

应用机械 振动学

陈文一 张庸一 编 著

重 庆 大 学 出 版 社

应用机械振动学

陈文一 張庸一 編著

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书从质点振动开始,按照研究振动问题的思路,主要讨论了单自由度、双自由度和多自由度系统的线性振动。为了使读者深入了解线性振动的性质,还对非线性振动的性质作了简要介绍,最后结合各种方法讲述了电算。并附 Fortran-77 语言的程序和算例。本书可作为高等工科院校和工程技术人员进修班机械类专业的教材,也可作为青年教师和有关工程技术人员的参考书。

应用机械振动学

陈文一、张庸一 编著

责任编辑 朱庆祥 周任

重庆大学出版社出版

新华书店经销

重庆通信学院印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 19 字数: 474 千

1989 年 10 月第 1 版 1989 年 10 月第 1 次印刷

印数: 1—2500

标准书号: ISBN 7-5624-0156-X 定价: 3.78 元
O·25 (课)

常用符号表

符号	意 义
A	自由振动振幅、面积
B	强迫振动的稳态振幅
a, b, c	距离、长度
c	粘滞阻尼系数
D, d	直径
E	弹性模量
e	偏心距、自然对数底
F	力
f	频率、柔度影响系数
G	荷重、剪切弹性模量
g	重力加速度
H, h	高度
$I, (I_p)$	截面惯性矩、(截面极惯性矩)
i	$\sqrt{-1}$ 虚数
J	转动惯量
K, k	弹性元件的刚度系数, 即弹簧常数
k_{eq}	等效刚度系数
$L, k(l)$	长度(偏心距)
M	力矩、弯矩、扭矩
$M, m, (M_{eq})$	质量(等效质量)
P	力
$p(p_d)$	固有圆频率(衰减频率)
Q	荷重
q	广义坐标
R, r	半径
T	动能、拉力
T, t	时间
U	势能
V	体积
$v(v_0)$	速度(初速度)
W, w	重量
$X(X_N)$	振型(标准振型)
x, y, z	坐标, 位移分量或投影
$z(z_N)$	主坐标(标准坐标)
x_0, y_0, z_0	初位移在 x, y, z 轴上的投影

$\dot{x} \quad \dot{z} \quad \dot{y}$	速度在 x, y, z 轴上的投影
$\ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{z}$	加速度在 x, y, z 轴上的投影
α	初位相
β	动力放大系数
γ	频率比、重度
δ	变形、柔度系数、对数减幅系数
Δ	特征行列式
κ	阻尼比
η	传递率
Θ	角位移幅
$\theta \quad \dot{\theta} \quad \ddot{\theta}$	转角、角速度、角加速度
$\lambda, \tilde{\lambda}$	特征值
ρ	密度
τ	周期、时间
ϕ, φ	转角
$\dot{\varphi} \quad \ddot{\varphi}$	角速度、角加速度
ω	扰频、角速度

常用矩阵符号表

符 号	意 义
$0, \{0\}$	零列阵
a, a_1	待定系数列阵, 待定系数阵
B	特征值矩阵
B^a	B 的伴随阵
C	常系数列阵
$C, (C_N)$	阻尼阵 (振型阻尼阵)
F	柔度阵
G	重力阵
I	单位阵
K	刚度阵
M	惯性阵即质量阵
$P, \{P\}$	外力列阵
$Q(Q_N)$	振型阵、(标准振型阵)
$S, (\tilde{S})$	正 (反) 形式系统矩阵
S^*	振型清除阵
$X, \{X\}$	振型列阵
$\{x\}, \{\dot{x}\}, \{\ddot{x}\}$	位移、速度、加速度列阵
$\{z\}, \{\dot{z}\}, \{\ddot{z}\}$	在主坐标中的位移、速度、加速度列阵
ψ	假设模态矩阵
λ	特征值对角阵

在上述符号中, 凡有下脚标 N 者, 都表示在标准坐标中的相应矩阵, 如 $C_N, Q_N \dots$ 。

常用单位符号

- | 1. 长度 | 符号 |
|-------|---------------|
| 米 | m |
| 厘米 | cm |
| 毫米 | mm |
| 微米 | μm |
-
- | 2. 时间 | |
|-------|-----|
| 分 | min |
| 秒 | s |
-
- | 3. 质量 | |
|--------|-----|
| 千克(公斤) | kg |
| 吨 | t T |
-
- | 4. 平面角 | |
|--------|-----|
| 弧度 | rad |
| 度 | ° |
-
- | 5. 速度 | |
|-------|------|
| 米/秒 | m/s |
| 厘米/秒 | cm/s |
-
- | 6. 加速度 | |
|-------------------|-------------------|
| 米/秒 ² | m/s ² |
| 厘米/秒 ² | cm/s ² |
-
- | 7. 角速度、圆频率 | |
|------------|-------|
| 弧度/秒 | rad/s |
-
- | 8. 角加速度 | |
|-------------------|--------------------|
| 弧度/秒 ² | rad/s ² |
-
- | 9. 转速 | |
|-------|-------|
| 转/分 | r/min |
-
- | 10. 力 | |
|---------|----|
| 牛顿 (牛) | N |
| 千牛顿(千牛) | kN |
-
- | 11. 功与能 | |
|-------------|---------------|
| 牛顿·米(牛·米) | N·m |
| 牛顿·厘米(牛·厘米) | N·cm |
| 焦耳 | J (1J = 1N·m) |
-
- | 12. 力矩 | |
|--------|------|
| 牛顿·米 | N·m |
| 千牛·米 | kN·m |

牛顿·厘米 $N \cdot cm$

13. 工程频率

赫芝(次/秒) $Hz (1/s)$

14. 转动惯量

千克·米²(公斤·米²) $kg \cdot m^2$

千克·厘米²(公斤·厘米²) $kg \cdot cm^2$

15. 刚度

牛顿/厘米 N/cm

千牛/米 kN/m

16. 柔度

厘米/牛顿 cm/N

米/千牛 m/kN

绪 论

在日常的生活和生产活动中,经常看到物体的振动现象。例如运动场上秋千的摆动,汽车起动时发动机引起的车体颤动,地震……等等都是振动。在生产中由于种种原因,机床加工时可能发生工件振动、刀具崩刀、电机支座颤动、轴的扭转振动、弯曲振动等;除此之外,某些捣实、造型、清砂、送料……等机器也都以各种形式进行着振动。这些振动,从形式上看,有的是来回摆动,有的是往复直线运动,有的是旋转运动等等,种类很多,形式不一。但是它们都具有一个共同的特点,即物体在这运动过程中总是在它自己的平衡位置附近,一次又一次地、重复地运动着。我们把物体在其平衡位置附近所作的、重复性的运动,称为机械振动。

大家知道,汽车颤动,轻则使乘客感到不舒服,重则影响汽车正常行驶。机床振动或崩刀,不仅恶化加工表面质量,缩短机床和刀具的使用寿命,而且振动时产生的交变应力,有时会引起零件疲劳而发生破坏,有时甚至发生事故。总之,在机械工程的各领域内,广泛存在着机械振动的问题。常见的有下述各个方面:

机器上往复运动的部件,其不平衡质量的惯性力会引起振动。作旋转运动的部件,由于种种原因存在偏心,其离心惯性力也要引起振动。为了减小振动,在设计、制造、安装时,都要考虑到动平衡的问题。

当系统受到外界的干扰,如干扰的频率接近系统的固有频率,系统将产生剧烈振动。对于不是利用振动进行工作的机器,应在设计和使用中,加以防止。当轴的工作转速接近它的临界转速时,振动幅度很大。为了确保机器安全运转,设计时必须求出高速转子的临界转速,确定工作转速的范围。

要减小从机器传递出去的振动,或防止外界的振动传入精密设备中,必须配置各种隔振装置。如机器的振动超过允许的范围,则需采用减振措施。

避免金属切削过程的自激振动及系统的动力不稳定,也是振动中需要研究的问题。

利用振动原理,使机器进行有效地工作,自然是研究机械振动的一大问题。如在研制各种测量振动的仪器,输送、包装、捣实、磨碎……等等类型的振动机械中,也存在大量的振动问题。

此外,关于提高机器抗振能力,控制噪音……等等都有机械振动的问题。

综上所述,机械振动的问题多种多样。要了解、分析和处理这些问题,必须研究振动的性质,弄清振动的原因,找出振动的规律,确定振动的影响,并针对不同的情况,采取适当的措施,防止有害的一面,应用有利的因素,使它为人类服务。

机械系统为什么会振动呢?

我们观察在弹簧上悬挂的重物,可以知道,只要物体离开平衡位置,它将往复不断地振动。因为重物离开平衡位置后,由于弹簧的作用,产生一个使重物回到平衡位置的力(称为恢复力),促使物体向平衡位置加速运动。但是当物体回到平衡位置时,它具有了速度,因此重物必将按自己的惯性继续运动下去,于是又离开了平衡位置,周而复始地往复振动。由此

可知,凡是具有弹性和惯性的系统,都可能振动。所以弹性和惯性是弹性系统振动的特征。当然,某些非弹性系统,也可能形成其它形式的恢复力,引起振动(如单摆)。因为机件和结构都是弹性体,所以我们着重讨论弹性体的振动。由于弹性系统与非弹性系统的振动,具有共同的规律,有时也要提出来加以比较。

实际上的机械系统,都是非常复杂的,为了便于研究,必须抓住主要矛盾。将影响系统运动的重要特征加以突出,并按工程要求的精度,忽略次要因素,从而抽象出一个简化的理想模型。这样得到的简化模型,既反映了问题的本质,又简化了分析的方法,便于讨论,易于找出规律性的东西来。

例如图 1 (a) 为一悬臂梁。在梁的端点 B 上装一电机。由梁和电机组成的系统,其弹性和惯性都是连续分布的,应视为一连续系统。梁在电机的重力作用下产生了弯曲变形,其端点 B 的挠度 x 远大于电机本身的变形,而电机的质量又比梁的质量大得多,因此在研究这个系统作微小振动的问题时,可以忽略电机的变形和梁的质量,而只考虑梁的弹性(看成连续的片弹簧)和电机的质量(惯性),于是简化为图 1 (b)。如将梁的弹性用线弹簧表示,将电机的质量集中到振子上,并用质点表示,就得到由两个元件——弹性元件和惯性元件——组成的系统如图 1 (c) 所示,并称为弹簧-质量系统。这个简化模型中的振子及系统的位置,只需用一个坐标 x 表示,因此是单自由度系统。

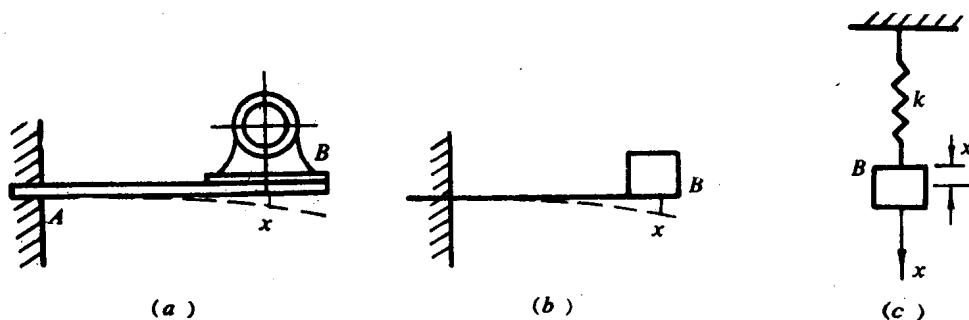


图 1

又如在粗略地研究汽车的振动时,可认为车身在铅垂方向振动,于是可将图 2 (a) 简化为图 2 (b) 所示的单自由度的简化模型。如果汽车的摆动较大,不可忽略时,车身位置由其质心的坐标 x_c 和转角 θ 两个独立参数决定,其简化模型如图 2 (c) 所示,为具有两个自由度的系统。如要求的精度提高,还应将车轮看成振体,车胎视为弹簧,于是得到图 2 (d) 所示的模型,它具有四个自由度。如果还要进一步提高研究的精度,应再考虑前后桥的振动,则系统就具有更多的自由度。总之,应按要求,突出重点,将一个连续系统的质量和弹性分别集中,就可简化为几个自由度的离散系统了。

任何结构物在振动过程中,它的外部和内部都有阻力作用(如空气阻力、分子间的摩擦等)。故在抽象的理想模型中,除了惯性元件和弹性元件之外,有时还应加入阻尼元件。因此可用惯性、弹性和阻尼三者来描述振动系统本身的动态特性。

一般说来,作用在振动系统上的弹性力、阻尼力和惯性力与系统的位移、速度和加速度有关,其间的关系,比较复杂,分析研究这样的系统,非常困难。到目前为止,还没有一般的数学解法。幸好工程实际中的振动问题,大多数是微小振动,工作范围在弹性极限之内,

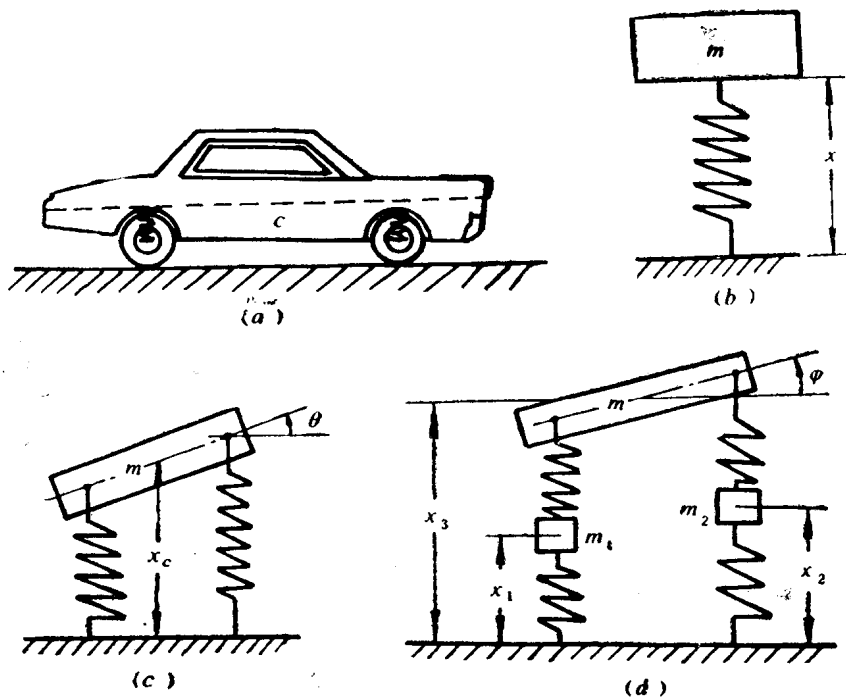


图 2

可以认为弹性力与位移成比例，惯性力与加速度成比例，如阻尼力也可视为速度的一次函数，则系统的振动，可用线性微分方程来描述，因此将这样的系统叫做线性系统。如果振动的范围超出线性关系存在的范围，或者阻尼力、弹性力不是速度、位移的一次函数时，必须用非线性微分方程来描述，这种系统叫非线性系统。我们主要讨论线性系统的振动，关于非线性系统，只作简单介绍。

要研究分析系统的机械振动，必须将振动的大小、快慢，用运动的量度表示出来。在幅值的范围内我们用运动的位移、速度或加速度（角位移、角速度或角加速度）的最大值表示振动量的大小，如为多自由度的系统，还要用振型来表示各广义坐标相对位移的关系。在各相应的频率范围内则用频谱表示各振动谐量的大小。至于振动的快慢，则用频率或周期来衡量。在线性系统中，多个振动的合成还与振动的相位有关。所以振动量（位移、速度或加速度）、频率（或周期）、位相，振型和频谱等常用来表示系统振动的基本特性。

系统在力或位移与初速度等的扰动（又称为激励）下所产生的振动，称为系统对激励的响应。

固有频率是振动系统本身最重要的一个特征，它不但表示振动的快慢，而且在某些情况下，系统的振动量也和它有密切的关系，此外还可用它来判别某些振动的类型，故应特别重视。另外，工程结构总要求在可能的振动中安全可靠地工作，因此还需研究系统对激励的响应。我们把由于初位移、初速度的干扰而激励起系统的响应，称为自由振动。由外力引起和控制的振动称为强迫振动。

本书将从研究系统的运动规律出发，讨论自由振动和强迫振动的特性。在着重研究了系统的固有频率和给定激励引起系统的响应后，才讲述有关的应用。

前 言

本书是作者在原大连工学院讲授“机械振动”课所编讲义的基础上修订而成的，可作为高等工科院校和工程技术人员进修班机械类各专业学习50学时的教材，同时也是教师和工程技术人员学习机械振动的参考书。

本书特点：

1. 主要讨论单自由度、双自由度和多自由度系统的线性振动。理论与应用并重。为使读者深入了解线性振动的性质，不致发生误会，还对非线性振动的性质作了简要介绍。

2. 为了使读者便于学习，本书从质点振动开始，按照研究振动问题的思路，逐步展开。对概念和理论的叙述以及数学工具的应用，都采取由浅入深、循序渐进，逐步深化的方法，并配合较多的例子阐明概念和理论的应用，在必要之处配合适当的小结。同时还结合一些工程实例，说明抽象、简化的原则和工程中具体处理振动的方法。

3. 作者希望读者学完本书后能达到在工程中应用的目的，省去了弹性体的振动，着重讲述离散的多自由度系统的理论，和在工程中应用的近似解法，如目前广泛应用的子空间叠代法、传递矩阵法等行之有效的方法。

最后结合前述各种方法讲述了电算。并附Fortran-77语言的程序和算例。

如读者需要，云南工学院可提供储存本书中各个程序的软盘，作计算实习之用。

为使自学的读者深入掌握本书内容，有些部份介绍了几种解法，并备有丰富的例题。如由教师讲授，可根据学生水平，酌情删减。如自学的读者不熟悉拉格兰日方程，可暂时不看，自己用动力学的方法建立方程，并不妨碍对本书内容的了解。

本书由陈文一主编，并写了前五章。第六章由张庸一编写。

大连工学院理论力学教研室大多数同志，在使用本书初稿时提过很多建设性的宝贵意见，最后由姜际升教授审核定稿，特此向他们表示衷心感谢。

由于作者的水平和经验有限，本书一定还存在很多缺点和不足之处，希望使用本书的教师和读者批评指正。

目 录

绪论	(1)
第一章 单自由度系统的自由振动	(1)
§1.1 质点的自由振动	(1)
§1.2 轮轴的扭转振动	(6)
§1.3 能量法	(8)
一、能量方程式	(8)
二、弹性元件的等效质量	(12)
三、等效弹性元件	(15)
§1.4 衰减振动	(20)
一、小阻尼的情况	(21)
二、大阻尼的情况	(23)
三、临界阻尼的情况	(24)
习题一	(27)
第二章 单自由度系统的强迫振动	(31)
§2.1 简谐激励引起的强迫振动	(32)
一、强迫振动的规律	(32)
二、强迫振动的特性	(34)
三、强迫振动的复数解法	(36)
§2.2 隔振的理论基础	(44)
一、主动隔振	(44)
二、被动隔振	(46)
§2.3 转轴的临界转速	(49)
§2.4 周期性激励引起的强迫振动	(52)
一、付氏级数	(52)
二、系统对周期性激励的稳态响应	(54)
§2.5 任意激励引起的强迫振动	(60)
一、脉冲函数	(60)
二、脉冲力引起的响应	(61)
三、系统对任意力的响应	(61)
习题二	(66)
第三章 双自由度系统的振动	(73)
§3.1 作用力方程 刚度阵和惯性阵	(73)
一、作用力方程	(74)
二、刚度阵	(75)

三、惯性阵	(80)
§3.2 位移方程 柔度矩阵	(83)
一、位移方程	(83)
二、柔度阵	(85)
§3.3 自由振动	(89)
一、主频率	(91)
二、主振型	(92)
三、系统的响应	(93)
§3.4 强迫振动	(102)
一、粘滞阻尼系统的强迫振动	(102)
二、无阻尼系统的强迫振动	(103)
§3.5 吸振器	(107)
习题三	(110)
第四章 多自由度系统的振动	(118)
§4.1 多自由度系统的运动微分方程式	(119)
§4.2 无阻尼自由振动的特征值问题	(121)
一、主振型方程式	(122)
二、特征值和特征矢量	(122)
三、自由振动的运动规律	(124)
§4.3 主振型的正交性	(136)
一、主振型的正交性	(136)
二、等频率系统的主振型	(139)
§4.4 主坐标	(143)
一、广义质量和广义刚度的对角阵	(143)
二、用主坐标表示的运动微分方程式	(144)
三、振型的标准化	(146)
四、标准坐标表示的运动微分方程式	(145)
五、截断振型	(146)
§4.5 系统对初始激励的响应	(148)
§4.6 无阻尼系统的强迫振动	(154)
§4.7 粘滞阻尼系统的强迫振动	(160)
习题四	(165)
第五章 求多自由度系统特征值的近似解法	(172)
§5.1 矩阵叠代法	(172)
一、求基频与第一振型	(172)
二、收敛快慢的讨论	(174)
三、振型清除阵	(174)
§5.2 半定系统的解法	(179)
§5.3 瑞利法	(181)

一、瑞利商	(181)
二、瑞利商的稳定性	(182)
三、第二瑞利商	(183)
四、瑞利法在梁作弯曲振动中的应用	(185)
§5.4 李茨法	(188)
§5.5 子空间叠代法	(195)
§5.6 传递矩阵法	(199)
一、轴的扭转振动	(200)
二、梁的弯曲振动	(208)
习题五	(215)
第六章 用电子计算机解振动问题	(217)
§6.1 单自由度线性系统的响应	(217)
分段常力作用下的响应	
§6.2 多自由度系统的特征对	(220)
一、矩阵叠代法	(220)
二、子空间叠代法	(229)
§6.3 粘滞阻尼系统对激励的响应	(237)
一、阻尼系统的标准化	(238)
二、阻尼系统对初始激励的响应	(243)
三、阻尼系统对简谐激励的稳态响应	(248)
§6.4 用传递矩阵法求链状结构的特征对	(253)
一、轮轴系统的扭转振动	(254)
二、梁的弯曲振动	(259)
非线性振动简单介绍	(268)
附录	(272)
(I) 主元消去法解线性方程组和求逆矩阵	(272)
(II) 一维存储的对称变带宽线性代数方程组系数阵的三角化	(274)
(III) 变带宽线性代数方程组回代求解	(276)
(IV) 将广义对称特征值问题 $\mathbf{K}\mathbf{A} = p^2 \mathbf{M}\mathbf{A}$ 化为标准型	(277)
(V) 用正交相似变换将实对称阵化简为对称三角阵	(279)
(VI) 求对称三角阵的特征值和特征向量	(281)
(VII) 特征矢量的反变换	(284)
(VIII) 矩阵乘法	(285)
(IX) 二分法试根	(286)

第一章 单自由度系统的自由振动

前面已经谈到,在研究振动问题时,常常需要按工程要求的精度,抽象为一个合理的简化模型。最简单的模型是单自由度系统。通过对它的研究,可以解释机器中的共振现象、振动仪器的工作原理以及隔振的概念。对于复杂系统的振动也可获得初步的认识。除此之外,由于应用振型分析法,可将多自由度系统振动的微分方程组,化为一组分别独立的运动微分方程,而每一方程的数学结构都与单自由度系统的微分方程相同。因而需要仔细研究单自由度系统。

在本章将讨论自由振动的问题,第二章将讨论有关强迫振动的问题。

§1.1 质点的自由振动

现在要讨论图1.1-1(a)所示的理想模型:弹簧-质量系统的振动。

振子 M 重 W , 悬挂在螺旋弹簧上, 弹簧原长 l_0 。当振子静止悬挂时, 弹簧的静伸长为 δ_{st} , 由虎克定律知:

$$W = k \cdot \delta_{st} \quad (1)$$

式中, k 为使弹簧产生单位伸长(或缩短)时所需的力, 称为弹簧常数或弹簧刚度系数, 其量纲为[力/长度]。在国际单位制中, 力的常用单位为牛顿(N)、千牛顿(kN), 长度的常用单位为厘米(cm)或米(m), 弹簧常数的常用单位为[N/cm]或[kN/m]。

设选用 n 圈平均直径为 D 的螺圈弹簧, 其钢丝直径为 d , 剪切弹性模数为 G 时, 由材料力学弹簧扭转变形公式

$$\delta = \frac{P \cdot 8nD^3}{Gd^4} = \frac{P}{k} \text{ [见表1.3-1(6)] 得弹簧常数:}$$

$$k = \frac{Gd^4}{8nD^3} \quad (2)$$

当振子 M 离开其平衡位置后, 它在重力与弹簧力作用下运动。如以振子运动的直线轨迹为 x 轴, 静平衡位置为原点 O , x 轴向下为正, 振子在运动过程中的任意正位置为 M , 于是 $\overline{OM} = x$ 。这时弹簧的总伸长为 $\delta = \delta_{st} + x$, 弹簧力的大小 $F = k(\delta_{st} + x)$, 其方向指向原长的位置。[见受力图: 图1.1-1(b)]。如用 $\ddot{x}$ 表示 $\frac{d^2x}{dt^2}$ (加速度) 于是按牛顿第二定律有:

$$\frac{W}{g} \ddot{x} = W - F = W - k(\delta_{st} + x)$$

将上式中振子的质量 $\frac{W}{g}$ 用 m 代换, 并经过移项后得:

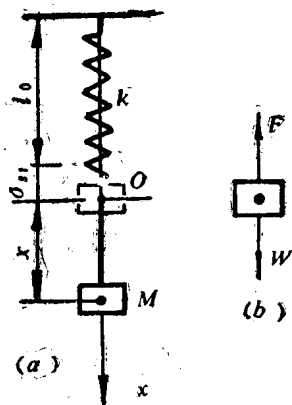


图 1.1-1

$$m\ddot{x} + kx + k\delta_{st} - W = 0 \quad (3)$$

上式中的弹簧力共分两部分：一部分是由运动位置变化引起的，其大小为 kx ，当振子离平衡位置越远， x 越大，企图恢复到平衡位置的力 kx 也越大，所以这一部分就是恢复力；另一部分由振子加在弹簧上的静伸长所引起的，它的大小为 $k\delta_{st}$ ，方向与重力相反。换句话说，它与重力始终平衡。因此在以后的讨论中，我们总选平衡位置为原点，振子的坐标自然就表示从原点到振子的位移，于是便可以不再考虑静变形的弹簧力和重力了。今将(1)式代入(3)式得：

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (4)$$

系统在 $t = 0$ 时受外界的影响获得了初位移 x_0 和初速度 v_0 。(我们将开始时具有 x_0 和 v_0 的扰动称为初始激励)。在 $t > 0$ 后，除恢复力外，无外力作用，如(4)式的运动微分方程式所示。在这种情况下，系统将产生自由振动。式(4)中的 k 和 m 都是正值，其比值不能为负，令其等于 p^2 ，于是

$$\left. \begin{aligned} p^2 &= \frac{k}{m} \\ p^2 &= \frac{kg}{W} = \frac{kg}{k\delta_{st}} = \frac{g}{\delta_{st}} \end{aligned} \right\} \quad (1.1-1)$$

或写为

用 m 除(4)式后，将(1.1-1)第一式代入其中，得自由振动的标准运动微分方程式

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \quad (1.1-2)$$

这是二阶线性常系数齐次微分方程式。由微分方程知，它的通解为

$$x = c_1 \cos pt + c_2 \sin pt \quad (5)$$

式中 c_1 和 c_2 是积分常数，可由初始条件求出。为了求出积分常数，将(5)式对时间求导数，得振子的速度

$$\dot{x} = -c_1 p \sin pt + c_2 p \cos pt \quad (6)$$

设开始计算时 $t = 0$ ，振子的初位置 $x = x_0$ ，初速度 $\dot{x} = \dot{x}_0$ 。将这些条件代入(5)和(6)式，求得：

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = \frac{\dot{x}_0}{p}$$

再代回(5)式，得自由振动的规律：

$$x = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt \quad (1.1-3)$$

或称为由初激励所引起的响应。因为上式中的两个简谐函数的频率同为 p ，故(1.1-3)式可写为

$$x = A \sin(pt + \alpha) \quad (1.1-4)$$

或写为

$$x = A \cos(pt - \beta) \quad (7)$$

将上二式的三角函数展开，与(1.1-3)式比较，即可求出 A ， α ， β 等常量之值。

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{p^2}} \quad (1.1-5)$$