报考理工科研究生复习指导丛书

数学

报考理工科研究生复习指导丛书

数 学

罗炳容 温立志 黄庆祥编

湖 南 科 学 技 术 出 版 社

报考理工科研究生复习指导丛书
数　学
罗炳容　温立志　黄庆祥编
责任编辑：胡海清
*
湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷
*
1985年11月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米 1/32　印张：28.75　字数：663,000
印数：1——49,800
统一书号：13204·114　　定价：4.55元

前　言

由于我国四个现代化的需要，高等院校和研究机构招收研究生的数量增长很快，报考研究生的人数也日益增多．对于准备报考理工科研究生的人来说，高等数学是必须考试的一门课程．而入学的考题比一般高等数学教材的题目难度要大，技巧要高，综合性更广．所以一般的教材已不能满足考生复习的需要，迫切需要一些更为深入的指导性复习资料．为此，我们根据多年的教学，包括对研究生入学考试前复习指导的经验以及历年来理工科研究生入学试题的情况，编写了这本《高等数学复习指导》．我们在编写时，除注意扼要而全面地介绍高等数学的基本理论外，特别通过较多的例题介绍基本理论的运用及解题方法与技巧．给读者以启发．这些例题一般都是相当于研究生入学试题的水平的．此外还附有一定难度和相当技巧的练习，每个题目均附有答案，较难的题目附有提示，以便读者参考和核对．

本书有如下的特点：

第一，全书以解题方法为中心，列举了大量重要的例题．

第二，将题目分类归纳，整理出一套解决各种类型题目的方法和途径．例如，我们将大量

的极限题目进行分类，总结了十八种解题方法。

第三，对许多典型例题进行详尽的分析，以帮助读者学会如何思考和分析问题，使读者读后印象深刻，掌握牢固，达到举一反三的效果。

第四，鉴于近年来研究生高等数学入学试题有相当多是带综合性的，故本书注意列举了许多综合性的例题，以帮助读者取得较多的解决综合性题目的经验。

考虑历年来各高等院校理工科研究生的高等数学入学考试的要求，一般重点是数学分析（包括微分方程），还有少量的线性代数等内容，所以，本书为了突出重点，在内容上只包含数学分析、微分方程及线性代数三种内容。

本书共分为十五章，第一章至第五章以及第七章至第十三章是数学分析内容，第六章为空间解析几何，第十四章为微分方程，第十五章为线性代数。读者可以根据自己的情况，从头到尾地阅读，也可以选读某些内容。本书为了全面地总结解题方法以及介绍较多的综合性例题，所以往往出现前面的例题或练习要用到后面的理论，我们认为这不但不是缺点，恰恰相反，这样更有助于读者全面地掌握解题方法和将各种理论综合运用。

本书亦可供理工科高等院校师生参考。

由于我们的水平有限，编写时间仓促，故本书的缺点和错误在所难免，恳请同志们不吝赐教，给予批评指出为感。

编　者　1984年8月

目　　录

第一章　函数·极限·连续

§1　函数、极限和连续性的基本理论

1. 有关函数的基本概念

函数定义　设有两个变量x和y，变量x的变动区域为D。如果对于D中每一个值x，按照某一种确定的对应关系，都可以确定变量y的一个相应值，则称变量y是变量x的一个**函数**，记为$y=f(x)$或$y=F(x)$或$y=g(x)$等等。D叫做函数的**定义域**，所有函数值的全体，叫做函数的**值域**。

复合函数　如果y是u的函数：$y=f(u)$，而u又是x的函数：$u=\varphi(x)$，$\varphi(x)$的函数值的全部或部份在$f(u)$的定义域内，那末，y通过u的联系也是x的函数，我们称它是由函数$y=f(u)$及$u=\varphi(x)$复合而成的函数，简称**复合函数**，记作$y=f[\varphi(x)]$，其中u叫做中间变量。

反函数　设给定一个函数$y=f(x)$，其值域为R。如果对于R中每一个y值，都可从关系式$y=f(x)$（把它看成关于x的一个方程）确定唯一的一个x值，则得到一个定义在R上以y为自变量，x为因变量的函数$x=\varphi(y)$，称为函数$y=f(x)$的

反函数。函数$y=f(x)$的反函数常记为$x=f^{-1}(y)$。

初等函数 下列五种函数称为基本初等函数，即

幂函数 $y=x^{\mu}$ (μ是常数)。

指数函数 $y=a^{x}$ (a是常数且 $a>0$, $a\neq 1$)。其中工程技术中常用的指数函数是e^{x}，e是一个无理数，$e=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

$=2.718281828459045\cdots\cdots$。

对数函数 $y=\log_{a}x$ (a是常数且$a>0$, $a\neq 1$)。

工程问题中常常碰到以常数e为底的对数函数$y=\log_{e}x$，叫做自然对数函数，简记为$y=\ln x$。

三角函数 常用的有正弦函数$y=\sin x$，余弦函数$y=\cos x$，正切函数$y=\operatorname{tg}x$，余切函数$y=\operatorname{ctg}x$，正割函数$y=\sec x$，余割函数$y=\csc x$。

反三角函数 常用的有反正弦函数$y=\arcsin x$，仅余弦函数$y=\arccos x$，反正切函数$y=\operatorname{arctg}x$，反余切函数$y=\operatorname{arcctg}x$。

此外，如果把常量看作函数时也列为基本初等函数。

初等函数是指那些由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数。

例如函数$y=\sin^{2}x$，$y=\sqrt{1+x^{2}}$，$y=\dfrac{e^{x}\sin x}{1+\sqrt{1-x^{2}}}$ 等等都是初等函数。

非初等函数 是指除初等函数以外的函数，通常有下列的形式：

1° 通过多个式子表示，例如：

狄里克莱函数 $y=X(x)$，其中

$$X(x)=\begin{cases}1\ (\text{若 } x \text{ 为有理数}),\\ 0\ (\text{若 } x \text{ 为无理数}).\end{cases}$$

符号函数 $y=\operatorname{sign}x$，其中

$$\operatorname{sign} x=\begin{cases}1 & (若x>0),\\ 0 & (若x=0),\\ -1 & (若x<0).\end{cases}$$

2° 通过无穷级数表示，例如

$$f(x)=x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}+\cdots,$$

$$g(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x.$$

3° 通过积分表示，例如

$$f(x)=\int_1^x\frac{\sin x}{x}dx,\ g(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt\quad(x>0).$$

2.有关函数的几种基本性质

1° **函数的有界性** 如果存在正数M，使得函数$f(x)$在其定义域上满足不等式$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ **是有界**的，否则$f(x)$是**无界**的。

2° **函数的单调性** 设函数 $f(x)$ 在区间内有定义，对于(a, b)内任意两点x_1及x_2，当$x_1<x_2$时，如果$f(x_1)<f(x_2)$，则称$f(x)$在(a, b)内是**单调增加**的，或者称为是**严格单调增加**的或**递增**的；如果$f(x_1)\leqslant f(x_2)$则称$f(x)$在(a, b)内是**单调不减**的，或称为是**非减**的；如果$f(x_1)>f(x_2)$则称$f(x)$在(a, b)内是**单调减少**的，或者称为是**严格单调减少**的或**递减**的；如果$f(x_1)\geqslant f(x_2)$则称$f(x)$在(a, b)内是**单调不增**的，或称为是非增的。

单调函数的反函数总是存在的。

3° **函数的奇偶性** 如果函数$f(x)$对于定义域内的任意x

都满足$f(-x)=f(x)$则$f(x)$叫做**偶函数**，如果满足$f(-x)=-f(x)$，则$f(x)$叫做**奇函数**。

4° **函数的周期性** 对于函数$f(x)$，如果存在一个不为零的数T，使得关系式$f(x+T)=f(x)$在定义域内任何x都成立，则$f(x)$叫做**周期函数**，T叫做$f(x)$的**周期**。通常，我们说周期函数的周期是指最小正周期。

函数还有更重要的性质如连续性、可微性、可积性等，将在以后介绍。

3.有关极限的基本概念

数列极限定义 设$\{x_n\}$为一个数列，A为一个定数，如果对于任意给定的正数ε，总可以找到这样的正整数N，使得当$n>N$时，有$|x_n-A|<\varepsilon$。则称A是数列$\{x_n\}$的**极限**，或者说$\{x_n\}$收敛于A，记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$或当$n\to\infty$时$x_n\to A$ 如果数列$\{x_n\}$没有极限，就说它是**发散**的

函数极限定义

1° **自变量趋向有限值时函数的极限** 如果对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得当$0<|x-a|<\delta$时，对应的函数$f(x)$满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数A是函数$f(x)$当x趋于a时的**极限**。记作 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$或当$x\to a$时$f(x)\to A$。

2° **自变量趋向无穷大时函数的极限** 如果对于任意给定的正数ε，总存在着正数X，使得当$|x|>X$时，所对应的函数$f(x)$满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数A为函数$f(x)$当x趋向无穷大时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad 当x\to\infty时f(x)\to A。$$

此外，还有所谓单边极限，即

$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=A$(表示$x$大于$a$而趋于$a$时$f(x)$的极限为$A$)，

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$（表示$x$小于$a$而趋于$a$时$f(x)$的极限为$A$），

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$（表示$x$取正值无限增大时$f(x)$的极限为$A$），

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$（表示$x$取负值无限减小时$f(x)$的极限为$A$）。

无穷小定义 对于数列$\{x_n\}$，如果$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=0$则称$x_n$当$n\to\infty$时为**无穷小**。

对于函数$f(x)$，如果$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\text{或}x\to\infty)}}f(x)=0$，则称$f(x)$当$x\to a$（或$x\to\infty$）时为**无穷小**。

无穷大定义 对于数列$\{x_n\}$，如果对任意给定的正数M，总存在正整数N，使得当$n>N$时，有$|x_n|>M$，则称x_n当$n\to\infty$时为**无穷大**。记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$。

对于函数$f(x)$，如果对任意给定的正数M，总存在正数δ（或正数X），使得当$0<|x-a|<\delta$，（或$|x|>X$）时，有$|f(x)|>M$，则称函数$f(x)$当$x\to a$（或$x\to\infty$）时为**无穷大**。记作$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(\text{或}x\to\infty)}}f(x)=\infty$。

无穷小的比较 设变量u及v都是在同一个自变量变化过程中的无穷小，而$\lim\frac{u}{v}$也是在这个变化过程中的极限。如果

$\lim\frac{u}{v}=0$，则称u是比v高阶的无穷小，记作$u=o(v)$；

$\lim\frac{u}{v}=c\neq0$，则称u与v是同阶无穷小，记作$u=o(v)$；

$\lim\frac{u}{v}=1$，则称u与v是等价无穷小，记作$u\sim v$；

$\lim\frac{u}{v}=\infty$，则称u是比v低阶的无穷小。

4.有关极限的基本定理

关于极限的运算法则

定理1 如果$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} g(x)=B$，则

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$。即

代数和的极限等于极限的代数和。

定理2 如果 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} g(x)=B$，则

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x)g(x)=AB$。即

乘积的极限等于极限的乘积。

定理3 如果 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} g(x)=B$，$B\neq 0$，

则 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$。即商的极限等于极限的商（当分母的极限不为零时）。

关于无穷小的几点性质

定理4 有限个无穷小的和仍为无穷小。

定理5 有限个无穷小的积仍为无穷小。

定理6 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小。

定理7 无穷小的倒数为无穷大，反之，无穷大的倒数为无穷小。

关于极限的存在准则

1° 〔相夹极限存在准则〕

定理8 设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$为三个数列，如果满足(i) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，$(n=1, 2, \cdots\cdots)$，(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$。

定理9 设$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$为三个函数，如果满足 (i) $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$在点$a$的邻域成立，但点$a$本身可除外（或当$|x|$充分大时成立），

(ii) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} g(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} h(x)=A$。则 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} f(x)=A$。

2° 〔单调有界极限存在准则〕

定理10 如果$\{x_n\}$为单调增加（或单调减少）的数列，且存在常数M，使得$x_n\leqslant M$（或$x_n\geqslant M$）对一切正整数n成立，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在。

定理11 如果函数$f(x)$为单调不减（或单调不增）且存在常数M，使得当x充分大时有$f(x)<M$（或$f(x)>M$），则极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在。

〔柯西极限存在准则〕

定理12 数列$\{x_n\}$有极限的充分且必要的条件是：对于任意给定的正数ε，总存在正整数N，使得当$m\geqslant n>N$时，$|x_m-x_n|<\varepsilon$。

定理13 函数$f(x)$当$x\to a$（或$x\to\infty$）时有极限的充分且必要的条件是：对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，(或正数X)，使得对任意两点x_1，x_2，只要$0<|x_1-a|<\delta$，$0<|x_2-a|<\delta$（或$x_2\geqslant x_1>X$）时，便有$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$。

〔罗必塔法则〕

如果$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$（或$\infty$），$\lim\limits_{x\to a}F(x)=0$（或$\infty$），则极限$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$叫做$\dfrac{0}{0}$型$\left(\text{或}\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$的未定式，求这种极限有一个相当有效的方法，称为**罗必塔法则**。具体方法请看第三章关于中值定理的部份。