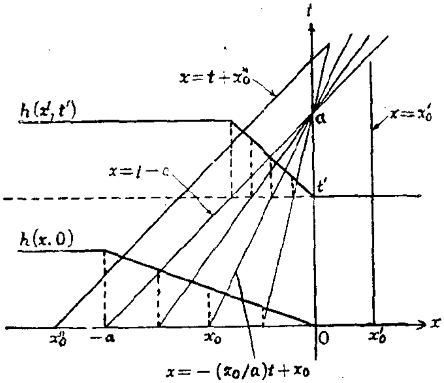

图1.1

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{A}.1) & x=t+x_0 & (x_0\leqslant -a), \\
(\mathrm{A}.2) & x=-(x_0/a)t+x_0 & (-a\leqslant x_0\leqslant 0), \\
(\mathrm{A}.3) & x=x_0 & (0\leqslant x_0).
\end{array}
$$

第 2 组（A.2）的直线，在$t=a$时全部通过$x=0$。即，从$-a\leqslant x_0\leqslant 0$出来的轨迹，由于追赶，在这一点集聚（图1.1）。这时得到

$$
\begin{array}{ll}
h=1 & (x<0), \\
h=0 & (x>0),
\end{array}
$$

在$x=0$处成为不连续。

通常，波的形状由于追赶而变陡的可以叫做压缩波。对于压缩波，无论它的初始分布对于x是怎样的光滑，由于追赶，在有限的时间内，波形就会变为不连续的。而且，因为原来的方程对时间是可逆的，所以如果把上面的现象倒过来，

则会产生初始的突陡波形被摊平而渐渐变为平滑的现象。相对于压缩波，这种波一般叫做稀疏波。特别是把作为集聚的逆过程的稀疏波叫做发散波。在上面的例子中我们可以知道，随着把时间进程倒过来，初始的不连续性最后被摊平，变成发散波而传播。

方程（1.1.6）的初值问题的解，可以象上面那样用追赶特征线的几何学方法简单地求解。为了解析地求解，可以应用把特征线作为分量的新座标系（t,φ）来代替原来的座标系（x,t）。这里，$\varphi(x,t)=x_0$是表示在$x=0$时从$x=x_0$出来的特征线。因此，在$t=0$时φ轴与x轴重合，φ由方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+h\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0 \tag{1.1.9a}$$

和初始条件

$$\varphi(x,0)=x \tag{1.1.9b}$$

来决定。如果注意到关系式

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\bigg|_t+\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_\varphi,$$

并利用（1.1.9a）式，则（1.1.6）式与

$$\frac{\partial x}{\partial t}\bigg|_\varphi=h, \tag{1.1.10a}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}\bigg|_\varphi=0 \tag{1.1.10b}$$

等价。把(1.1.10b)式积分，可立刻得到$h=f(\varphi)$。这里$f(\varphi)$是φ的任意函数。若设h的初始值为$h_0(x)$，则利用对于φ的初始条件（1.1.9b），有$f[\varphi(x,0)]=f(x)=h_0(x)$，所以$f(\varphi)=h_0(\varphi)$。把此式代入（1.1.10a），再利用（1.1.9b）式，便得