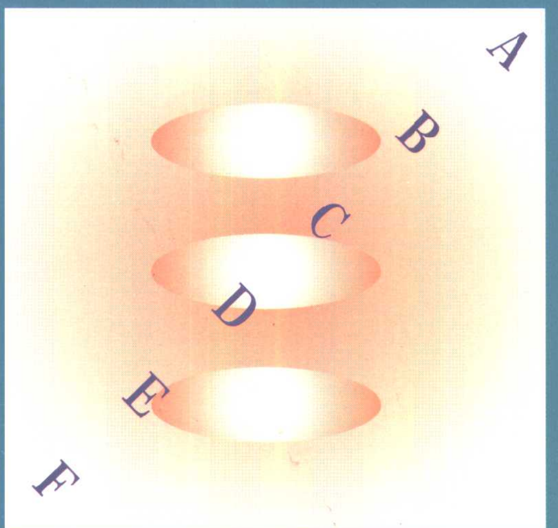
高等教育学历文凭考试计算机专业辅导教材

离散数学

习题与解析

檀凤琴 何自强 编著



科学出版社
www.sciencep.com

高等教育学历文凭考试计算机专业辅导教材

离散数学习题与解析

檀凤琴 何自强 编著

科学出版社

2002

序

高等教育学历文凭考试是国家对尚不具备颁发国家承认学历的民办学校所招收的学生,检验其接受高等教育结果的一种验收性考试。1993 年北京市在全国率先试点,目前已走过 10 年的历程。这 10 年来,北京 20 余所民办学校共计招生近 20 多万人,目前累计毕业生 1 万多人。为国家的经济建设和社会稳定起到了积极的作用。

为做好高等教育学历文凭考试试点的基础工作,1998 年,北京市自学考试办公室聘请一批专家为计算机应用专业编写了一套教材,并委托科学出版社出版。几年来,在不断征求意见、不断改进完善的基础上,这套教材被几十所学校持续使用并得到了大家的认同。教材稳定后,应授课教师和同学们的要求,科学出版社希望再组织编写一套教学参考书。我们希望这套参考书能达到这样一种目的:

1. 它是按照教学大纲的内容,提纲挈领地把全书的内容进行提炼,这样可以使教者和学者对教与学的要求一目了然;

2. 它不应是教材的浓缩本,而是结合实例指出和分析各章节的难点,并提出合理的学习方法,以起到指导学习的作用;

3. 为配合学习与课下的练习,本书应配置一定的习题并附参考答案。

非常感谢的是,本套教学参考书的编者——也就是教材的各位编写老师们——在学校繁重的教学和科研工作中,对出版社的建议给予了积极的响应。他们对本套教学参考书的编写提出了很多好的意见,使得本套书更具有针对性和实用性。希望通过出版社和编者的努力,能使大家更好地掌握课程的基本内容和基本技能。

需要强调的是,掌握正确的学习方法是非常重要的。本套教学参考书与主教材是相辅相成的,它对主教材的内容进行了简明扼要的介绍,从而能起到辅助学习的作用,但是它并不能替代主教材。这一点希望大家在使用时充分注意。

北京市高等教育自学考试委员会办公室

2002 年 4 月 3 日

前　　言

离散数学作为高等学校计算机专业的重要专业基础课，要求学生系统地掌握基本概念、理论、算法，以及逻辑推理的形式描述、基本的证明和验证方法，并能灵活地运用这些知识，处理一些简单的实际问题。由于离散数学内容丰富，涉及到数学的多个学科，研究对象及研究方法都不同于高等数学，而且概念多，内容抽象，使得相当多的初学者感到学好它很困难，特别是在解题时常常感到无从下手。因此，要学好这门课程，除了课堂教学外，课后还必须做适量的习题来帮助深入理解和掌握有关内容，以便巩固所学的知识。为了给读者提供学习和解题方法的指导，我们编写了这本书。

本书是与科学出版社出版的高等教育学历文凭考试计算机专业教材《离散数学》相配套的辅导教材，内容也是按照教材对应章节先后次序安排的。书中的习题解答部分早在《离散数学》出版时就已完成，只是作者一直顾虑，有了详尽的习题解答，是否会给某些学生做习题带来干扰，影响本课程的教学，所以本书迟迟未能出版。在广大读者的要求和有关部门的大力协助下，我们终于决定出版该书。希望读者务必先学习教材，独立完成作业后，再以此书作为学习参考书。

本书的结构是按章划分，每章分为三部分。第一部分是内容概述，其中包括知识点、重点、难点、内容提要。它是相应章节的概括，是对教学大纲和考试大纲所要求掌握的、解答习题所涉及的概念、理论、算法、方法的总结，也可以说是一个复习提纲。它便于读者在学习中提纲挈领地掌握所学内容。第二部分是范例解析，为一些典型题、难题提供了解题思路和方法。每一例都有分析和详细解答，有的是一题多解。我们希望在解题技巧、拓广思路方面对读者有所帮助，以使读者逐步提高分析问题和解决问题的能力。第三部分是习题解答。它对教材中的每一道习题都给出了详细的解题过程和答案，以便自学者在做完习题后对照检验。本书最后附有 1997 年至 2001 年北京市高等教育学历文凭考试离散数学试题及其解答，供读者查阅与参考。

值得指出的是，很多习题的解答是不惟一的，我们的解答虽然力图详尽、正确、精练，但不一定是最好的解答，希望广大读者能提供更精巧的解法。

本书是一本内容比较丰富的离散数学辅助教材，它不仅包括了每一章的内容提要和习题解答，而且还概括了每一章的知识点、重点、难点，增加了范例解析，并为读者解某些典型题、难题开拓解题思路，提供解题方法和技巧。本书既可以作为北京市高等教育学历文凭考试计算机专业离散数学课程的辅助教材，也可以作为高等学校计算机专业离散数学课程的学习参考书，以及广大离散数学读者的学习参考资料。

全书共分九章，其中第一、二、五、六章由何自强撰写，第三、四、七、八、九章由檀凤琴撰写。由于作者水平所限，加之时间仓促，书中难免有不妥或错误之处，恳请读者批评指正。

作　者

2002 年 2 月

目　　录

第一章　命 题 逻 辑

1.1　本章内容概述

【知识点】

1. 命题与联结词
2. 命题公式与赋值
3. 等值演算
4. 联结词的全功能集
5. 主析取范式与主合取范式
6. 命题逻辑的推理理论

【重点】

• 命题和联结词，常用联结词的真值表，命题符号化。

• 公式和赋值的定义，永真式、永假式、可满足式的定义，列公式的真值表，用真值表求公式的成真赋值和成假赋值。

• 两个公式等值的定义，常用等值式，用等值演算证明两个公式等值，用等值演算解决实际问题。

• 联结词的全功能集和极小全功能集的定义。

• 析取范式、合取范式、主析取范式、主合取范式的定义，用等值演算和真值表求公式的主析取范式、主合取范式。

• 判断公式的类型（用真值表、等值演算、主析取范式或主合取范式判断公式是不是永真式、永假式、可满足式）。

• 逻辑推论的定义，判断推理的正确性，构造推理的证明。

【难点】

• 正确地进行命题符号化，尤其是正确地使用蕴涵联结词→以及两个表达“或”的联结词$\vee$和$\overline{\vee}$。

• 判断公式的类型，判断等值式是否成立，判断逻辑推论关系是否成立。

• 求公式的主析取范式和主合取范式。

• 构造推理的证明（包括使用附加前提证明法、归谬法）。

【内容提要】

命题　自然语言将命题表达为具有确定真假意义的陈述句。若该语句表达的意义符合事实，就称其为真命题。若该语句表达的意义不符合事实，就称其为假命题。我们用 0

表示假命题,用 1 表示真命题。

真值集合 称{0,1}为真值集合,并称 0 和 1 为真值,称假命题的真值为 0,真命题的真值为 1。

简单命题 简单陈述句表达的命题称为简单命题或原子命题。命题逻辑不再进一步分析简单命题的内部结构,用小写英文字母 p,q,r,s,t 等表示简单命题。

联结词 真值函数,即自变量是真值,函数值也是真值的函数,称为联结词。

复合命题 由命题和联结词构成的命题称为复合命题,其中的命题称为该复合命题的支命题。复合命题的真值由支命题的真值和联结词共同决定。

真值表 把真值函数在自变量一切可能取值下的函数值列成的表称为该真值函数(联结词)的真值表。n 元联结词的真值表有 2^n 行,有 2^{2^n} 个不同的 n 元联结词。

引进六个特定的符号来表示六个常用联结词,它们是$\neg$(否定),$\vee$(析取),$\wedge$(合取),$\overline{\vee}$(异或),$\rightarrow$(蕴涵),$\leftrightarrow$(等价)。这六个联结词的真值表如表 1.1 和表 1.2 所示。

表 1.1 一元联结词$\neg$的真值表

p	$\neg p$
0	1
1	0

表 1.2 二元联结词$\wedge,\vee,\overline{\vee},\rightarrow,\leftrightarrow$的真值表

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\overline{\vee} q$	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

命题变元 取真值,即 0 和 1 为值的变元称为命题变元。命题变元也称为命题变项,用带或不带下标的小写英文字母 p,q,r,s 等表示。表示假命题的 0 和真命题的 1,我们称其为命题常元。

命题公式 命题公式定义如下:

(1) 命题变元和命题常元是命题公式;

(2) 如果 A 是命题公式,则$(\neg A)$是命题公式;

(3) 如果 A 和B 是命题公式,则$(A\wedge B)$,$(A\vee B)$,$(A\overline{\vee}B)$,$(A\rightarrow B)$,$(A\leftrightarrow B)$是命题公式;

(4) 只有有限次使用上面三条规则能够得到的符号串才是命题公式。

在第一章中,将命题公式简称为公式。若公式 B 是公式A 的子串,则称 B 为A 的子公式。

赋值 设 $p_1,\cdots,p_n$ 是公式A 中出现的所有命题变元,为 $p_1,\cdots,p_n$ 指定的一组真值称为对 A 的赋值。

成真赋值 若指定的一组真值使 A 成为真命题,则称这组值为 A 的成真赋值。

成假赋值 若指定的一组真值使 A 成为假命题,则称这组值为 A 的成假赋值。

永真式 如果公式 A 的每个赋值都是成真赋值,则称 A 为永真式,也称为重言式。

永假式 如果公式 A 的每个赋值都是成假赋值,则称 A 为永假式,也称为矛盾式。

可满足式 如果公式 A 的赋值中至少有一个是成真赋值,则称 A 为可满足式。

可以通过公式 A 的真值表判断A 是不是永真式、永假式、可满足式。如果 A 的真值

表的最后一列都是 1,则 A 是永真式;如果 A 的真值表的最后一列都是 0,则 A 是永假式;如果 A 的真值表的最后一列中既有 1,又有 0,则 A 是非永真的可满足式。

等值 如果公式 $A\leftrightarrow B$ 是永真式,则称公式 A 和 B 等值,也称 A 和 B 逻辑等价,记为 $A\Leftrightarrow B$。

双重否定律 $A\Leftrightarrow\neg\neg A$

幂等律 $A\vee A\Leftrightarrow A$ $\quad A\wedge A\Leftrightarrow A$

交换律 $A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$ $\quad A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$ $\quad A\overline{\vee}B\Leftrightarrow B\overline{\vee}A$

结合律 $(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$

$(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$

$(A\overline{\vee}B)\overline{\vee}C\Leftrightarrow A\overline{\vee}(B\overline{\vee}C)$

分配律 $A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

$A\wedge(B\overline{\vee}C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\overline{\vee}(A\wedge C)$

吸收律 $A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$ $\quad A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$

德·摩根律 $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$ $\quad \neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$

零律 $A\vee 1\Leftrightarrow 1$ $\quad A\wedge 0\Leftrightarrow 0$

同一律 $A\vee 0\Leftrightarrow A$ $\quad A\wedge 1\Leftrightarrow A$ $\quad A\overline{\vee}0\Leftrightarrow A$

排中律 $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$

矛盾律 $A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$

蕴涵等值式 $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$

等价等值式 $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$

异或等值式 $A\overline{\vee}B\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)$

假言易位 $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$

置换规则 设公式 B 是公式 A 的子公式,C 是与 B 等值的公式,则用 C 置换 B 在 A 中的出现得到的公式与公式 A 等值。

可以用真值表或等值演算判断两个公式是否等值。

可以用真值表或等值演算判断一个公式是不是永真式或永假式。公式 A 是永真式的充分必要条件是 $A\Leftrightarrow 1$,公式 A 是永假式的充分必要条件是 $A\Leftrightarrow 0$。

设 F 是 n 元联结词,$p_1,\cdots,p_n$ 是不同的命题变元。如果公式 A 中不出现除 $p_1,\cdots,p_n$ 之外的命题变元,并且 $F(p_1,\cdots,p_n)\Leftrightarrow A$,则称公式 A 定义联结词 F。

设 S 是由联结词组成的集合,F 是联结词。如果存在仅出现 S 中联结词的公式定义 F,则称 F 可由 S 定义。

全功能集 如果每个联结词都可由联结词集合 S 定义,则称 S 为全功能集。

文字 命题变元及其否定统称为文字。如果一个文字恰为另一个文字的否定,则称它们为相反的文字。

简单析取式 如果 $A_1,\cdots,A_n$ 都是文字,则称 $A_1\vee\cdots\vee A_n$ 为简单析取式。

简单合取式 如果 $A_1,\cdots,A_n$ 都是文字,则称 $A_1\wedge\cdots\wedge A_n$ 为简单合取式。

析取范式 如果 $A_1,\cdots,A_n$ 都是简单合取式,则称 $A_1\vee\cdots\vee A_n$ 为析取范式。

合取范式 如果 $A_1,\cdots,A_n$ 都是简单析取式,则称 $A_1\wedge\cdots\wedge A_n$ 为合取范式。

极大项 设 $p_1,\cdots,p_n$ 是不同的命题变元，$A_1,\cdots,A_n$ 是文字。如果每个 A_i 是 p_i 或 $\neg p_i$，则称简单析取式 $A_1 \vee \cdots \vee A_n$ 为关于 $p_1,\cdots,p_n$ 的极大项。

极小项 设 $p_1,\cdots,p_n$ 是不同的命题变元，$A_1,\cdots,A_n$ 是文字。如果每个 A_i 是 p_i 或 $\neg p_i$，则称简单合取式 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$ 为关于 $p_1,\cdots,p_n$ 的极小项。

主析取范式 如果 $A_1,\cdots,A_m$ 是关于 $p_1,\cdots,p_n$ 的不同极小项，则称 $A_1 \vee \cdots \vee A_m$ 为关于 $p_1,\cdots,p_n$ 的主析取范式。

主合取范式 如果 $A_1,\cdots,A_m$ 是关于 $p_1,\cdots,p_n$ 的不同极大项，则称 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_m$ 为关于 $p_1,\cdots,p_n$ 的主合取范式。

主析取范式和主合取范式统称为主范式。设公式 A 中出现的命题变元是 $p_1,\cdots,p_n$。如果关于 $p_1,\cdots,p_n$ 的主析取范式 B 等值于 A，则称 B 是 A 的主析取范式。如果关于 $p_1,\cdots,p_n$ 的主合取范式 B 等值于 A，则称 B 是 A 的主合取范式。

逻辑推论 设 $A_1,\cdots,A_n,B$ 是公式，如果 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$ 是永真式，则称从前提 $A_1,\cdots,A_n$ 推出结论 B 推理正确，并称 B 是 $A_1,\cdots,A_n$ 的逻辑推论，记为 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$。

证明 证明是公式的序列，其中的每个公式都是按照事先规定的规则得到的，并且该序列的最后一个公式正是所要证明的结论。

证明中用到的推理规则如下。在以下推理规则中，横线上面的公式是该推理规则的前提，横线下面的公式是该推理规则的结论。

(1) **前提引入规则** 在证明的任何步骤都可以引入前提。

(2) **置换规则** $\dfrac{A}{B}$

其中公式 B 与公式 A 等值。

(3) **假言推理规则** $\dfrac{A, A \rightarrow B}{B}$

(4) **附加规则** $\dfrac{A}{A \vee B}$

(5) **化简规则** $\dfrac{A \wedge B}{A}$

(6) **拒取式规则** $\dfrac{A \rightarrow B, \neg B}{\neg A}$

(7) **假言三段论规则** $\dfrac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$

(8) **析取三段论规则** $\dfrac{A \vee B, \neg B}{A}$

(9) **构造性二难规则** $\dfrac{A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C}{B \vee D}$

(10) **合取引入规则** $\dfrac{A, B}{A \wedge B}$

定理 1.1 设 A, B, C 是任意公式。

(1) $A \Leftrightarrow A$;

(2) 若 $A \Leftrightarrow B$，则 $B \Leftrightarrow A$;

(3) 若 $A \Leftrightarrow B$ 且 $B \Leftrightarrow C$，则 $A \Leftrightarrow C$。

定理 1.2 联结词集合 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是全功能集。

定理 1.3 联结词集合$\{\neg, \wedge\}$,$\{\neg, \vee\}$,$\{\neg, \rightarrow\}$都是全功能集。

定理 1.4 对于每个公式都存在与其等值的析取范式和合取范式。

定理 1.5 每个公式都有惟一的主析取范式和主合取范式。

定理 1.6 设公式 A 中出现 n 个命题变元,A 的主析取范式中包含 k 个极小项,A 的主合取范式中包含 m 个极大项,则 $k+m=2^n$,并且以下结论成立。

(1) A 是永真式当且仅当 $k=2^n$ 且 $m=0$;

(2) A 是永假式当且仅当 $k=0$ 且 $m=2^n$;

(3) A 是非永真的可满足式当且仅当 $0<k<2^n$ 且 $0<m<2^n$。

1.2 范例解析

例 1.1 求公式$(p\overline{\vee}q)\overline{\vee}r$的所有成真赋值和成假赋值。

分析 可以用两种方法求公式的成真赋值和成假赋值。一种是真值表法,另一种是主范式法。在公式的主析取范式中包含多少极小项,该公式就有多少成真赋值,其中的每个极小项的成真赋值即为公式的成真赋值。在公式的主合取范式中包含多少极大项,该公式就有多少成假赋值,其中的每个极大项的成假赋值即为公式的成假赋值。

解法 1 列公式$(p\overline{\vee}q)\overline{\vee}r$的真值表如表 1.3 所示。

表 1.3 公式$(p\overline{\vee}q)\overline{\vee}r$的真值表

p	q	r	$p\overline{\vee}q$	$(p\overline{\vee}q)\overline{\vee}r$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

由真值表可以看出,公式$(p\overline{\vee}q)\overline{\vee}r$有四个成真赋值,它们是 001,010,100,111,当对 p,q,r 的赋值中有奇数个 1 时,该赋值是成真赋值。公式$(p\overline{\vee}q)\overline{\vee}r$有四个成假赋值,它们是 000,011,101,110,当对 p,q,r 的赋值中有偶数个 1 时,该赋值是成假赋值。

解法 2 求公式$(p\overline{\vee}q)\overline{\vee}r$的主析取范式如下。

$(p\overline{\vee}q)\overline{\vee}r$

$\Leftrightarrow((p\overline{\vee}q)\wedge\neg r)\vee(\neg(p\overline{\vee}q)\wedge r)$

$\Leftrightarrow(((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))\wedge\neg r)\vee(\neg((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))\wedge r)$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee((\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge r)$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(((\neg p\wedge p)$

$\quad\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee(q\wedge p)\vee(q\wedge\neg q))\wedge r)$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(((\neg p\wedge\neg q)\vee(q\wedge p))\wedge r)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

极小项$\neg p\wedge\neg q\wedge r$,$\neg p\wedge q\wedge\neg r$,$p\wedge\neg q\wedge\neg r$,$p\wedge q\wedge r$的成真赋值分别为001,010,100,111,它们即为公式$(p\overline{\vee}q)\overline{\vee}r$的所有成真赋值,其余赋值000,011,101,110即为公式$(p\overline{\vee}q)\overline{\vee}r$的成假赋值。也可以通过主合取范式求成假赋值和成真赋值。

例 1.2 判断以下公式的类型。

(1) $(p\rightarrow q)\leftrightarrow p$

(2) $\neg(q\rightarrow p)\wedge p$

(3) $(p\vee q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow r)$

分析 可以用三种方法判断公式的类型。第一种方法是真值表法。若真值表的最后一列全是1,则该公式是永真式;若真值表的最后一列全是0,则该公式是永假式;若真值表的最后一列既有1又有0,则该公式是非永真的可满足式。第二种方法是等值演算法。若该公式等值于1,则它是永真式;若该公式等值于0,则它是永假式。第三种方法是主范式法。设在公式中共出现n个命题变元。将该公式化为主析取范式。若主析取范式中包含了所有的2^n个极小项,则该公式是永真式;若主析取范式中不包含任何极小项,则该公式是永假式;若主析取范式中包含的极小项的数目是小于2^n的正整数,则该公式是非永真的可满足式。也可通过该公式的主合取范式判断它的类型。若主合取范式中包含了所有的2^n个极大项,则该公式是永假式;若主合取范式中不包含任何极大项,则该公式是永真式;若主合取范式中包含的极大项的数目是小于2^n的正整数,则该公式是非永真的可满足式。

解法 1 列公式的真值表如表1.4~表1.6所示。

表 1.4 公式$(p\rightarrow q)\leftrightarrow p$的真值表

p	q	$p\rightarrow q$	$(p\rightarrow q)\leftrightarrow p$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

表 1.5 公式$\neg(q\rightarrow p)\wedge p$的真值表

p	q	$q\rightarrow p$	$\neg(q\rightarrow p)$	$\neg(q\rightarrow p)\wedge p$
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

表 1.6 公式$(p\vee q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow r)$的真值表

p	q	r	$p\vee q$	$p\vee q\rightarrow r$	$p\rightarrow r$	$(p\vee q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow r)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

在公式$(p\rightarrow q)\leftrightarrow p$的真值表的最后一列中既有1又有0,因此$(p\rightarrow q)\leftrightarrow p$是非永真的可满足式。公式$\neg(q\rightarrow p)\wedge p$的真值表的最后一列全为0,因此$\neg(q\rightarrow p)\wedge p$是永假

式。公式$(p \vee q \to r) \to (p \to r)$的真值表的最后一列全为1,因此它是永真式。

解法2

(1) $(p \to q) \leftrightarrow p$

$\Leftrightarrow ((p \to q) \to p) \wedge (p \to (p \to q))$

$\Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee q) \vee p) \wedge (\neg p \vee (\neg p \vee q))$

$\Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee p) \wedge (\neg p \vee q)$

$\Leftrightarrow p \wedge (\neg p \vee q)$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow p \wedge q$

显然 $p \wedge q$ 是非永真的可满足式,因为它有成真赋值 11 和成假赋值 00。因此$(p \to q) \leftrightarrow p$也是非永真的可满足式。

(2) $\neg(q \to p) \wedge p \Leftrightarrow \neg(\neg q \vee p) \wedge p \Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \wedge p \Leftrightarrow 0$

因此,$\neg(q \to p) \wedge p$ 是永假式。

(3) $(p \vee q \to r) \to (p \to r)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee \neg p \vee r$

$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee r)$

$\Leftrightarrow 1$

因此,$(p \vee q \to r) \to (p \to r)$是永真式。

解法3 (1) 因为$(p \to q) \leftrightarrow p \Leftrightarrow p \wedge q$,并且 $p \wedge q$ 是关于p,q 的极小项,可看作一个极小项的析取,因此是关于 p,q 的主析取范式,所以 $p \wedge q$ 是$(p \to q) \leftrightarrow p$ 的主析取范式。因此$(p \to q) \leftrightarrow p$ 是非永真的可满足式。

(2) $\neg(q \to p) \wedge p \Leftrightarrow \neg(\neg q \vee p) \wedge p \Leftrightarrow q \wedge \neg p \wedge p$

$\Leftrightarrow ((p \wedge \neg p) \vee q) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg q)) \wedge (p \vee (q \wedge \neg q))$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

因为$\neg(q \to p) \wedge p$ 的主合取范式包含了所有的4个极大项,所以$\neg(q \to p) \wedge p$ 是永假式。$\neg(q \to p) \wedge p$ 的主析取范式是0,不包含任何极小项。

(3) $(p \vee q \to r) \to (p \to r)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee \neg p \vee r$

$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$

$\Leftrightarrow (p \wedge (\neg q \vee q) \wedge \neg r) \vee ((\neg p \vee p) \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg r \vee r))$
$\quad \vee ((\neg p \vee p) \wedge (\neg q \wedge q) \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$
$\quad \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

因为$(p \vee q \to r) \to (p \to r)$的主析取范式包含了所有的8个极小项,所以它是永真式。$(p \vee q \to r) \to (p \to r)$的主合取范式是1,不包含任何极大项。

例1.3 判断以下等值式是否成立。

(1) $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$

(2) $p\vee q\rightarrow p \Leftrightarrow p\vee r\rightarrow p$

分析 有三种方法可以用来判断两个公式是否等值。第一种是真值表法，列出两个公式的真值表加以比较即可，若两个公式中出现的命题变元不完全相同，则在列真值表时需要考虑在两个公式中出现的所有命题变元。第二种是等值演算法，若能将一个公式通过等值演算化为另一个公式，或者将两个公式通过等值演算化为同一个公式，则这两个公式等值。第三种是主范式法，将两个公式同时化为主析取范式(或主合取范式)，若它们的主析取范式(或主合取范式)相同，则它们等值，否则它们不等值。需要注意的是，若两个公式中出现的命题变元不完全相同，则在化主范式时需要考虑在两个公式中出现的所有命题变元。

解法1 (1) 列$(p\vee q)\wedge(q\vee r)\wedge(r\vee p)$和$(p\wedge q)\vee(q\wedge r)\vee(r\wedge p)$的真值表见表1.7。以下将$(p\vee q)\wedge(q\vee r)\wedge(r\vee p)$记为$A$，将$(p\wedge q)\vee(q\wedge r)\vee(r\wedge p)$记为$B$。

表1.7 公式$(p\vee q)\wedge(q\vee r)\wedge(r\vee p)$和$(p\wedge q)\vee(q\wedge r)\vee(r\wedge p)$的真值表

p	q	r	$p\vee q$	$q\vee r$	$r\vee p$	A	$p\wedge q$	$q\wedge r$	$r\wedge p$	B
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

由真值表可以看出，$(p\vee q)\wedge(q\vee r)\wedge(r\vee p)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(q\wedge r)\vee(r\wedge p)$。

(2) 列$p\vee q\rightarrow p$和$p\vee r\rightarrow p$的真值表见表1.8，因为在这两个公式中出现的命题变元是p,q,r，所以真值表有8行。

表1.8 公式$p\vee q\rightarrow p$和$p\vee r\rightarrow p$的真值表

p	q	r	$p\vee q$	$p\vee q\rightarrow p$	$p\vee r$	$p\vee r\rightarrow p$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

由真值表可以看出，在赋值001下，$p\vee q\rightarrow p$为真，而$p\vee r\rightarrow p$为假，所以它们不等值。

解法2 (1) 通过等值演算将$(p\vee q)\wedge(q\vee r)\wedge(r\vee p)$化为$(p\wedge q)\vee(q\wedge r)\vee(r\wedge p)$。

$(p\vee q)\wedge(q\vee r)\wedge(r\vee p)$

$\Leftrightarrow((p\wedge r)\vee q)\wedge(p\vee r)$

$\Leftrightarrow(p\wedge r\wedge p)\vee(p\wedge r\wedge r)\vee(q\wedge p)\vee(q\wedge r)$

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(q\wedge r)\vee(r\wedge p)$

解法3 (1) 通过等值演算将$(p\vee q)\wedge(q\vee r)\wedge(r\vee p)$和$(p\wedge q)\vee(q\wedge r)\vee(r\wedge p)$分别化为主析取范式或主合取范式,然后比较它们的主析取范式或主合取范式。

我们求它们的主析取范式,也可同样地求主合取范式。

先求$(p\vee q)\wedge(q\vee r)\wedge(r\vee p)$的主合取范式,再求它的主析取范式。

$(p\vee q)\wedge(q\vee r)\wedge(r\vee p)$

$\Leftrightarrow(p\vee q\vee(r\wedge\neg r))\wedge((p\wedge\neg p)\vee q\vee r)\wedge(p\vee(q\wedge\neg q)\vee r)$

$\Leftrightarrow(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$

公式$\neg((p\vee q)\wedge(q\vee r)\wedge(r\vee p))$的主合取范式为其余 4 个极大项的合取,即

$(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$

因此,可求公式$(p\vee q)\wedge(q\vee r)\wedge(r\vee p)$的主析取范式如下。

$(p\vee q)\wedge(q\vee r)\wedge(r\vee p)$

$\Leftrightarrow\neg\neg((p\vee q)\wedge(q\vee r)\wedge(r\vee p))$

$\Leftrightarrow\neg((p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r))$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

再求$(p\wedge q)\vee(q\wedge r)\vee(r\wedge p)$的主析取范式。

$(p\wedge q)\vee(q\wedge r)\vee(r\wedge p)$

$\Leftrightarrow(p\wedge q\wedge(\neg r\vee r))\vee((\neg p\vee p)\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge(\neg q\vee q)\wedge r)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$(p\vee q)\wedge(q\vee r)\wedge(r\vee p)$和$(p\wedge q)\vee(q\wedge r)\vee(r\wedge p)$的主析取范式相同,所以它们等值。

例 1.4 某勘探队取回一块矿样,三人判断如下。

甲说:“矿样不含铁,也不含铜。”

乙说:“矿样不含铁,含锡。”

丙说:“矿样不含锡,含铁。”

已经知道,这三人中有一个是专家,一个是老队员,一个是实习队员。化验结果表明:这块矿样只含一种金属,专家的两个判断皆对,老队员的判断一对一错,实习队员的两个判断皆错。问:这三人的身分各是什么?

分析 本题比教材的例 1.16 难解得多。在例 1.16 中,已经知道每个人说的话一半对一半错,而在本题中并不知道他们说的话有多少部分是对的。用字母表示命题如下:

p:矿样含铁,q:矿样含铜,r:矿样含锡。

甲说的两句话为:$\neg p,\neg q$

乙说的两句话为:$\neg p, r$

丙说的两句话为:$\neg r, p$

如果用一个公式表达出这三人中有一个是专家，一个是老队员，一个是实习队员，公式会非常复杂。其实我们不必完全写出这样的公式。因为矿样只含一种金属，所以 $p\wedge q=0$，$q\wedge r=0$，$r\wedge p=0$。甲是实习队员，即甲说的两句话都是错的，可表示为：$p\wedge q$。乙是实习队员，即乙说的两句话都是错的，可表示为：$p\wedge\neg r$。丙是实习队员，即丙说的两句话都是错的，可表示为：$r\wedge\neg p$。甲、乙、丙三人中至少有一个是实习队员，可表示为：

$$(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg p)=1$$

因为 $p\wedge q=0$，所以 $(p\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg p)=1$，即 $p\overline{\vee}r=1$，p 和 r 中恰好有一个为 1，因此 $q=0$。甲是老队员，即甲说的话一半对一半错，可表示为：$\neg p\overline{\vee}\neg q$。乙是老队员，即乙说的话一半对一半错，可表示为：$\neg p\overline{\vee}r$。丙是老队员，即丙说的话一半对一半错，可表示为：$\neg r\overline{\vee}p$。甲、乙、丙三人中有奇数个老队员，可表示为：

$$(\neg p\overline{\vee}\neg q)\overline{\vee}(\neg p\overline{\vee}r)\overline{\vee}(\neg r\overline{\vee}p)=1$$

由教材上的等值式可得到

$$\begin{aligned}&(\neg p\overline{\vee}\neg q)\overline{\vee}(\neg p\overline{\vee}r)\overline{\vee}(\neg r\overline{\vee}p)\\ \Leftrightarrow&(\neg p\overline{\vee}\neg p)\overline{\vee}(\neg r\overline{\vee}r)\overline{\vee}(\neg q\overline{\vee}p)\\ \Leftrightarrow&0\overline{\vee}1\overline{\vee}(q\overline{\vee}1\overline{\vee}p)\Leftrightarrow q\overline{\vee}p\end{aligned}$$

又知道 $q=0$，所以 $p=1$。因为 $r\wedge p=0$，所以 $r=0$。因此，甲说的话一半对一半错，甲是老队员。乙说的话全错，乙是实习队员。丙说的话全对，丙是专家。

例 1.5 求下列公式的主析取范式和主合取范式。

(1) $p\to(q\to r)$

(2) $p\to(q\leftrightarrow r)$

分析 求公式的主析取范式和主合取范式的方法有两种，即真值表法和等值演算法。

真值表法：列出公式的真值表，找出其所有成真赋值和成假赋值。将成真赋值对应的极小项析取起来就得到其主析取范式，将成假赋值对应的极大项合取起来就得到其主合取范式。

等值演算法：在主析取范式和主合取范式中只出现联结词 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，因此首先使用等值式

$$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\to B)\wedge(B\to A)$$
$$A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B$$
$$A\overline{\vee}B\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)$$

化掉联结词 $\to$，$\leftrightarrow$，$\overline{\vee}$。然后使用等值式 $\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$ 和 $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$ 将否定联结词 $\neg$ 内移，用双重否定律 $\neg\neg A\Leftrightarrow A$ 去掉多余的 $\neg$，用分配律 $A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ 和 $A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ 将公式化为析取范式或合取范式。最后使用排中律 $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$，矛盾律 $A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$，同一律 $A\vee 0\Leftrightarrow A$ 和 $A\wedge 1\Leftrightarrow A$，幂等律 $A\wedge A\Leftrightarrow A$ 和 $A\vee A\Leftrightarrow A$ 将公式化为主析取范式或主合取范式。

解法 1 (1) 列公式 $p\to(q\to r)$ 的真值表，见表 1.9。

表 1.9 公式 $p\to(q\to r)$的真值表

p	q	r	$q\to r$	$p\to(q\to r)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

公式 $p\to(q\to r)$有 7 个成真赋值 000,001,010,011,100,101,111,它们对应的极小项分别是$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$,$\neg p\wedge\neg q\wedge r$,$\neg p\wedge q\wedge\neg r$,$\neg p\wedge q\wedge r$,$p\wedge\neg q\wedge\neg r$,$p\wedge\neg q\wedge r$,$p\wedge q\wedge r$。因此,公式 $p\to(q\to r)$的主析取范式是这 7 个极小项的析取,即

$$(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$$
$$\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$$

公式 $p\to(q\to r)$有 1 个成假赋值 110,它对应的极大项是以 110 为成假赋值的极大项$\neg p\vee\neg q\vee r$,所以公式 $p\to(q\to r)$的主合取范式是

$$\neg p\vee\neg q\vee r$$

需要特别注意的是,$\neg p\vee\neg q\vee r$ 是主合取范式,是一个极大项的合取,而不是主析取范式。

(2) 列公式 $p\to(q\leftrightarrow r)$的真值表如表 1.10 所示。

表 1.10 公式 $p\to(q\leftrightarrow r)$的真值表

p	q	r	$q\leftrightarrow r$	$p\to(q\leftrightarrow r)$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

公式 $p\to(q\leftrightarrow r)$的成真赋值为 000,001,010,011,100,111,它们对应的极小项分别是$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$,$\neg p\wedge\neg q\wedge r$,$\neg p\wedge q\wedge\neg r$,$\neg p\wedge q\wedge r$,$p\wedge\neg q\wedge\neg r$,$p\wedge q\wedge r$,因此公式 $p\to(q\leftrightarrow r)$的主析取范式是这 6 个极小项的析取,即

$$(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$$
$$\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$$

公式 $p\to(q\leftrightarrow r)$的成假赋值为 101 和 110,它们对应的极大项分别为$\neg p\vee q\vee\neg r$和$\neg p\vee\neg q\vee r$,因此公式 $p\to(q\leftrightarrow r)$的主合取范式是这两个极大项的合取,即