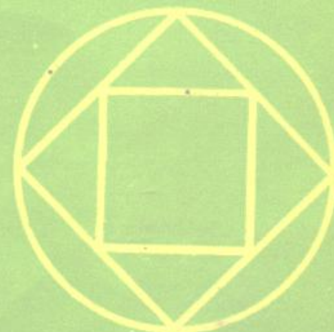
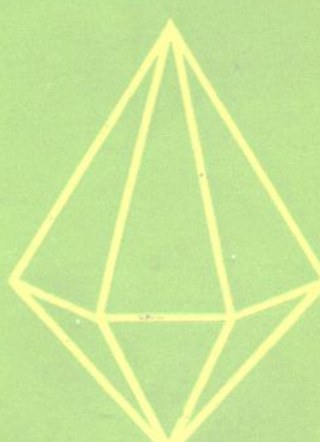
图论基础及应用

TULUNJICHU JI YINGYONG

北方交通大学 吴文泷 主编



中国铁道出版社



图论基础及应用

北方交通大学 吴文泷 主编

中国铁道出版社
1984年·北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了图论的基本理论和在若干工程技术方面的应用。

全书共十四章，前七章为图论基础部分，后七章为图论应用部分。其中，第十一章图论算法和计算机程序可作为计算工具使用。应用部分偏重于电网络、开关网络和交通网络这三方面。每章后附有若干习题，以资练习。本书适用于铁路行车自动控制、通信、计算机科学和运输各专业，可以作为铁路高等院校和一般高等工科院校相应专业的研究生课或大学高年级选修课的教材或参考书。对于图论有兴趣的工程技术人员亦可作为自学参考书。

图论基础及应用

北方交通大学 吴文迷 主编

中国铁道出版社出版

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：19.5 字数：486千

1 9 8 4 年 9 月 第 1 版 1 9 8 4 年 9 月 第 1 次印刷

印数：0001—7,500册 定价：3.65元

序

图论是一门研究事物之间相互关系或联系的学科，它用一组点来代表事物，用一组边来代表不同事物之间的关系，形成一个抽象图形来研究点与边之间的特性。这门学科的开创要追溯到1736年，到现在已有二百多年历史。近二、三十年来，尤其在高速电子计算机问世后，它有较快的发展。这是因为电子计算机的发展和应用，为研究庞大复杂的系统提供了可能性。现在图论的应用范围很广，不但能应用于自然科学，也能应用于社会科学。

为了使图论这一理论能够应用到铁路企业各方面的研究中，编者于1978～1979年编写了一本《图论基础及应用》作为讲义，在北方交通大学进行讲授。讲义内容主要取材于本书参考文献中第一、第二两本书。讲义共分十五章，前七章为图论基础部分，后八章为图论应用部分。应用部分偏重于电网络、开关网络和交通网络这三方面。

通过几次讲课，编者根据同学们的反映和积累的新资料，对原来的讲义作了部分增删。现在全书共分十四章，前七章仍为图论基础部分，后七章为图论应用部分，而第十一章图论算法和计算机程序作为应用时的共同必需工具。

本书编写的目的是为了适应铁路行车自动控制、通信、计算机科学和运输各专业和一般高等工科院校相应专业的研究生作教材或参考书用。每章后附有若干习题，以资练习。全书内容较多，各专业可以根据需要和研究方向删除某些章节，或增加某些适合研究方向的内容，开设一门五、六十学时的研究生课。本书前七章图论基础部分可以作为大学高年级学生的选修课。

本书除第八、九两章由许珠副教授改写外，其余部分均由吴文泷教授编写。第十四章中“接点开关电路中迂回电路的诊断”的部分内容由汪焕敏讲师提供素材。

本书承蒙中国科学技术大学研究生院的左垲教授审阅，提出了许多宝贵意见，在此谨致衷心的感谢。

由于编者的水平有限，书中可能存在若干错误和缺点，请读者不吝批评指正。

编　者

1983年3月于北方交通大学电信系

目　录

第一章　绪　　论……1

第一节　图论的发展简史……1

第二节　集合论的一些基本概念……2

第三节　图的定义……3

第四节　关联和次数……6

第五节　图论中的论证……7

习　　题……9

第二章　行走、路径和回路……10

第一节　行　　走……10

第二节　路　　径……11

第三节　子　　图……12

第四节　回　　路……13

第五节　同　　构……13

第六节　图的运算……15

第七节　图的分解、删除、合并和短捷……16

第八节　欧拉图……18

第九节　汉密尔顿路径和回路……22

第十节　最小运算……23

第十一节　M　　图……24

第十二节　路径集体……27

第十三节　巡回检查工作的旅程问题……31

第十四节　邮递员问题……31

习　　题……33

第三章　树……35

第一节　树的定义和特性……35

第二节　树的距离和中心……38

第三节　有根树和二元树……40

第四节　标记树……41

第五节　生成树……42

第六节　图的主要数据……43

第七节　基本回路……44

第八节　生成树的产生和变换……44

第九节　最短生成树……46

习　　题……48

第四章　关联组和截割组……49
第一节　关联组……49
第二节　截割组的定义……50
第三节　截割组的若干特性……51
第四节　基本截割组……52
第五节　截割组的环和……53
第六节　连通度和可分性……56
习　题……58
第五章　图的矩阵表示法……59
第一节　矩阵的基本运算……59
第二节　关联矩阵……63
第三节　树的矩阵……66
第四节　回路矩阵……67
第五节　截割组矩阵……74
第六节　路径矩阵……76
第七节　邻接矩阵……77
第八节　关联矩阵、回路矩阵、截割组矩阵、邻接矩阵间的关系……80
习　题……82
第六章　平面图和对偶图……84
第一节　抽象图和几何图……84
第二节　1-同构和2-同构……85
第三节　平面图……89
第四节　两个典型的非平面图……92
第五节　平面性的检查……95
第六节　对偶图……96
第七节　基础回路全组……102
第八节　厚度和交叉……103
习　题……103
第七章　有　向　图……105
第一节　有向图的特点和类型……105
第二节　有向图的关联矩阵……107
第三节　有向子图……108
第四节　有向欧拉图……110
第五节　有向树……112
第六节　有向图的回路矩阵……116
第七节　有向图的截割组矩阵……119
第八节　有向图的邻接矩阵……122
第九节　成对比较和比赛图……125
第十节　非循环有向图和消除循环法……127
习　题……129

第八章　电网络的拓扑分析 ……130
第一节　引　　言 ……130
第二节　电网络方程 ……130
第三节　节点分析法 ……135
第四节　节点导纳矩阵的行列式 ……138
第五节　节点导纳矩阵行列式的余子式 ……139
第六节　网络函数 ……140
第七节　电流图和电压图 ……141
第八节　有源网络的拓扑分析 ……145
习　　题 ……147
第九章　流图和信号流图 ……149
第一节　流　　图 ……149
第二节　信号流图 ……150
第三节　梅森公式 ……156
习　　题 ……159
第十章　开关网络 ……161
第一节　基本概念 ……161
第二节　接通矩阵 ……163
第三节　开关网络的分析 ……168
第四节　截割组矩阵的可实现性 ……169
第五节　开关网络的合成 ……185
第六节　不定开关函数的单接点网络合成 ……194
第七节　多接点开关网络的合成 ……197
第八节　时序开关网络 ……199
习　　题 ……203
第十一章　图论算法和计算机程序 ……204
第一节　引　　言 ……204
第二节　算　　法 ……204
第三节　图在计算机中的表示法 ……205
第四节　图的输出 ……207
第五节　几种基本算法 ……208
第六节　最短路径算法 ……220
第七节　图的深度第一搜索法 ……227
第八节　其它图论算法 ……233
第九节　专用计算机语言和程序设计 ……236
习　　题 ……238
第十二章　边权交通网络 ……239
第一节　无向边权交通网络的流量 ……239
第二节　最大流量 ……242
第三节　通信网络的图表示法 ……245

第四节 优先约束树 ……248
第五节 边权交通网络中的各种路径 ……249
第六节 电视接力网络 ……251
第七节 有向边权交通网络 ……254
第八节 损耗边权交通网络 ……255
习 题 ……258
第十三章 点权交通网络 ……259
第一节 无向点权交通网络的流量 ……259
第二节 有向点权交通网络 ……263
第三节 点截割和点半截割的产生 ……264
第四节 关键路径法 ……269
习 题 ……276
第十四章 故障诊断 ……278
第一节 引 言 ……278
第二节 分辨率 ……278
第三节 测试点 ……281
第四节 测试门 ……294
第五节 接点开关电路中迂回电路的诊断 ……300
习 题 ……303
参考文献 ……304

第一章 绪 论

第一节 图论的发展简史

在普鲁士的哥尼斯堡有一条河，河中有两个岛A和B，为了岛A和B与两旁的陆地C和D相连通，岛与陆地、岛与岛之间建有a，b，c，d，e，f和g七座桥，如图1—1所示。

有人曾提出了这样一个问题，一个人能否一次走遍两岛、两旁陆地和7座桥，而每座桥又只能经过一次呢？1736年瑞士数学家欧拉回答了这个问题。他提出了一篇论文，讨论了哥尼斯堡桥的问题，文章的结论是一个人不可能一次走遍两岛，两旁陆地和7座桥，而每座桥又只能经过一次。这是图论方面已知的最早的文章，人们认为图论由此发端。这个问题其实就是能否每条边不重复不遗漏地一笔画出一个图形的问题。至于为什么不可能呢？我们将在第二章中讲到。

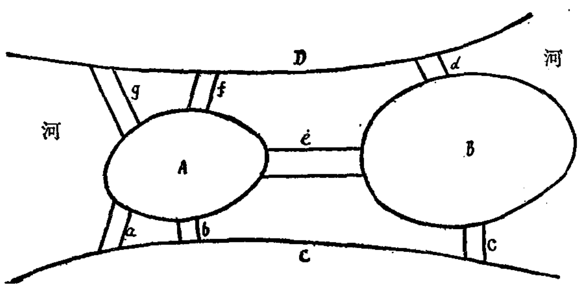


图 1—1

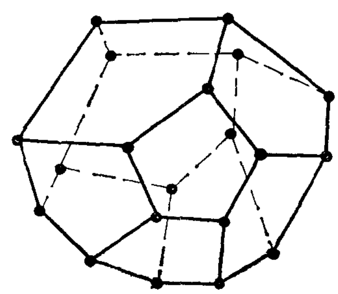


图 1—2

1847年克希荷夫应用图论的方法来分析电网络，奠定了现代网络理论的基础，这就是电工原理中的克希荷夫电流定律和克希荷夫电压定律。在1857年，凯莱在试算饱和碳化氢的同分异性体时，发现了“树”的概念。在这段时间里，对图论的发展另有两个里程碑。一个是莫别斯约于1840年提出一个“四色推测”，这个问题是说一幅地图只要用4种不同颜色着色，就可以使互相接壤的国家由不同的颜色来区分。(这个问题当时称为推测，一直到1976年才由美国一大学用电子计算机加以证明）。另一个是汉密尔顿于1859年发明了一个小玩具，这个玩具是一个木刻的正12面体，每面系正五角形，三面相交于一角，共有20个角，如图1—2所示。每角标有世界上一个重要城市。玩具提出一个谜，要求沿正12面体的边寻找一条路通过20个城市，而每个城市只通过一次，最后返回原地。此后约有半个世纪研究的人不多。直到1936年哥尼格发表了第一本图论专著，从此图论成为一门独立的学科。最近二三十年来，图论有了较大的发展，人们对线性图的理论研究和各方面的广泛应用进行了大量工作。

当应用图论来解决实际问题时，不管是电网络的分析，电路设计，数据的结构，或社会

科学方面的问题，几乎需要引出复杂的图形，这些图形，实际上如果没有电子计算机的帮助是不大可能分析的。近年来，大家所以对于图论研究的兴趣又高涨起来，高速数字计算机的出现是原因之一。

图论应用的范围很广，它不但能应用于自然科学，也能应用于社会科学。它非但广泛应用于电信网络、电力网络、运输能力、开关理论、编码理论、控制论、反馈理论、随机过程、可靠性理论、化学化合物的辨认、计算机的程序设计、故障诊断、人工智能、印刷电路板的设计、图案识辨、地图的着色、情报检索，也应用于诸如语言学、社会结构、经济学、运筹学、兵站学、遗传学等等方面。

图论应用范围虽然已经这样广泛，但是到目前为止，还有若干问题没有解决，相信通过对图论更深入的研究，图论必将得到更大的发展，它的应用范围将更为扩大。

第二节　集合论的一些基本概念

在日常生活和科学技术领域中，常常需要研究一类事物之间的相互关系，象球队和球队之间的竞赛关系；父母、兄弟或父子之间的亲属关系；电路的各个状态之间的相互转换关系等等。总之，研究一组事物之间的相互关系，我们抽象地用一组点来表示事物，用这些点间连接线表示事物与事物之间的相互关系。用这种方法研究一些具体问题的理论就是图论。

图论中常常把图看成一个抽象的代数系统，为此，图论也经常要用到代数学的一个重要基础——集合或组。我们在这里顺便介绍一些简单的集合论概念。图论常常用集合论中一些符号，为便利没有接触过集合论的读者，我们先介绍一些常用的符号。

集合是一种不可精确定义的代数学基本概念，一般只能给出直观性的描述。例如，甲工厂所属的全体车间是一个集合；称为甲厂车间集合；C地区全体工厂是一个集合，称为C地区工厂集合；整数的全体是一个集合，称为整数集合；而素数的全体称为素数集合。

集合中的每个成员称为元素，上面所说的那些集合中的车间、工厂、整数和素数都是集合中的元素。如果甲厂有a、b、c、d和e 5个车间，那么可以说元素a属于甲厂车间集合，记为

$$a \in \text{甲厂车间集合}$$

若另有一个f车间，它不是甲厂的一个车间，则f这个元素不属于甲厂车间集合，记为

$$f \notin \text{甲厂车间集合}$$

一般集合用大写英文字母，而元素则用小写英文字母。所以如果甲厂车间集合用S表示，则$a \in S$；$b \in S$；$c \in S$；$d \in S$；$e \in S$。这里需要说明一点，a、b、c、d、e这5个车间都是属于S这个集合的，而S是指甲厂中车间的集合，而不是指甲厂中其它别的什么。现在进一步来看看C地区，C地区有许多工厂，甲厂是其中的一个，假如这些工厂我们用S_1、S_2、S_3、S_4来表示，那么有

$S_1 \in C$；$S_2 \in C$；$S_3 \in C$；$S_4 \in C$这表明S_1、S_2、S_3和S_4 4个工厂都属于C地区的。

C地区车间的集合，是指由C地区各个工厂中的每一个车间为元素的集合。如果C地区这4个工厂中，S_1厂有5个车间；S_2厂有3个车间；S_3厂中有4个车间；S_4厂有7个车间，则C地区车间的集合就是指这19个车间。换言之，这19个车间都是C的一个元素，都属于C。若其中某个S_1厂含有a_1、b_1、c_1、d_1和e_1 5个车间，则元素a_1、b_1、c_1、d_1和e_1既属于S也属于C。于是定义S和C两个集合，如果S的每个元素都属于C集合的元素，则称S为C的

子集，即S包含于C中。根据这个定义，C本身也包含于C中，所以C也是C的子集，所以，子集S包含于C或等于C，因此记作

$$S \subseteq C$$

若S是C的子集，即$S \subseteq C$，而$S \neq C$，则称S为C的真子集或真子组，记为

$$S \subset C$$

显然，符号$\subset$意思指“包含”，而符号$\subseteq$有两重含义，既可“包含”，也可以“等于”。可见，真子集是指那些除集合本身以外的子集，真子集的元素必定比原集合的元素少。

上述集合C可以写成$C=\{(a, b, c, d, e), (f, g, h), (i, j, k, l), (m, n, o, p, q, r, s)\}$

由若干个集合组成的集合叫集体。C也是一个集体。

集合的表示方法一般有3种：

第一种称为描述法。就是在{　}内用一个句子来描述这个集合。例如：{甲厂全体车间}，{全体整数}。第二种称为列举法。列举法是将集合内的所有元素都列举在{　}内，并用逗号“，”隔开。例如：甲厂车间集合用S表示，甲厂的5个车间用a、b、c、d和e表示，则

$$S=\{a, b, c, d, e\} \tag{1—1}$$

又如整数集合用I表示

则

$$I=\{0, +1, -1, +2, -2, \cdots\cdots\} \tag{1—2}$$

第三种称为公式法

$$S=\{x \mid P(x)\} \tag{1—3}$$

式中　x是S的元素，这些元素满足$P(x)$条件，也就是说，若x_1代入$P(x)$，$P(x_1)$满足，或者说$P(x_1)$为真时，$x_1 \in S$。

例如

$$S=\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}$$

用公式法可以表示为

$$S=\{x \mid x \in I \wedge |x| \leqslant 3\}$$

式中I是整数集合，符号$\wedge$表示“与”运算。

第三节　图的定义

图是用来研究一组具体事物之间相互关系的抽象代数。用点表示事物，用边表示事物与事物之间的关系，则图就可以用如图1—3的图形来表示。

线性图，或简称图的最普通的表示法。其中用黑点表示顶点，以后简称点，用线段表示边，所以线性图就是点组、边组以及点组和边组的关系的集体。它可以定义为

$$G=(V, E, \Psi) \tag{1—4}$$

式中　$V=\{1, 2, 3\cdots\cdots n_v\}$——点的有限非空组；

$E=\{a, b, c\cdots\cdots n_e\}$——边的有限组；

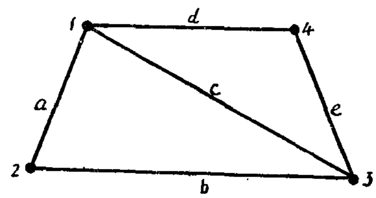


图　1—3

Ψ——V和E的对应关系，或称映射

向图。如果每条边上标有方向，如图1—4所示，这条边a称为有向边，有向边a的点1称为起点，点2称为终点。由有向边构成的图称为有向图，有向图中E和V的关系用Ψ表示，所以有向图的定义为

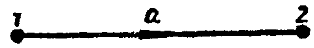


图 1—4

$$G=(V,\ E,\ \Psi) \tag{1—5}$$

在无向图（如图1—3）中，E和V的关系Ψ为

$$a\rightarrow(1,\ 2)$$
$$b\rightarrow(2,\ 3)$$
$$c\rightarrow(1,\ 3)$$
$$d\rightarrow(1,\ 4)$$
$$e\rightarrow(3,\ 4)$$

符号→表示边的两个端点在右边的（ ）中，它们不分起点和终点，所以a边也可以写为

$$a\rightarrow(2,\ 1)$$

由于图只是V，E，Ψ的集体，因此每条边的形状是无关紧要的，所以1与2之间的边不论用图（1—5）中任何一种方式表示都是一样的，我们关心的只是几个点，几条边以及边和点之间如何联接，至于这些边的直和曲，长和短都是可以任意选定的。例如在图1—6中，同样性质的图可以画成几种不同的形式，只要保持点和边关系不变。

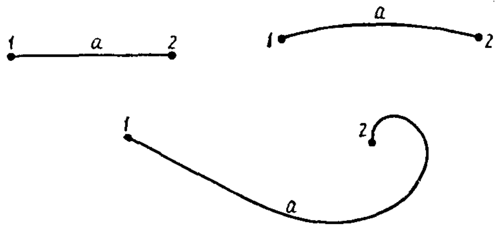


图 1—5

有向图的边是有向边，所以E和V的关系Ψ就不象无向图时两个端点可以任意调换，不分次序，图1—7就是一个有向图。

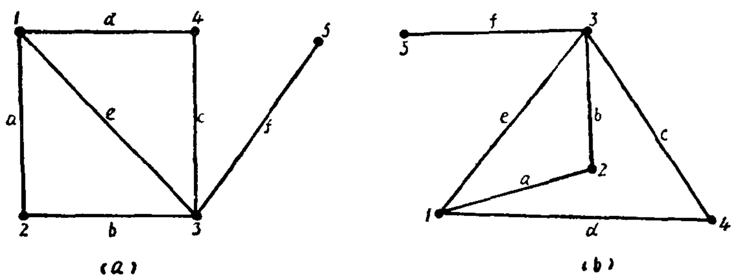


图 1—6

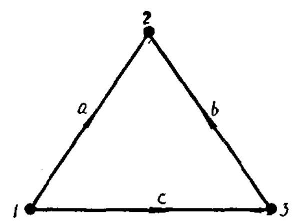


图 1—7

有向图G可以用下式表示

$$G=(V,\ E,\ \Psi)$$
$$V=\{1,\ 2,\ 3\}$$
$$E=\{a,\ b,\ c\}$$

Ψ为

$$a\rightarrow(1,\ 2)$$
$$b\rightarrow(3,\ 2)$$
$$c\rightarrow(1,\ 3)$$

式中 $e_K \to$ (起点，终点)

显然 $(1, 2) \neq (2, 1)$

通常图可化简为

$$G=(V, E)$$

如图1—3为

$$G=(V, E)$$
$$V=\{1, 2, 3, 4\}$$
$$E=\{(1,2),(2,3),(3,1),(1,4),(4,3)\}$$

而图1—7为

$$G=(V, E)$$
$$V=\{1, 2, 3\}$$
$$E=\{(1, 2), (3, 2), (1, 3)\}$$

在画图时两边相交，只要在相交处没有画黑点，那么点边的对应关系是不受影响的。例如，在图1—8中

图 1—8

图(a)中即使边a和b在图中是两线相交的，因为在相交处没有黑点，它们与点的对应关系还是

$$a \to (1, 3)$$
$$b \to (2, 4)$$

这就是说图a中只有两条边。可是在图(b)中，因为两线相交处画有黑点5，点边的对应关系就不同了，而有下列关系：

$$a \to (1, 5)$$
$$b \to (2, 5)$$
$$c \to (3, 5)$$
$$d \to (4, 5)$$

在我们对一个图下定义时，不一定要求组V和组E是有限的，但是要求组V不是空组。在理论和应用中，这些差不多都是有限的，有着有限点和有限边的图叫做有限图，否则就叫做无限图。图1—9是两个无限图的一部分。

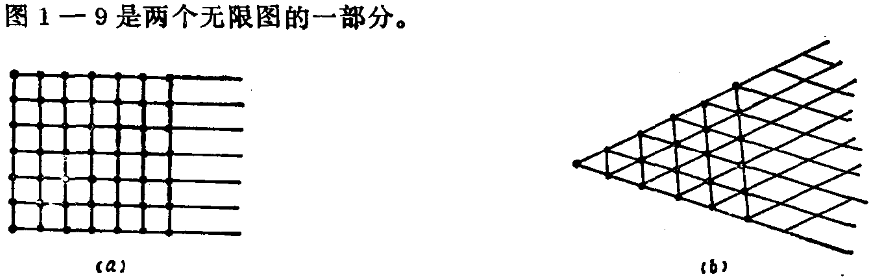


图 1—9

以后除非明确说明是无限图外，我们所研究的都是有限图，所以以后所讲的线性图总是有限图，因而不再加有限两字了。

第四节　关联和次数

如果某一个点是一条边的两个端点中的一个，我们把这条边与这个端点的关系称为关联，或者说这条边是与这个点相关联的，或者说它是连接到这一个点的。例如，图1—10中边a，b和c是与点1相关联的，而a，d，e和f是与点2相关联的。

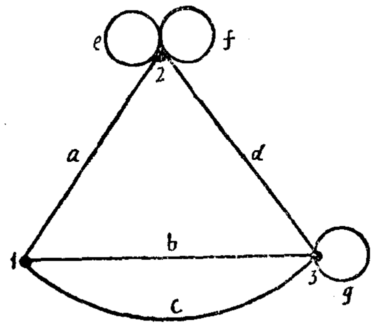


图　1—10

在图1—10中，边g的两个端点同是一个点3，这条边g就叫做自环，同样边e和边f也是自环。

在一对点之间可能连接一条以上的边。如图1—10中点1和点3之间有着两条边b和c，这两条边就称为平行边。

一个既没有自环，又没有平行边的图叫做简单图。例如图1—3和图1—6就是。

与每个点相关联或连接着的边数是图的一个很重要的数据。与一个点相关联的边数称为该点的次数。用数学方式来表达，可以$d(v)$代表v点的次数，$n(s)$代表与v相关联的自环数，n_n代表除自环外与点v相关联的边数，那么点v的次数为

$$d(v)=2n_s+n_n \qquad (1-6)$$

例如在图1—10中，点1的次数为$d(1)=3$，这是因为这个点的$n_s=0$，$n_n=3$。点2呢，因为$n_s=2$，$n_n=2$，所以$d(2)=6$。同样的算法，$d(3)=5$。

假设边e关联着点p和q（就是说边e的两个端点为p和q）。当$p\neq q$（即分别为两个点）时，我们计算$d(p)$和$d(q)$都是1。当$p=q$（即p和q同为一点）时，边e（e是自环）的$d(p)$就算做2。这对图中每条边都是正确的，因此一个图中所有各点的次数总和为图G的边数的两倍，即

$$\sum_{i=1}^{n_v} d(v_i)=2n_e \qquad (1-7)$$

式中$\sum_{i=1}^{n_v}$为图中所有点的总和，而n_e为图G中的边数，在图1—10中，共有7条边，即a、b、c、d、e、f、g，所以$n_e=7$。因此，$\sum_{i=1}^{n_v} d(v_i)=14$，这与上面计算的$d(1)+d(2)+d(3)=14$是相符的。

定理1—1：一个图中奇次数的点的数目总是偶数。

证：如果把一个图中奇次数和偶次数的点分开考虑，式（1—7）的左方可以分别写成为偶次数的点的次数与奇次数的点的次数和的总和，即

$$\sum_{i=1}^{n_v} d(v_i) = \sum_{e} d(v_j) + \sum_{o} d(v_K) \tag{1—8}$$

式中$\sum\limits_{e}$系偶次数的点的次数和，$\sum\limits_{o}$系奇次数的点的次数和。根据式（1—7），式（1—8）的左方应等于偶数，而右方第一项也是偶数，那么第二项也必定是偶数（偶数之和是偶数），即

$$\sum_{o} d(v_K) = \text{偶数} \tag{1—9}$$

因为式（1—9）中每一个$d(v_K)$是奇数，这个和项数一定是偶数才能使和成为偶数。▍

凡是一个图的各点的次数都相等（不管是偶数还是奇数），这种图就称正则图。

一个点而没有相关联的边的，称为孤立点。也可以说，一个点的次数为零的称为孤立点。例如，图1—11中的点6就是一个孤立点，它没有与之关联的边。

凡是次数为一的点称为悬挂点，也可以称为终点。关联到悬挂点的边称为悬挂边。图1—11中的点5就是悬挂点，而边e是悬挂边。

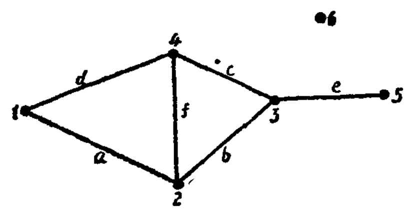


图 1—11

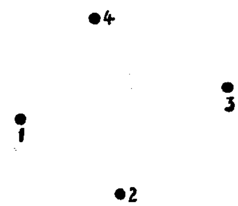


图 1—12

在第三节中，说到图的定义为$G=(V, E)$，其中边组E可能是空的或没有的。这种没有边的图就称为零图，有时也称为空图或空组或空集，符号为ϕ。换句话说，零图中的点都是孤立点。图1—12是一个有4个点的零图。零图虽然没有边但是不能没有点，所以图的点组V是不能等于ϕ的，否则就不成其为图了。所以，根据定义，一个图至少必须有1个点。有的图论书中，把既无边组又无点组的图称为零图，而把只有点而无边的图称为点图。

第五节　图论中的论证

逻辑中论证方式的核心是逻辑陈述。下面举三个等价陈述：

（一）如果H成立，那么C成立。

（二）$H \Rightarrow C$，符号$\Rightarrow$为蕴涵符，例如，$H \Rightarrow C$可以理解为H成立时，C必成立。

（三）H是C的充分条件。

其中H代表着作为假设的某种陈述，C是由H所得结论的陈述。例如

1. 如果甲是在珠穆朗玛峰，那么甲是在地球上的最高点。
2. 如果甲是在珠穆朗玛峰而不穿登山服，那么甲是很冷的。
3. 如果甲淹没在水中，那么甲便淹死。
4. 如果甲在经度$x°$，纬度$y°$，那么甲是在某城市中。

上述四种陈述在从假设而来的结论上是相似的，但是1.和4.不同于2.和3.。因为在1.和4.中，如果把假设与结果颠倒过来（即H与C相交换），就是把结论当作假设，那么把假设

作为结论也是成立的。这种可逆关系是以必要和充分条件为特征的，因此可用下面的不同的等价陈述：

（一）当且仅当H成立时，C成立。

（二）C成立的必要和充分条件是H。

（三）如果H成立，那么C成立，反之亦然。

（四）$H\Longleftrightarrow C$（$\Longleftrightarrow$称为等价符，两个命题H和C是等价的，就是说H和C都成立或都不成立）。

常常用于命题论证而不同于上述的两种陈述法的一种所谓否定陈述。如果把上面第一种陈述颠倒过来加以否定，则

（一）如果C不成立，那么H不成立。

（二）C不成立$\Rightarrow H$不成立。

（三）C不成立是H不成立的充分条件。

这种陈述是等价于上面第一种陈述的。如果这种陈述方式用上述的1.～4.作为例子，那么结果的否定陈述都是正确的。此外，必要和充分的陈述1.和4.对两种顺序（即假设与结论可以交换的）的否定陈述是正确的，而陈述2.和4.（充分的但不必要的）只对一种顺序的否定是正确的。在逻辑结构和论证技术中都假定着$H\Rightarrow C$，或C不成立$\Rightarrow H$不成立的任何一个蕴涵着另一个。因此，如果两者中任何一个可以证明是正确的，那么另一陈述也是正确的。

图论发展中的中心环节是以一个图或子图的某一或某些已知性质的逻辑陈述作为假设H，用它来证明一个图或子图的一个或更多的性质做为结论C。

论证技术的概要如下：

命题或逻辑陈述的基本形式为：

$H\Rightarrow C$，或$H\Longleftrightarrow C$。

（一）直接论证

1. 充分性的结论：假设了H的性质，从而证明了C的性质，就是假设H，证明C。

2. 必要性的论证：假设C，证明H。

（二）间接论证

1. 充分性的论证：假定C不成立，证明H不成立 。

2. 必要性的论证：假定H不成立，证明C不成立。

（三）反证法

这是为了证明某一命题是真而证明其反命题为谬的一种方法。

1. 充分性的论证：假定H成立和C不成立的条件，证明矛盾处。

2. 必要性的论证：假定C成立和H不成立的条件，证明矛盾处。

上面这三大类论证法都表明在论证中逻辑陈述所需完成的任务，但都没有表示出如何去达到这些逻辑陈述的论证。任何一个论证的最重要方面在于证明者的才能。下面四种方式可作为实现一个论证的指南。就是提供一些证明上述各种论证的方法。

（一）多重陈述法

根据已给假定的资料做出一系列的逻辑陈述来引导到所要证明的某一性质或某些性质。为了减少可能造成的误差，所做的陈述应该简短，当然必须是正确的。

（二）归纳法

1. 对于$n=1$或$n=N>1$，证明H（或C）$\Rightarrow C$（或H）。

2．对于 $n>1$ 或 $n>N$，H（或C）$\Rightarrow C$（或H）。

3．对于 $n+1$ 或$N+1$，证明H（或C）$\Rightarrow C$（或H）。

（三）存在法

这种方法的论证也许是最令人信服的。从H（或C）的资料出发，用一个实际的结构图表来说明产生C（或H）。

（四）穷举法或称完全归纳法

这种方法只适用于只有很少几个（2个、3个或4个）逻辑陈述的情况下，而且这些情况可以分别处理的。由于所观察的情况缺乏把握，这个方法势必冗长，而且不够明确。

对论证技术的概述方面，最后可注意的是：某个命题的陈述的反例可用以证明该命题的不成立。

习　题

1—1　画出具有1个点、2个点、3个点、4个点的简单图。

1—2（1）画出一个代表2幢房子和3个公用事业问题的图。

（2）画出一个代表4幢房子和4个公用事业问题的图（四个公用事业为水、煤气、电及电话）。

1—3　命名10种情况（比赛、活动、实际生活等）把这些借助于图表表示，解释点和边代表什么。

1—4　画出惠斯登电桥电路的拓扑图。

1—5　有一个迷宫如图1—13所示，用一个图代表这个迷宫，使点表示通道或表示堵住的一端（如数字），边代表两点间一条可能的路径。

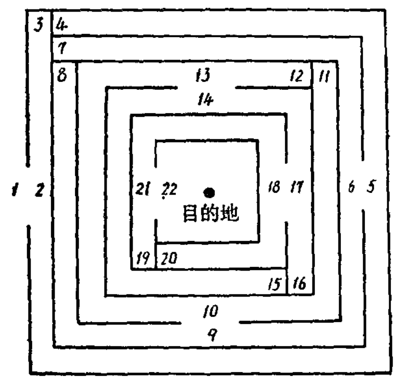


图　1—13

1—6　试确认具有n_v个点的简单图中任意一点的最大次数是n_v-1。

1—7　证明具有n_v个点的简单图中边的最大数目是$n_v(n_v-1)/2$。

1—8　5个朋友围着圆桌吃饭，希望每顿饭旁边坐着一个新邻居。问可能有几种排列？按顺时针次序标出每次排列的顺序。

1—9　画一个线性图（如果可能的话），在这个线性图中，点的次数是

（1）2，2，2，2，2。（2）2，3，4，5，6。（3）3，3，4，5，5，5，6。

1—10 试举出3个实例，说明可以用图论解决。