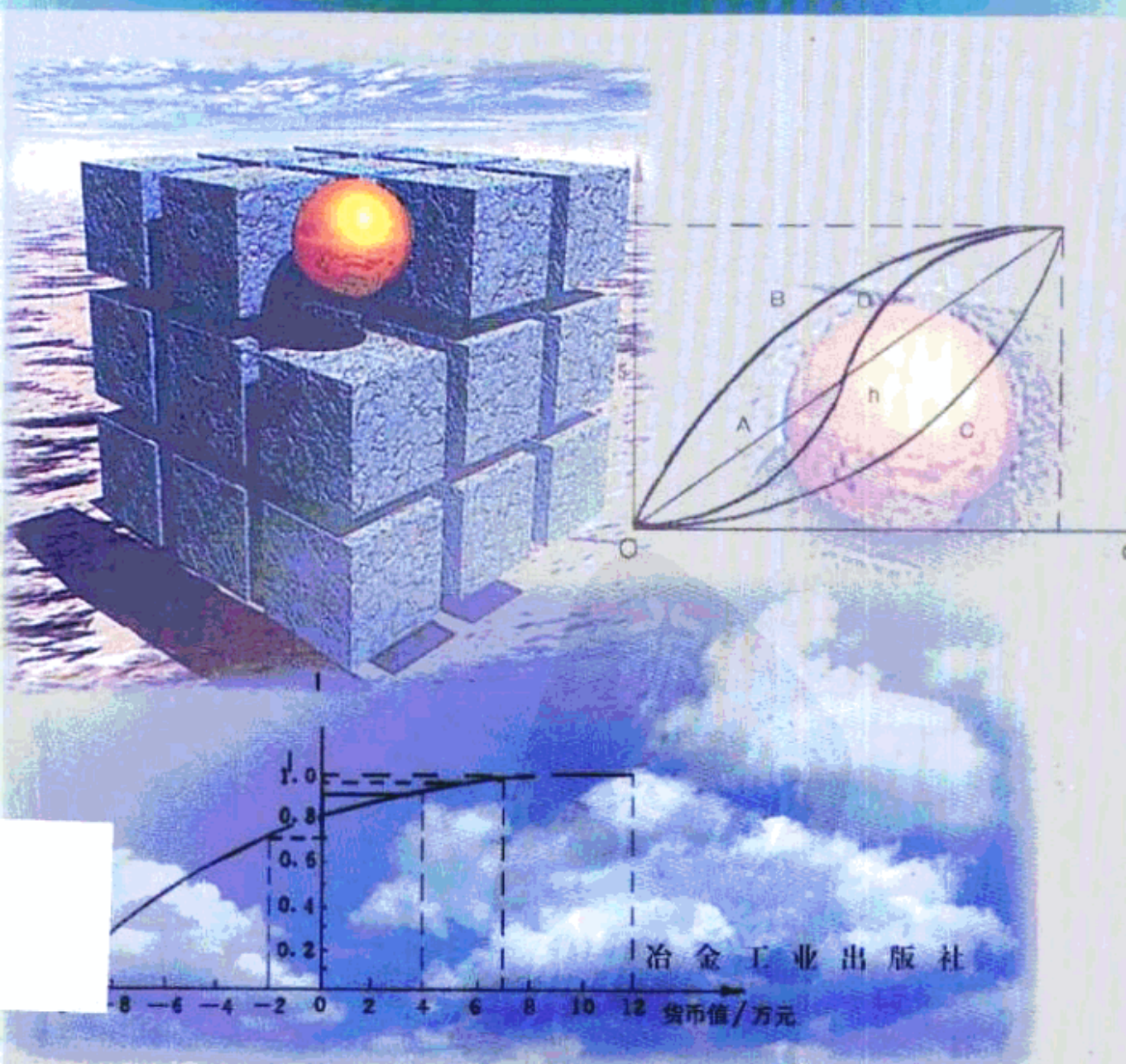


经济与管理 数学模型

贾中裕 主编



前 言

随着社会的发展和科技的进步，特别是近年来计算机的发展，数学愈来愈向其它领域渗透。在大学教育中，不论是经济类，还是管理类的各专业，不论是本科层次，还是专科层次，均需开设数学课。在当前积极进行的数学教学改革中，大家一致认识到，要把数学教学的重点从为专业课提供数学工具和方法，扩展到提高学生的数学素质上来。

成人高等教育旨在培养应用型人才。在经济管理各专业中均已开设数学课。但目前各校在突出经济应用和培养学生的应用意识、创新能力方面做得尚不够。为此，北京数学会经济数学分会组织了部分成人高校的数学教师一起研究成人高校的数学教改问题。

我们认为，成人高校经济管理类专业的数学基础课仍应以微积分、线性代数、概率统计为三大基础。尽管基础知识面较宽，但理论要求较浅，浅以“够用”为度，宽以“必须”为限。在教学目的中要求学生掌握的基本技能包括上述各部分基础知识中的简单运算和简单推理，还包括处理数据、使用计算器、使用计算机软件，应特别强调加强培养和提高学生的应用数学能力，即会数学地提出、分析和解决具有实际意义的问题，会使用数学语言表达问题，进行交流，形成用数学的意识。为落实“突出经济应用，强化应用意识”这一设想，我们拟进行“案例教学”和“数学建模教学”。为此，

集中大家的智慧，在人民大学信息学院、北京大学光华管理学院、中国社科院数量经济与技术经济研究所、清华大学应用数学系、北京理工大学应用数学系部分教授、专家的指导下，编写本书。

本书分两篇。上篇除介绍数学建模的一般方法和步骤外，重点介绍了11种常用的经济数学方法和经济数学模型。包括经济运筹学、投入产出分析、经济计量方法、应用统计分析、层次分析法、时间序列分析、模糊数学、经济控制论、数据包络分析、经济对策论、非线性经济管理模型等。下篇是数学模型在经济与管理中的应用，有5个方面，它们是经济理论模型、筹资决策与投资分析、经济预测、管理决策分析、经济管理评价方法。

关于编写和使用该书的一些想法分述如下：

1) 理论联系实际是教学中的一条重要原则，现代教育理论也证明学数学最好的办法是做数学。数学教学不能停留在“数学理论+经济实例”的水平上。进行案例教学，开展数学建模活动是具有可操作性的一个办法。本书就是为开展案例教学、数学建模活动而编写的一本参考读物。

2) 数学模型非常多，选择时是考虑到社会主义市场经济中、特别是微观经济部分中常用的；还考虑到现代企业管理中常用的；经济理论和管理学中一些前沿的理论和方法也要介绍，如经济对策论和非线性经济管理模型。

经济系统和自然系统的本质区别，是前者有人参与。国家、部门、地区、企业、个人等经济实体都有自己的利益，其中最重要的是经济利益，它在很大程度上决定着经济实体的行为。但现有的不少模型技术，在研究经济系统中，恰恰抽掉了各经济实体的经济利益，使这些模型技术不能真实地反

映经济系统的本质。而现代经济对策论在承认各经济实体利益的基础上，能协调他们的利益，在经济研究和管理中得到了日益广泛的应用，1994年诺贝尔经济学奖授予三位对策论专家，1996年又是在对策论的应用方面（税收、激励机制、信息经济学）做出卓越贡献的两位大师获此殊荣。

3) 本书把常用的经济数学方法和经济数学模型列出11个。在编选时，要求编者对每一种方法或模型仅介绍基本理论和基本方法及其应用，并列出的参考书目。在教学中，要结合专业和学校的具体情况，只能选其中的一种或几种。

4) “九五”是我国实现经济体制转变和经济增长方式转变的关键的时期，来自市场的严峻挑战，要求企业从市场经济的新视角转变观念。企业的性质，已从附属政府的生产单位成为市场中的竞争主体，这就必须提高企业的素质，特别是企业领导人员、管理人员的素质。他们必须掌握市场经济的基本理论和现代工商管理的方法。为此，国家经贸委在“九五”期间，要对企业管理人员，特别是领导人员进行工商管理知识培训。《经济与管理数学模型》这本书，就是从工商管理培训系列课程12门主课中选出的应用实例。

5) 在案例教学或数学建模的教学中，一定要应用计算机软件，比如，利用线性规划模型进行筹资优化决策时，要使学生学会如何建立模型和使用计算的结果，而对于解线性规划问题，只要会使用软件即可，而不必学会单纯形法。

6) 在成人高校的数学教学中，引进案例教学和开展数学建模活动还是个新课题，本书能否起到辅助教学作用，还有待实践来进行检验。

参加本书编写的还有王国成教授，严静娴副教授，董力副教授，王松浦副教授等。

本书在编写过程中，学习和参考了许多专家、学者的著作和文章。虽然书中已列出了参考文献，但非全部。在此，向他们表示衷心的感谢。

编 者

1999年6月

上篇 常用的经济数学方法 和经济数学模型

第一章 经济数学模型概述

第一节 引言

本世纪以来，科学技术得到了飞速的发展。数学在这个发展过程中发挥了它不可替代的作用，同时它自身也得到了空前的发展。由于计算机的迅速发展和普及，大大增强了数学解决现实问题的能力。数学向社会、经济和科技各个领域的渗透，扩展了数学与实际的接触面。数学科学应用于经济建设、社会发展和日常生活的范围和方式也发生了深刻的变化。在当今的时代，“国家的繁荣富强，关键在于高新的科学技术和高效率的经济管理。”大量的事实表明，高新技术是保持国家竞争力的关键因素，高新技术的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学。高新技术的出现使得数学与工程技术之间在更广阔的范围内和更深程度上直接地相互作用。把社会推进到数学工程技术的新时代。

当代社会和经济发展的一个特点是定量化和定量思维的不断加强。这些不仅适用于科学技术工作，在经济管理工作中也日益体现了它们的重要作用。直观思维、逻辑推理、精确计算以及结论的明确无误，都将成为优秀的科技人员和精明的经济管理工作者应具备的工作素质。因此，数学以及数

学的应用在科学技术、经济建设、商贸往来和日常生活中所起的作用将愈来愈大。数学科学作为科学创新、技术改进、经济发展以及产品竞争的推动力的重要性也将日益显现出来。

思维的抽象性、推理的严谨性和应用的广泛性是在数学发展的漫长历程中逐渐形成的特点。它来源于人们生产和生活的需要。对客观世界中有关空间结构、数量关系的共性不断地抽象、升华而形成当今的数学。它的出现为人们在更深的层次上认识世界提供了重要的途径。它的抽象性和严谨性的特点也成为人们科学地思维和组织构造知识的一个有效手段。而数学的广泛应用性则为各门学科以及人们的生产、生活和社会活动在定量方面向深层次发展奠定了基础。但是在过去由于种种原因,这个特点在人们的印象中反映得不充分。人们往往只是把数学作为计算的工具和训练人们科学思维的工具。尽管人们学了大量的数学知识和数学方法,但是不会用或用不上。学术界探讨数学科学对经济竞争力的作用时指出:“在经济竞争中数学是不可少的,数学科学是一种关键的、普遍的、能够实行的技术”。“高技术的出现把社会推进到数学技术的时代”。数学的应用特征在当今显得更加突出,更加重要。

应用数学知识和计算机去解决经济建设和社会发展中的实际问题时,要通过对实际问题的分析、研究组建用以描述这个问题的数学模型,使用数学的理论和方法或编程计算对模型进行分析从而得到结果,再返回来解决实际问题。可见数学模型是应用数学理论和计算机解决实际问题的的重要手段和桥梁。事实表明,掌握数学知识是应用数学解决实际问题的必要条件。在当前实现数学作为一种技术的职能的过程中,使用数学解决实际问题的技能的培养更显得必要和迫切。这

主要是指数学模型的有关知识和数学建模能力的培养。

第二节 模型与经济数学模型

人们经常借助模型来认识和改造世界。这里的模型是针对原型而言的。所谓原型是指人们在社会活动中和生产实践中所关心和研究的实际对象。在科技领域中常常用系统或过程等术语。如机械系统、交通系统、生态系统、社会经济系统等。又如导弹飞行过程、化学反应过程、人口增长过程、污染扩散过程等。模型是人们为一定的目的对原型进行的抽象。它作为人们所研究的事物的代表或抽象，以及所研究对象有关性质的一个模拟或描述，具有以下三个特点：

1) 它是实际事物的一部分属性的抽象或模仿，而不是全部属性的复制；

2) 它由与它所分析的问题有关的要素构成；

3) 它体现了有关要素之间的关系。

人们在认识过程中，常常会遇到一些很复杂的现象，难以通过实验来深入地了解，这时可以依据已取得的关于对象的事实材料、运用已知的客观规律，建立起一个和客体的某些方面相类似的模型。由于模型是客观现实的一种描述，它反映了客观事物的某些属性，因而可以先对模型进行研究，然后将所获得的信息类推到研究对象上去。不仅如此，模型作为客观事物的抽象，既反映实际又高于实际，利用它可以演绎或推断出客观事物的发展变化及其规律，从而可以解决一类具有共性的实际问题。

经济数学模型要研究与探讨的是客观经济过程的数量规律，它的特殊性在于经济过程不能进行大量的实验，而只能在观察经济现象的基础上记录社会经济过程，用统计分析的

方法进行归纳，同时要把经济现象描述成能够用数学方法解决的程度，即建立经济数学模型。

数学模型是指对于现实世界的某一特定现象，为了某个特定目的，作出一些必要的简化和假设，运用适当的数学工具得到的一个数学结构。它可以是由字母、数学或其它数学符号建立起来的等式或不等式，也可以是图表、图形和框图程序等。它或者能解释特定现象的现实形态，或者能预测研究对象的未来状况，或者提供处理对象的最优决策和控制。经济数学模型则是由上述数学形式来描述某些经济现象及揭示某些经济规律的一种数学模型。

例如，马克思的社会再生产公式就是一个描述社会再生产的经济数学模型：

$I (v+m) = II (c)$ ，说明在简单再生产条件下，两大部类之间所必须保持的一种数量关系；

$I (v+m) = II (c+\Delta c)$ ，说明在扩大再生产的条件下，两大部类间所必须保持的一种数量关系。

综上所述，经济数学模型就是以经济理论假设为前提，用数学形式对客观经济过程的本质联系进行简化反映的一种经济研究和管理工具，是经济理论和经济实践的中间环节。

根据经济数学模型的性质及内涵，在使用模型来研究经济过程时，必须要注意以下几点：

首先，建立经济数学模型前必须进行深入而广泛的调查研究。根据解决问题的需要，要尽可能地占有丰富的材料，这是建立模型的前提条件。当然，在建立经济模型的过程中，仍需进一步搜集资料，使材料逐步丰富起来。人们在取得了大量的事实材料以后，还必须进行正确的抽象。通过抽象，人们的注意力集中于所需研究方面的最本质、最主要的因素和

关系。抽象的程度，可以视需要而定。一般来说，开始时可以只抓住一个或几个最主要的因素和关系，然后再逐步扩展它，并使之具体化。

其次，经济模型具有抽象思维和形象思维融为一体的特点。因此，构造模型既要有严格的科学态度，又要有丰富的想象力。一方面，构造的模型和原型之间必须有某种相似关系，可以进行类比；另一方面，构造的模型只要在所研究的方面具有某种相类似的关系，而不必拘泥于同质、同类，或同一运动形式。

再次，要检查经济模型与经济原型的符合程度。通过比较，了解二者相符合的程度，以便根据需要确定已经建立起来的模型是否合适。如果不合适，就要进行修改，或者重新构造出新的经济模型。

最后，在把经济模型所研究的结果向客体转移时，必须进行认真的分析。模型是原型的一种抽象化的表现形式，而且抽象的程度又有不同。因此，当人们把从模型上获得的信息类推到经济原型上去时，必须依据它们之间的相似程度，估价模型在多大程度上描述和预示了经济原型。总之，经济模型是否有用，在于能否正确地使用它。

第三节 经济模型的特点与种类

经济数学模型从其定义可知，它有三个特点：以经济理论假设为基础，以数学符号为表现形式，以简化来确保其实用性。

一、经济理论假设是经济数学模型的基础

模型最根本的特点就是与原型相似，即反映所研究的对象的某一特征的内在本质联系。建立模型，首先要确定一些

基本量，要确定这些量之间的关系，要区分哪些关系是主要的，哪些关系是次要的。经济数学模型的原型——客观经济数量关系，并不象自然物体那样是可以直接观察和感受的，而要从多而复杂的各种经济数量关系中，抽象出最本质、最主要的联系来，只有通过抽象的理论分析才能完成。

经济数学模型并不是纯粹的数学模型，它的每一个量、每一步演算、每一结果，都具有一定的经济意义，因此，运用经济数学模型，也要以经济理论为指导。

例1 已知某产品的单位售价为 p ，单位产品税金为 m ，产销量为 Q ，单位变动成本为 v ，全部固定成本为 F 。试求盈亏平衡产量 Q_0 及安全边际率。

分析：产（销）量、成本和利润之间互相制约，相互构成锁链关系，这其中的焦点就是产品盈亏的平衡问题。产品的盈亏平衡产量是指利润为零时的产品产（销）量，当然，这里假设的前提是产量与销量一致。产品的安全边际率是指产品产（销）量中超过盈亏平衡产量的部分与产（销）总量之间的比率，它反映了企业在该产品经营上的安全状况。

解：根据产（销）量、成本和利润之间的内在关系，有如下两个关系式：

销售收入 = 产（销）量 $\times$ （单价 - 单位产品税金）

销售总成本 = 固定成本 + 产（销）量 $\times$ 单位变动成本

要求盈亏平衡产量，必须有：销售收入 = 销售总成本

即 $Q_0(p - m) = F + Q_0v$ ，从而盈亏平衡产量为：

$$Q_0 = \frac{F}{p - m - v} \text{ 而产品安全边际率为：}$$

$$\text{安全边际率} = \frac{Q - Q_0}{Q} = 1 - \frac{F}{Q(p - m - v)}$$

二、数学公式是经济数学模型的表现形式

经济数学模型是用数学形式来表示经济数量关系的，它是有经济内容的数学公式或方程系统，通过模型能准确地测定该模型内各个要素之间的数量关系。各个经济量的变化都是相互联系和相互制约的，这种依存关系可用数学中的函数关系来反映，其一般形式为： $y=f(x)$ 。当然，除函数关系外，还存在其它形式的数量关系，如随机的相关关系等。模型本身可以是确定型或概率型的，可以是单个的方程式，也可以是一个庞大的方程组体系。

例2 在北京乘夏利出租汽车，行程不超过5km时，车费为10元。行程大于5km但不超过15km时，超出5km的部分，每公里车费1.20元。行程大于15km后，超出15km的部分，每公里车费1.80元。途中因红灯而停车等候或车速低于5km/h时，每5min按1km车费计，即每5min收车费1.20元。又计程器每半公里计一次价，例如，当行驶路程 x km满足 $12 \leq x < 12.5$ 时，按12.5km计价；满足 $12.5 \leq x < 13$ 时，按13km计价。等候时间每2.5min计一次价，例如，等候时间 t min满足 $2.5 \leq t < 5$ 时，按2.5min计价；满足 $5 \leq t < 7.5$ 时，按5min计价。问：(1)若行驶12km，停车等候3min，应付多少车费？(2)若行驶23.7km，停车等候7min，应付多少车费？(3)若途中没有停车等候，车速也高于5km/h，所付车费 y 元就是行程 x km的函数 $y=f(x)$ ，列表给出 $y=f(x)$ ，其中 $0 < x < 7$ 。

解：(1) $10 + 1.2 \times (12.5 - 5) + 1.2 \times \frac{2.5}{5} = 19.6$

(2) $10 + 1.2 \times (15 - 5) + 1.8 \times (23.7 - 15) + 1.2 \times \frac{5}{5} = 38.86$

(3)

x	$(0, 5)$	$[5, 5.5)$	$[5.5, 6)$	$[6, 6.5)$	$[6.5, 7)$
y	10	10.6	11.2	11.8	12.4

(说明：实际收费是按“元”取整，如乘车 5.2km，收费 11 元)

三、简化是经济数学模型实用的保证

由于客观经济现象和经济过程的复杂性和变动性，任何模型都不可能详细描述研究对象的每个细节和一切变化情况，而这样做也无太大必要。在实际建模过程中，只能采用简化的手段，反映经济现象和经济过程中主要的、基本的变量和联系，而舍弃次要的、非本质的变量和联系。这样做不仅不会降低模型的真实性和提高模型的真实性和增加模型的实用性，使其便于进行数学处理。

但是，数学模型的简化不能损害其对研究对象的本质性的反映，不能妨碍模型的目的实现，不能使误差扩大到与准确度的要求相冲突的地步。比如，把不规则的变化近似地看作规则的变化，把其中某些不规则变化的因素全部舍弃掉，就会影响模型的精度；另外，在简化过程中，数学方法本身也要受到特定条件的限制。比如，在简化过程中，在数学关系式上，常把高维问题化为低维问题来处理，把非线性问题化为线性问题来处理，若不满足由复杂向简单转化的条件，是无法实现简化要求的。一般来讲，用作理论研究的模型可作较大程度的简化，而用于实际工作的模型就不能过于简化。

客观经济数量关系是复杂的，反映这些关系变化的经济数学模型也是多种多样的。针对所要研究的各种经济问题，可以建立各种特定的经济数学模型。

根据不同的标准，可以将经济模型分成不同的种类。

1. 按经济范围分类

经济数学模型根据所涉及的经济范围，可以分为企业模型、部门模型（或行业模型）、地区模型、国家模型和世界模型五种。

2. 按经济数量关系分类

经济数学模型一般可以分为经济计量模型、投入产出模型、最优化模型、经济控制论模型等。

（1）经济计量模型

它是反映经济结构关系的模型。它通过对公民、企业、政府等经济活动主体的经济行为的分析，按消费、生产、投资、劳动、收入分配、价格和进出口贸易等几大块，进行分别的和综合的研究，找出整个经济发展变化的原因和规律。经济计量模型提供了有用的内部一致的模型结构，能用于结构分析、经济预测和政策评价。

（2）投入产出模型

它是反映国民经济各部门（或地区）之间的平衡关系的经济模型。它实质上是从物质生产的工艺技术联系方面来研究国民经济的部门（或地区）结构的。通过对中间产品、最终产品和总产品三者关系的分析，反映各部门间生产上的联系，协调各生产部门的经济活动。

（3）最优化模型

它是一种特殊的均衡模型。它能选择比较各种可行方案，从中找出最优方案。比如，为了使国民经济发展达到一个既定的目标，如何最有效地利用各种资源？在资源有限的条件下，如何使国民经济发展达到最好的结果？这就需要通过建立最优化模型来求解。最优化模型能反映经济活动中的条件极值问题，它与物资、产品、其它资源的合理分配和利用有密切联系。

(4) 经济控制论模型

它用有关系统、结构、功能及行为、信息、反馈、控制等观点和角度来描述动态经济现象，并依据自动控制理论中的反馈和调节原理，信息论中的信息传递原理，组织结构理论中的组织结构层次和决策过程等来构造模型，在研究经济活动规律时始终强调人对经济系统的能动作用。

3. 按时间过程分类

经济数学模型可以分为静态模型和动态模型两种。

反映某一时点的经济数量关系的模型是静态模型；反映一个时期的经济发展过程的模型是动态模型。上面所说的经济计量模型、投入产出模型和最优化模型，都可以既是静态的，又是动态的。比如经济计量模型由于可以包括前期的内生变量和外生变量，在本质上是动态的。但也可以用简单的因果关系回归方程式只反映某个时点的静态关系。

4. 按数学形式分类

根据代数方程的表现形式，经济数学模型一般可分为线性模型和非线性模型两种。

(1) 线性模型

它是指模型中包含的参数变量都是一次幂的，每个等式或不等式都是一次的，它们在平面坐标上表现为一条或多条直线，在抽象空间中表示一个或多个平面。线性模型的求解比较容易，有较为成熟的算法。

(2) 非线性模型

非线性模型是指模型中包含的参变量有两次或两次以上幂的，等式或不等式中至少有一个不是一次的，在平面坐标上表现为一条或多条曲线，在抽象空间中表示一个或多个曲面。

目前，实践中使用的经济数学模型大多是线性的或拟线性的（即经过适当处理后变为线性的）。例如，投入产出模型是线性的，绝大部分经济计量模型是线性的。在实际经济过程中，大量的经济数量关系是非线性的。但由于非线性模型的设计和计算比较复杂，应尽可能把非线性模型转化或近似为线性模型来求解。

5. 按应用目的分类

按应用目的分类的经济数学模型，可分为理论模型和应用模型两类，并把应用模型进而分为分析模型、预测模型、决策模型和规划模型四种。

（1）理论模型

它是在一般的条件下描述主要经济变量之间的基本数量关系的模型。它不引入具体的资料，抽象程度比较高，通常不含有误差余项。这种模型只用于理论分析。

（2）应用模型

它是直接反映具体经济过程数量关系的模型，它不仅包括国民经济中一些基本的综合性经济变量及其相互关系，也要考虑很多具体的比较次要的经济变量和经济联系。应用模型需要利用具体的统计资料，模型内的系数都是具体的数值，不是数学符号。有时它还带误差余项。应用模型可以求解和计算，为各种实用目的服务。

6. 按经济过程的性质分类

按所反映的经济过程的性质，模型可以分为随机模型和确定性模型两种。随机模型具有概率性质，包含误差余项，经济计量模型就是一种随机模型。确定性模型不考虑随机误差，它所反映的数量关系是确定的。投入产出模型和线性规划模型都是确定性模型。

第四节 经济模型的原则

经济模型的原则是在建立和运用经济数学模型时所必须遵循的指导思想。一般来讲，它包括以下几个方面的原则：

1. 以经济理论为指导的原则

这是经济数学模型的本质决定的。由于经济数学模型是经济原型属性的抽象与模仿，正确把握经济数学模型的建立，就会使数学模型准确地反映经济事物的内在的经济数量关系，揭示经济事物的本质规律。要做到这一点，就必须运用经济理论首先对所研究的经济问题给予分析，以界定经济问题的性质，寻找解决问题的有效途径。可以这样讲，没有正确的经济理论的指导，就不能准确揭示出经济事物的本质规律，也不能实现运用经济数学模型解决实际经济问题这一根本目的。

2. 定性分析与定量建模相互促进的原则

所谓定性分析，是指对经济事物本质规律的揭示和经济数学模型运用效果的评价分析；所谓定量建模，则是指对经济事物内在数量关系的正确反映。在整个经济建模过程中，要遵循“定性分析→定量建模→定性评价”的规律，反复研究，去伪存真，把握经济数学模型反映经济原型的度。

3. 建模与模型检验识别相统一的原则

经济数学模型的建立，表现在两个方面：一是在对实际问题分析的基础上建立数学模型；二是对已建立的初步模型根据一定标准进行检验和判断。模型检验是为了判明经济数学模型反映经济原型的准确程度，模型识别则是为了判明经济数学模型是否反映经济原型。因此，模型建立的过程，往往伴随着模型的修改、完善，甚至相反，即对已建模型的否