经济数学系列丛书

微积分

主　编　陈慧玉
副主编　贝时春　罗万钧

复旦大学出版社

(沪)新登字202号

微 积 分
主 编 陈慧玉
副主编 贝时春 罗万钧
复旦大学出版社出版发行
(上海国权路579号)
江苏东台印刷厂印刷
开本 850×1168 1/32 印张 15.375 字数 455,000
1994年6月第1版 1994年6月第1次印刷
印数 1—5000
ISBN 7-309-01365-4/O·143
定价：13.00元

内 容 提 要

本书由上海财经大学经济信息管理系高等数学教研室编写，系高等学校财经类专业使用的经济数学基础教材。

全书共分八章：函数与极限，导数与微分，中值定理与导数应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微积分，无穷级数，微分方程与差分方程简介。每章末均附有联系经济实际的习题，书末附有习题的参考答案。

本书可作为财经类大专院校的教材，也可作为财经类高等教育自学考试、函授、夜大学的教材以及财经管理人员的学习参考书。

前　言

本书是根据高等院校财经类专业核心课程教学大纲编写的，是经济数学基础系列教材之一。

现代科学技术和经济管理都离不开数学，作为经济数学基础的微积分更是必不可少。在本书的编写过程中，我们遵循教学大纲的指导思想和基本原则，结合多年的教学实践，强调微积分学的基本概念、基本理论和基本方法的科学性、系统性及应用性，并力求讲解深入浅出；同时，注重微积分学在经济理论研究和经济管理中的应用。本书还选配了适量的在经济领域应用中的例题和习题。

由于财经类本科和专科的数学时数不同，教师在使用本书时可根据教学要求适当选用有关内容。

本书由上海财经大学经济信息管理系的教师编写，参加编写的成员有：陈慧玉(第一章)；杨爱珍(第二和三章)；卢慧芳(第四和五章)；魏枫(第六章)；王春归(第七章)；罗万钧(第八章)。陈慧玉任主编，贝时春、罗万钧任副主编。

在编写中，我们参考了国内有关高等数学的教材，吸收了一些西方经济学的有关内容，并得到了孙立爱、王雅芳和张来泰等同志的具体帮助；成稿后，朱幼文教授仔细地审阅了全稿。在此我们一并表示衷心感谢。

限于编者水平，加上编写时间也较短促，书中不妥之处在所难免，恳请数学界同仁与广大读者不吝赐教。

编　者

一九九四年三月

目　　录

第一章　函数与极限

函数是高等数学研究的主要对象，它从数量方面反映了一切客观事物之间的相互联系与相互影响；极限是高等数学的理论基础，它作为最基本的概念贯穿于高等数学的始终；连续性则反映了函数的重要性态之一。本章将介绍函数、极限以及函数的连续性等内容。

第一节　函　　数

一、函数概念及其表示法

在任何一种自然现象或任何一个经济活动中，各个变量的变化不是孤立的，而是彼此联系并遵循着一定的变化规律，这种变量之间的依赖关系就是数学上要讨论的函数关系。我们先来看几个例子。

【例1】圆的面积S与它的半径r之间的依赖关系，由公式$S=\pi r^2$给定。当r在$(0,+\infty)$内任意取定一个数值时，由公式就可以确定S的相应数值。

【例2】某化肥厂生产某种化肥1000吨，每吨定价600元。如果销售量在700吨以下，按此价格出售；如超过700吨，则超过部分打九折出售。此时销售总收入y与销售量x吨之间的依赖关系可用下式表示：

$$y=\begin{cases}600x & (0<x\leqslant 700)\\ 600\cdot 700+600\cdot 0.9\cdot(x-700) & (700<x\leqslant 1000)\end{cases}$$

当x在$(0,1000]$内任意取定一个数值时，由y与x的关系式就可以确定y的相应数值。

尽管上述两例的具体意义不相同，变量之间联系的表达式也不一样，但它们却有着相同的本质：在某个过程中的两个变量是互相联系的，当其中一个变量在某一范围内每取一个值时，另一个变量按照一定的规律，总有确定的值与它对应。两个变量间的这种关系就是函数的

实质。

定义1.1 设有两个变量x和y，如果当变量x在某变化范围D内任取一个数值时，变量y按照一定的规律有唯一确定的数值与它对应，则称y是x的函数。记作

$$y=f(x)$$

其中变量x称为自变量，它的取值范围D称为函数的定义域；变量y称为因变量，它的取值范围是函数的值域。

从函数的定义中不难看出，定义域与对应规律是确定函数关系的两个要素。

函数的定义域就是使函数表达式在实数范围内有意义的自变量的一切值。当然，如在实际问题中，尚须根据问题的实际意义来确定。

【例3】 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\sqrt{10-2x}}{3-x}$。　　(2)$y=\lg(4-x^2)+\arcsin(2x-1)$。

解 (1)由$\begin{cases}10-2x\geqslant 0\\3-x\neq 0\end{cases}$

得公共部分为$x\leqslant 5$且$x\neq 3$，因此定义域为$(-\infty,3),(3,5]$。

(2)由$\begin{cases}4-x^2>0\\-1\leqslant 2x-1\leqslant 1\end{cases}$

得公共部分为$0\leqslant x\leqslant 1$，因此定义域为$[0,1]$。

【例4】 设$f(x)=\sqrt{x}$；$g(x)=x^2-9$，试求$f[g(x)]$的定义域。

解 $f[g(x)]=\sqrt{x^2-9}$

由$x^2-9\geqslant 0$，得$x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -3$。因此，定义域为$(-\infty,-3],[3,+\infty)$。

在函数的定义中，当自变量x在定义域内每取一个数值时，变量y有确定的值与它对应，但并不要求当自变量变化时函数的值一定要改变，因此所有x值都对应于一个y值也是允许的，即常数函数$y=C$(常数)。

函数的表示法通常有三种形式：解析法、表格法和图示法。其中以解析法表示函数最为简捷。除此之外，还有用语言叙述来表示函数的。

【例5】 y是不超过x的最大整数。它同样表示一个函数，记作$y=[x]$，其定义域为一切实数。

在用解析法表示函数时，值得注意的是分段函数。分段函数仍旧是一个函数，只不过当自变量在不同范围时，对应规律不同而已。

【例6】

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (-1\leqslant x<0) \\ 1 & (0<x<1) \\ 2x-1 & (1\leqslant x<2) \end{cases}$$

它是一个分段函数(图1-1)，其定义域为$[-1,0)$，$(0,2)$。

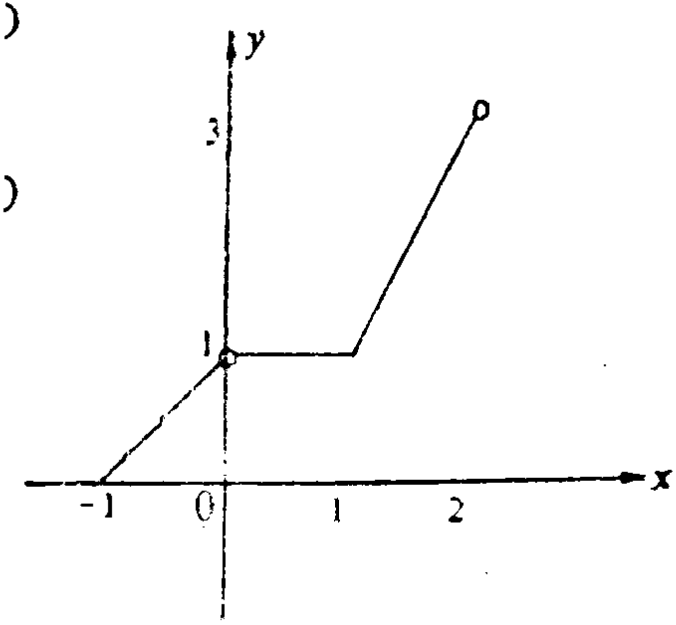


图1-1

当自变量x取某一定值x_0时，对应函数值 $f(x_0)$称为函数$y=f(x)$在$x=x_0$时的函数值。

【例7】 设$f(x)=(x-1)^3$，求$f(f(1))$。

解 $f(f(1))=f(0)=-1$

【例8】 已知$f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求$f(x+1)$。

解 $$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$$

$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$$

因此 $$f(x)=x^2+2$$

$$f(x+1)=(x+1)^2+2$$

二、函数的几种主要性质

1. 函数的有界性

定义1.2 设函数$f(x)$ 在某区间上有定义，若存在一个正数 M，使得对于该区间上任意点x，均有$|f(x)|\leqslant M$成立，则称 $f(x)$ 在该区

间上有界；否则，就称$f(x)$在该区间上无界。

显然，在某区间上有界函数$f(x)$的图形一定在该区间上介于两条直线$y=\pm M$之间。

【例9】 函数$y=\sin x$与 $y=\cos x$在$(-\infty,+\infty)$上都是有界的，因为$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$。

【例10】 函数$y=\sqrt{1-x^2}$在定义域$[-1,1]$上是有界函数，因为$0\leqslant y\leqslant 1$。

注意函数的有界性与所选的区间有关。

【例11】函数$y=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内无界，但在$(1,2)$内有界。

2．函数的单调性

定义1.3 设函数$f(x)$在某区间上有定义，若对于该区间上任意两点x_1,x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$f(x)$在该区间上单调增加；当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数$f(x)$在该区间上单调减少。

单调增加与单调减少函数统称为单调函数，它们的图形分别如图1-2a和b所示。

【例12】 函数$y=x^2$，在$(-\infty,0)$内单调减少，在$(0,+\infty)$内单调增加，而在$(-\infty,+\infty)$内它不是单调函数。

3．函数的奇偶性

定义1.4 如果函数$f(x)$对于定义域内的任意x与$-x$，都满足$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数；如果都满足$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数。

【例13】 判断函数$f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$的奇偶性。

解 因为
$$f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$$
所以$f(x)$为奇函数。

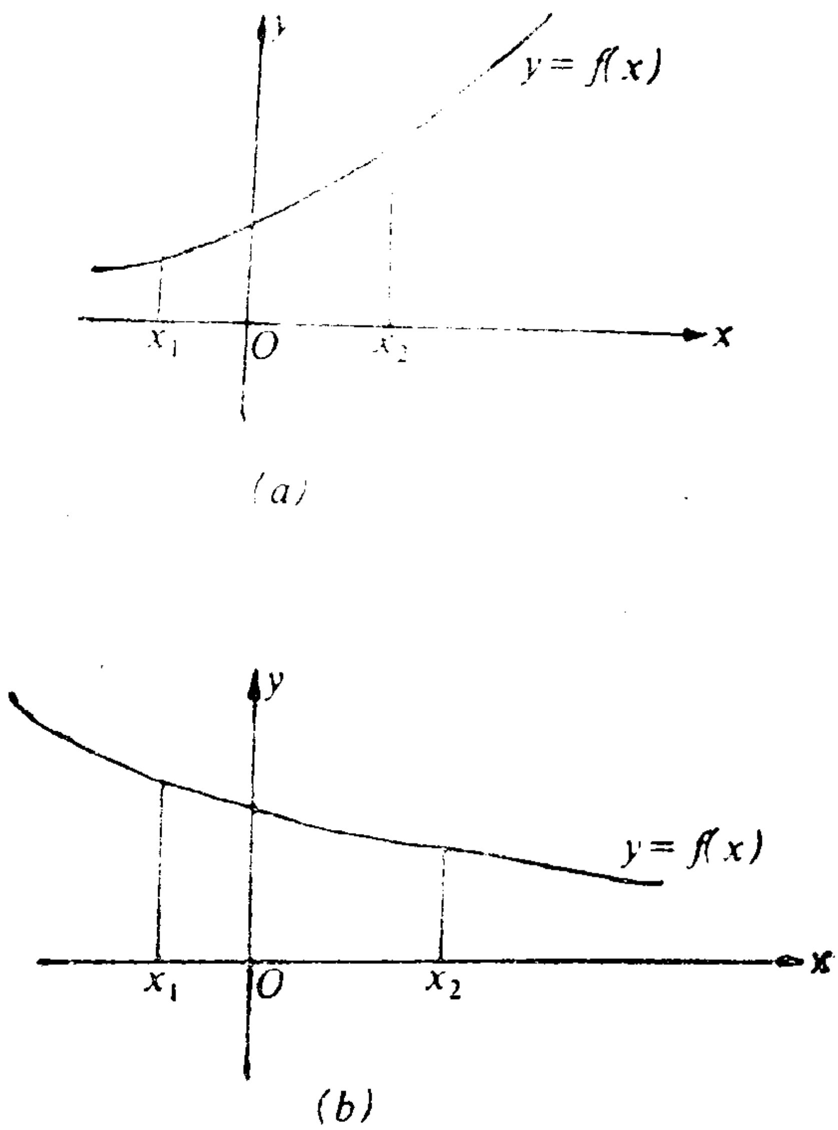


图 1-2

【例 4】 判断函数$f(x)=\begin{cases} x^3+1 & (x\geqslant 0) \\ -x^3+1 & (x<0) \end{cases}$

的奇偶性。

解 因为

$$f(-x)=\begin{cases} (-x)^3+1 & (-x\geqslant 0) \\ -(-x)^3+1 & (-x<0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -x^3+1 & (x\leqslant 0) \\ x^3+1 & (x>0) \end{cases}$$

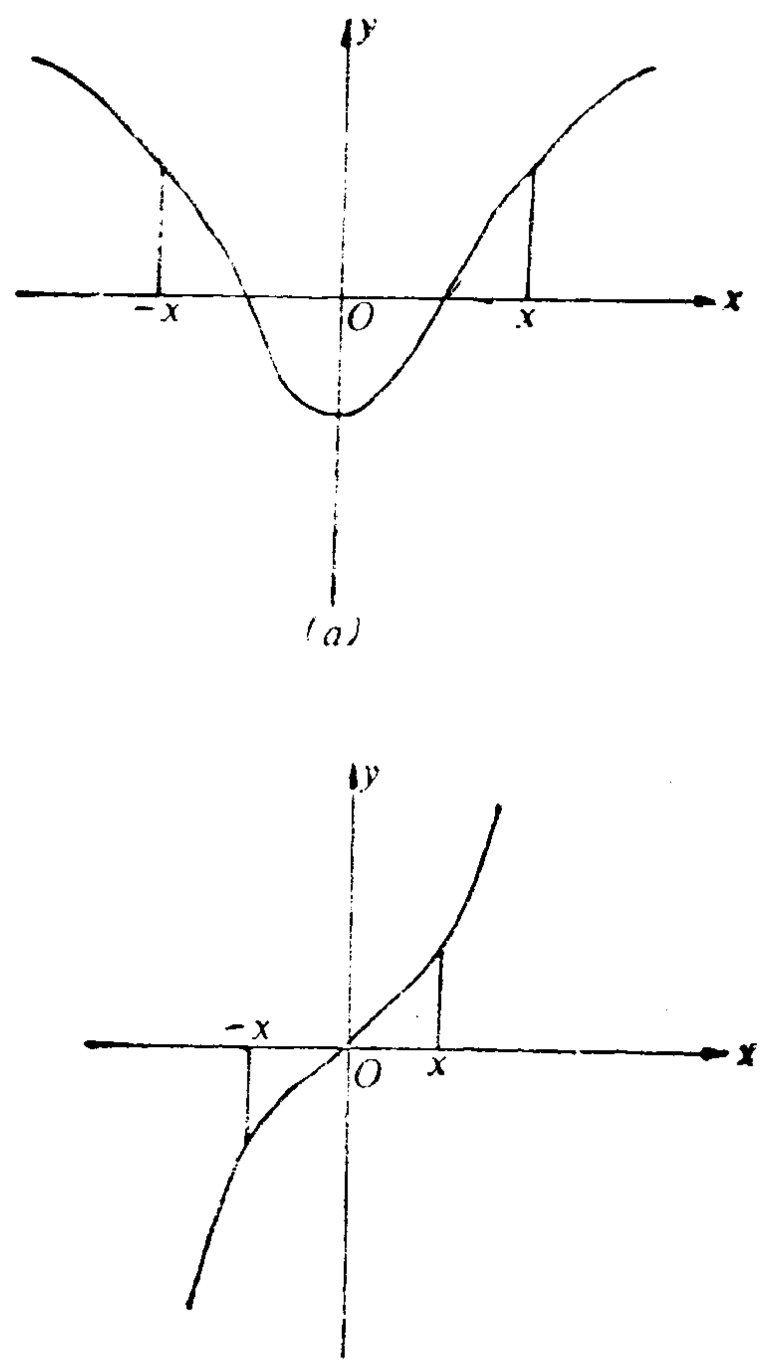
$$
=\begin{cases} -x^3+1 & (x<0) \\ x^3+1 & (x\geqslant 0) \end{cases}
$$

$$
=f(x)
$$

所以$f(x)$为偶函数。

显然，偶函数的图形对称于y轴；奇函数的图形对称于原点，如图1-3*a*和*b*所示。

4.函数的周期性



(b)

图 1-3

定义1.5 对于函数$f(x)$,如果存在一个正数T,使得对于定义域内的任意x,恒有$f(x+T)=f(x)$,则称$f(x)$为周期函数。使上式成立的最小正数T为该周期函数的周期。

【例15】 求函数 $f(x)=\mathrm{tg}\dfrac{x}{4}+\sin 2x$的周期。

解 对于$y_1=\mathrm{tg}\dfrac{x}{4}$,周期$T_1=4\pi$;对于$y_2=\sin 2x$,周期$T_2=\pi$。

T_1与T_2的最小公倍数4π,所以$f(x)$的周期$T=4\pi$。

【例16】 求函数$y=\sin^4x+\cos^4x$的周期。

解
$$
\begin{aligned}
y&=\sin^4x+\cos^4x\\
&=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x\\
&=1-\frac{\sin^2 2x}{2}\\
&=1-\frac{1-\cos 4x}{4}\\
&=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x
\end{aligned}
$$

因此,y的周期为 $T=\dfrac{\pi}{2}$

三、初等函数

1. 基本初等函数

下列函数称为基本初等函数:

(1) 幂函数 $y=x^\mu$ (μ为任意实数)

(2) 指数函数 $y=a^x$ ($a>0$且$a\neq1$)

(3) 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$且$a\neq1$)

(4) 三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\mathrm{tg}x$, $y=\mathrm{ctg}x$等。

(5) 反三角函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\mathrm{arctg}x$, $y=\mathrm{arcctg}x$ 等。

这些函数的性质和图形在初等数学中已作详细介绍,在此不再重复。

2. 反函数

定义1.6 设函数$y=f(x)$，若将y作为自变量，x作为因变量，则由关系式$y=f(x)$所确定的函数$x=\phi(y)$称为$y=f(x)$的反函数。

习惯上，以x作为自变量，y作为因变量，因此$y=f(x)$的反函数$x=\phi(y)$，可写为$y=\phi(x)$，也可用$y=f^{-1}(x)$表示。

显然，$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$互为反函数。

【例17】 求$y=1+\lg(x+2)$的反函数。

解 由$y=1+\lg(x+2)$可确定出$x=10^{y-1}-2$，再改写得

$$y=10^{x-1}-2$$

即为所求的反函数。

容易证明，函数$y=f(x)$与其反函数$y=f^{-1}(x)$的图形关于直线$y=x$对称(图1-4)。

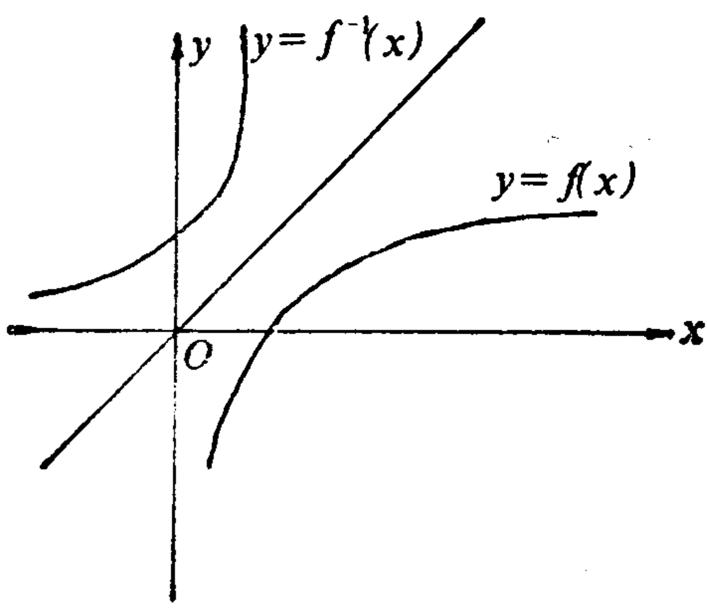


图 1-4

需要指出，并非所有的函数都有反函数。例如，函数$y=x^2$在$(-\infty,+\infty)$内不存在反函数。这是因为由$y=x^2$得$x=\pm\sqrt{y}$不符合函数定义了。但是，如果函数$y=f(x)$在某区间上是单调递增(减)函数，则它的反函数$y=f^{-1}(x)$一定存在，且在对应区间上也是单调递增(减)函数。

【例18】 求$y=-\sqrt{x-1}$的反函数。

解 由$y=-\sqrt{x-1}$可确定出$x=y^2+1$ $(y\leqslant 0)$，所求的反函数为

$$y=x^2+1 \quad (x\leqslant 0)$$

3．复合函数

反映变量之间依赖关系的函数形式有时是比较复杂的。例如，x表示单位产品的成本，u表示单位产品的销售价格，y为市场的销售量，若暂不考虑其它因素，显然可知价格u是成本x的函数，而销售量y又是价格u的函数。于是，对于每一个确定的x值，通过u总对应着一个确定的y值。这种函数关系称为y是x的复合函数。

定义1.7 设y是u的函数$y=f(u)$，而u又是x的函数$u=\phi(x)$，且$\phi(x)$的值域的全部或部分是$f(u)$的定义域，即$\phi(x)$的值域与$f(u)$的定义域之交集非空，则称y是x的复合函数。记作$y=f[\varphi(x)]$，其中u称为中间变量。

有了复合函数的概念，就可以把较复杂的函数分解为几个简单的函数。例如，函数$y=e^{\sin x}$是由$y=e^u$与$u=\sin x$复合而成；$y=\sqrt{\lg x}$是由$y=\sqrt{u}$与$u=\lg x$复合而成。

中间变量的个数可以多于一个，即可以由两个以上的函数经过复合构成一个函数。例如，函数$y=\cos^2\sqrt{x}$是由$y=u^2$与$u=\cos v$，$v=\sqrt{x}$复合而成。

在分解复合结构时，必须由表及里，逐层分解。每一层都是基本初等函数。

必须注意：并非任何两个函数都可构成一个复合函数。例如，$y=\lg u$与$u=-x^2$就不能构成复合函数．因为函数$u=-x^2$的值域是$(-\infty, 0]$，而$y=\lg u$的定义域$(0,+\infty)$。

4．初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成、并且用一个式子表示出来的函数，称为初等函数。例如，

$$y=\sin\sqrt{x}+e^{-3x}-1; \quad y=\mathrm{tg}\frac{1}{x}+\lg(x^2-1)$$

等都是初等函数。

一般地说，分段函数不是初等函数。

四、常见的经济函数

1. 成本函数$C(x)$

成本是产量x的函数，它包括固定成本C_0和变动成本$C_1(x)$，即$C(x)=C_0+C_1(x)$。而$\frac{C(x)}{x}$称为平均成本函数，即单位产品的成本，记作$\overline{C(x)}$ 即 $\overline{C(x)}=\frac{C(x)}{x}$。

2. 收益函数$R(x)$

收益是销售量x的函数，若设产品的单价为p，则$R(x)=p\cdot x$。这里的p可以是常数，也可以是需求量x的函数$p(x)$，那么$R(x)=p(x)\cdot x$。

3. 利润函数$L(x)$

设产销平衡，即生产量与销售量相等，显然有$L(x)=R(x)-C(x)$。

在经济领域中，所谓的"盈亏平衡点"就是收益与成本相等时的产量，可由$L(x)=R(x)-C(x)=0$解出x。

4. 需求函数

市场上某种商品的需求量的多少与消费者的收入、商品本身的价格以及与该商品有关商品的价格等因素有关，这里我们暂且把需求量看作是商品本身价格的函数，即$Q=f(p)$（其中p为价格，Q为需求量）。一般来说，需求量是价格的减函数。

5. 供给函数

供应量Q也可以主要看作是商品本身价格的函数，即$Q=\phi(p)$（其中p为价格，Q为供应量），

供应量是价格的增函数。

在经济领域中，所谓"均衡价格"就是指市场上的需求量与供应量相等时的价格p_0。显然，可由$f(p)=\varphi(p)$解出p_0。当市场价格$p>p_0$时，供大于求，商品滞销，这种状况必然导致价格下跌，p减少；当市场价格$p<p_0$时，供不应求，商品短缺，这种状况必然导致价格上涨，p增大（图1-5）。

【例19】 生产某种产品，固定成本为2万元，每多生产100台，成本增