经济数学自学指导

JING JI SHU XUE
ZI XUE ZHI DAO

主 编
符秀华 陈梅华

河南人民出版社

前　　言

本书是为成人高校广播电视大学经济管理各专业经济数学课程编写的配套教材.内容包括:函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、矩阵、线性方程组、投入产出数学模型.

考虑到广播电视大学教学的特点,本书在编写过程中力求做到以下几点:

1.内容取舍、顺序安排以及学时分配与教学大纲相吻合.为了便于教学,根据教学大纲,在各章开始给出了教学要求.

2.尽可能联系经济和管理方面的实际问题.

3.充分考虑经济专业学员的数学基础,不强调理论推导和较繁的运算,重视培养学员分析问题、解决问题的能力。

4.根据成人教育的特点,叙述时尽可能深入浅出,通俗易懂.及时归纳出了一些解题方法步骤,并针对疑、难点给出了必要的说明.

5.为了便于学员自学,例题后附有类似的练习题,并在各章末给出了习题参考答案.各章配有思考题.

参加本书编写的有(按编写顺序排列):张静茹(第一章、第二章),逯文超(第三章、第四章),符秀华(第五章、第六章),杜金亮(第七章),陈梅华(第八章、第九章),全体编写人员参加了本书的审稿工作.本书主编:符秀华、陈梅华.副主编:逯

文超、杜金亮.全书由符秀华、陈梅华定稿.

由于我们水平有限,书中难免出现不妥之处,敬请读者批评批正.

编　者

1996 年 6 月

目　　录

第一章　函　　数

〔教学要求〕

1. 理解函数的概念，了解函数的主要性质.

2. 掌握求函数定义域的方法.

3. 熟练掌握六类基本初等函数的表达式、图形及主要性质.

4. 了解复合函数、初等函数的概念，会对初等函数进行分解.

5. 会由简单的实际问题(特别是经济现象中的应用问题)，建立其函数关系式.

§1.1　函数概念

一、常量与变量

在考察某问题的过程中，数值始终保持不变的量叫常量；数值可不断变化的量叫变量.

例如，一昼夜的气温，火车开始起动时的速度等都是变量；而圆周对于直径的比值 π、三角形内角的和 180° 等都是常量.

通常用字母 a、b、c 等表示常量；用字母 x、y、z 等表示变

量.

应当注意的是：

① 常量与变量有时是相对于所考察问题的过程而言的. 有些量在某个过程中是变量，而在另外的过程中又可能成为常量. 例如，火车行驶时的速度，在起动或刹车阶段是变化着的，因而在该过程中是变量；而在正常行驶的某段路上，速度变化很小，可相对地看作不变，那么在该过程中就是常量.

② 变量 x 的取值范围，通常用区间或不等式等表示. 具体表示形式见表 1—1.

表 1－1

区　　间	不等式	含　　义
$[a,b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	大于或等于 a 但小于或等于 b 的全体实数
(a,b)	$a < x < b$	大于 a 小于 b 的全体实数
$(-\infty,+\infty)$	$-\infty < x < +\infty$	全体实数
$(-\infty,b)$	$-\infty < x < b$	小于 b 的全体实数
$(a,+\infty)$	$a < x < +\infty$	大于 a 的全体实数

其它还有 $[a,b)$，$(a,b]$，$(-\infty,b]$，$[a,+\infty)$ 几种，其不等式表示及含义可仿上表类推.

二、函数概念

1. 函数定义

在考察和研究某一问题的过程中，往往同时存在着几个变量，而且这几个变量不是孤立地变化，而是相互联系地、遵循一定规则变化着，函数定义正是在研究变量之间的依存关

系中产生的.

定义 1.1 设变量 x 和 y, 变量 x 的变化范围是 D, 如果对于 D 内的每一个 x, 按照某种对应规则 f 都有唯一的 y 值与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记作:

$$y = f(x)$$

其中 x 叫做自变量, y 叫因变量, x 的变化范围 D 叫函数的定义域, 相应的 y 值的全体叫函数的值域, 记作 Y.

$$Y = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

关于函数定义, 应明确以下几点:

① 对应规则 f 就是自变量 x 和因变量 y 之间的依从关系, 也称为函数关系. 它表示对自变量 x 施加的一种运算 $f(\quad)$. 据此, 对 $y = f(x)$ 定义域 D 中的每一个 x, 按照 $f(\quad)$, 就得到唯一确定的 y 值与之对应. 当 $x = x_0(x_0 \in D)$ 时, x 相应的值就是 $x = x_0$ 时的函数值, 记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当函数具体给定时, 对应规则 $f(\quad)$ 将是具体的.

例如, 设 $f(x) = 2x^2 - e^x + 1$, 则对应规则就是 $f(\quad) = 2(\quad)^2 - e^{(\quad)} + 1$.

当 $x = -1$ 时, $f(-1) = 2(-1)^2 - e^{-1} + 1 = 3 - e^{-1}$.

当 $x = a^2$ 时, $f(a^2) = 2a^4 - e^{a^2} + 1$.

在此还需注意, 函数 $y = f(x)$ 中表示对应规则的记号 f 也可改用其它字母. 例如, $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = g(x)$ 等. 有时还可以重复用同一个字母表示, 例如, $y = y(x)$.

② 由函数定义可知, 一个函数要具备三个因素: 定义域、对应规则、值域. 定义域决定了自变量取值的范围, 对应规则确定了 y 的值, 而值域则可由定义域与对应规则完全确定. 因

此，两个变量构成函数关系的决定因素是定义域与对应规则，它们也称之为函数的两要素. 如果两个函数的两要素分别相同，则它们就是相同的函数.

③ 在函数定义中，我们强调函数 y 的值由自变量 x 的值来确定，但不强调 y 必须随 x 的改变而改变. 因此，当 x 在某范围内取值时，函数 y 的值有可能都相等，即 y 是一个常数 C. 那么，$y = C$ 也表示一种函数关系，称之为常量函数.

④ 对于自变量的每一个值，只有唯一的函数值与之对应的函数称为单值函数. 显然，定义 1.1 所定义的函数是单值函数.

对于自变量的每一个值，能有几个确定的函数值与之对应函数称为多值函数.

例如，在平面直角坐标系中，圆心在原点半径为 R 的圆的方程是：$x^2 + y^2 = R^2$. 该方程在闭区间 $[-R, R]$ 上确定一个以 x 为自变量 y 为因变量的函数. 当 x 取 $-R$ 或 R 时，对应的函数值只有一个；但当 x 取 $(-R, R)$ 内的任一个数值时，对应的函数值就有两个. 因此，该函数为多值函数.

在本书中，若无特别说明，函数都是指单值函数.

⑤ 在研究某问题的过程中，如果自变量 x 和因变量 y 的函数关系是用一个仅含有自变量 x 的解析式 $y = f(x)$ 直接表示出来的，则把 $y = f(x)$ 称为显函数.

例如，$y = 2x^2 - 1$，$y = 3\ln x + 2$ 等都是显函数.

如果自变量 x 和 y 的函数关系不是用一个仅含有自变量 x 的解析式给出，而是由方程 $F(x, y) = 0$ 所给出的，则称 y 是 x 的隐函数.

例如，$x^2 - 2y + 3 = 0$，$e^{xy} + \ln(x + y) = 1$ 等都是隐函

数，它们的特点是把函数关系隐含于方程 $F(x,y)=0$ 之中.

关于隐函数，有些可转化为显函数.如上例中，由 $x^2-2y+3=0$，可解出 $y=\frac{1}{2}(x^2+3)$，即可表为显函数的形式；而 $e^{xy}+\ln(x+y)=1$ 则不能转化为显函数.

2. 函数的表示法

函数有三种表示方法，且各自有着明显的特点：

(i) 解析法

用解析表达式表示两个变量 x 与 y 之间关系的方法（如 $y=\sqrt{x}$，$2x+3y=5$ 等）称为解析法.用解析法表示的函数，能够明确地显示 x 与 y 之间的对应关系，便于理论研究，但直观性稍差.

(ii) 图象法

用图形来表示两个变量 x 与 y 之间对应关系的方法（如教材第 2 页例 2）称为图象法.该方法所表示出的函数，比较直观、形象，有时还可帮助我们从图形中找到数学问题的几何解释，以利于问题的研究和解决.特别是在实际的经济问题中，很多经济现象要借助于图形进行分析.因此，图象法是研究大量经济现象的有力工具，但图象法研究函数的精度往往受到限制，而且，有些函数的图象较为复杂时，往往难以画出.

(iii) 表格法

用表格来表示变量 x 与 y 之间对应关系的方法（如教材第 3 页例 4）称为表格法.此方法能明显地表示出变量间的对应数值，在经济工作中也经常使用，但它的缺点是对应关系有时不能完全表示，而且不便于理论研究.

以上表示函数的三种方法各有优缺，在实际问题中，我们

要视研究问题的方便去选用. 本书对于解析法以及解析法与图象法的结合使用为最多.

3. 分段函数

在用解析法表示函数时，有时需要在定义域 D 内的不同区段用不同的式子来表示它. 如

$$y = |x| = \begin{cases} x, x \geqslant 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

又如，教材第 9 页例 8 所表示的函数

$$R(q) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant q \leqslant 20 \\ 12, & 20 < q \leqslant 25 \\ 120.3, & 25 < q \leqslant 70 \end{cases}$$

它们都有一个共同的特点，即对应规则在定义域内不能用一个统一的数学式子表示，我们称这类函数为分段函数.

需要注意的是，分段函数只是用几个式子合起来表示一个函数，而不是表示几个函数.

4. 反函数

(i) 反函数定义

定义 1.2 设 y 是 x 的函数

$$y = f(x) \qquad x \in D, y \in Y$$

如果对于 Y 内的每一个 y，都存在唯一的一个 x 值，使得 $y = f(x)$ 成立，则 x 也是 y 的函数，记作：

$$x = \varphi(y)$$

那么，$x = \varphi(y)$ 称为 $y = f(x)$ 的反函数，也常记作：

$$x = f^{-1}(y)$$

而 $y = f(x)$ 称为直接函数.

关于反函数定义，应明确以下几点：

① 符号 f^{-1} 不是表示 f 的负 1 次方，而是表示对应规则 f 的反对应规则.

② 函数 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y) = \varphi(y)$ 互为反函数.

例如，若把 x 看作自变量，函数

$y = f(x) = \ln x$ ($x \in (0, +\infty), y \in (-\infty, +\infty)$)
为直接函数；若把 y 看成自变量，函数 $y = f(x) = \ln x$ 的反函数为

$$x = f^{-1}(y) = e^y$$

$y \in (-\infty, +\infty), x \in (0, +\infty)$.

在同一坐标系中，$y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图形为同一条曲线.

③ 由于习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此，常把反函数 $x = f^{-1}(y)$ 表示为 $y = f^{-1}(x)$. 事实上，函数的实质是对应规则，只要对应规则不变，自变量与因变量用什么字母表示是无关紧要的. $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 中表示函数对应规则的符号 f^{-1} 没有改变，就表明它们是同一个函数. 例如上例中 $y = \ln x$ 的反函数可写成 $y = e^x$，这里，$x \in (-\infty, +\infty), y \in (0, +\infty)$.

④ 由反函数的定义及上例可明显看出，直接函数与其反函数的定义域、值域互换.

⑤ 并不是所有函数都存在反函数. 如 $y = x^2$，其定义域是 $(-\infty, +\infty)$，值域是 $(0, +\infty)$. 在 $(0, +\infty)$ 内任取 $y \neq 0$，则满足 $x^2 = y$ 的数值 x 有两个(不唯一)：$x = \sqrt{y}, x = -\sqrt{y}$. 因此，$y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内没有反函数，若把 x 限制在 $(-\infty, 0)$ 或 $(0, +\infty)$ 内，则 $y = x^2$ 才有反函数. 总之，只有 x 与 y 是唯一相互确定时，其反函数才存在. 具有该性质的函数，

只能是单调函数,即单调函数一定存在反函数.

⑥ 在同一直角坐标系中,函数 $y = f(x)$ 与它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

(ii) 反函数的求法

若函数 $y = f(x)(x \in D, y \in Y)$ 存在反函数,则反函数可按如下步骤求出:

① 从方程 $y = f(x)$ 中反解出 $x = f^{-1}(y)$,

② 由 $x = f^{-1}(y)$,互换 x, y 即得所求反函数

$$y = f^{-1}(x), x \in Y$$

例1 求函数 $y = 2 + \lg(x + 3)$ 的反函数.

解 由 $y = 2 + \lg(x + 3)$,有

$$x + 3 = 10^{y-2} \quad 即 \quad x = 10^{y-2} - 3$$

把 x 与 y 的位置互换,得 $y = 10^{x-2} - 3$. 于是所求反函数为

$$y = 10^{x-2} - 3$$

在此需要指出的是,当变量具有实际意义时,所求函数的反函数只需进行上述步骤 ① 即可.

例如,圆的面积 S 与半径 r 之间有函数关系:

$$S = \pi r^2 \qquad r \in (0, +\infty)$$

这里半径 r 是自变量,S 是 r 的函数.

如果把面积 S 看作自变量,则半径 r 是 S 的函数,其表达式为 $S = \pi r^2$ 的反函数

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \qquad S \in (0, +\infty)$$

三、基本计算

1. 求函数的定义域

函数的定义域是指使函数有意义自变量的取值范围.

在实际应用问题中，函数的定义域要根据问题的实际意义来确定. 例如，在某种商品的价格一定时，销售量 q 和销售收入 R 之间的关系当 $R = pq$，q 的变化范围是 $(0, +\infty)$.

在纯数学式子给出的函数中，函数的定义域是使该数学式子有意义的自变量的全体. 常见的几种情况为：

① 分式函数的分母不等于零；

② 偶次根式内必须非负；

③ 对数函数的真数大于零；

④ 反正弦、反余弦函数的自变量绝对值小于等于 1；

⑤ 分段函数的定义域是各段定义域的并集；

⑥ 若函数的表达式是由几个数学式子组合而成的，则该函数的定义域是各个数学式子定义域的公共部分.

例 2 求下列函数的定义域：

(1) $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$

(2) $y = \lg(x + 1) + \dfrac{1}{x - 1}$

(3) $y = \arcsin \dfrac{2x - 1}{3}$

(4) $y = \begin{cases} e^x + 1, & 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3x, & x > 2 \end{cases}$

解 (1) $\sqrt{x^2 - x - 6}$ 是一偶次根式，要使它有意义，x 必须满足

$x^2 - x - 6 \geqslant 0$，即 $(x - 3)(x + 2) \geqslant 0$

$$\begin{cases} x - 3 \geqslant 0 \\ x + 2 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x - 3 \leqslant 0 \\ x + 2 \leqslant 0 \end{cases}$$

解之,得 $\begin{cases} x \geqslant 3 \\ x \geqslant -2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \leqslant 3 \\ x \leqslant -2 \end{cases}$,

于是,所求函数的定义域为:$x \geqslant 3$ 或 $x \leqslant -2$. 即 $D = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$.

(2) 此函数是由两个数学式子组合而成的,要使其有意义,须有对数的真数大于零且分式的分母不等于零. 即:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases}, \text{亦即} \begin{matrix} x > -1 \\ x \neq 1 \end{matrix}$$

于是,所求函数的定义域为:$D = (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(3) 要使该反正弦函数有意义,须有

$$\left| \frac{2x - 1}{3} \right| \leqslant 1$$

所求函数的定义域即为该绝对值不等式的解. 关于绝对值不等式,现简略地复习如下:

① 绝对值的定义. 设 x 为一实数,x 的绝对值定义为:

$$|x| = \begin{cases} x, x \geqslant 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

在几何上,$|x|$ 表示数轴上的点 x 到原点的距离.

例如,$|2| = 2$,$|-2| = -(-2) = 2$

注意,$|x|$ 绝不会是负数,仅当 $x = 0$ 时,$|x|$ 才等于零.

② 绝对值不等式.

若 $|x| \leqslant a (a > 0)$,则 $-a \leqslant x \leqslant a$,反之亦成立.

若 $|x| \geqslant a (a > 0)$,则 $x \geqslant a$ 或 $x \leqslant -a$,反之亦成立.

例如,不等式 $|x - 3| > 6$,等价于

$$x - 3 > 6 \text{ 或 } x - 3 < -6$$

即 $x > 9$ 或 $x < -3$

因此，不等式 $|x-3| > 6$ 的解为：$x < -3$ 或 $x > 9$.

下面求上例中不等式 $\left|\frac{2x-1}{3}\right| \leqslant 1$ 的解.

由 $\left|\frac{2x-1}{3}\right| \leqslant 1$ 有 $-1 \leqslant \frac{2x-1}{3} \leqslant 1$

即 $-3 \leqslant 2x-1 \leqslant 3$，$-2 \leqslant 2x \leqslant 4$，从而得 $-1 \leqslant x \leqslant 2$，故所求函数的定义域为 $D = [-1, 2]$.

(4) 这是一个分段函数，其定义域是各段定义域的并集，即 $[0, +\infty]$.

〔练习题〕

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y = \sqrt{x+2} + \frac{1}{x^2-1}$ (2) $y = \arccos \frac{x-1}{2}$

(3) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\ln(2+x)}$ (4) $y = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ x^2 - 1, & 0 \leqslant x < 5 \end{cases}$

2. 两个函数异同的判定

因构成函数的两要素为定义域与对应规则，所以，判定两个函数是否相同，只需看它们的两要素是否完全相同即可.

例 3 判定下列各对函数是否相同：

(1) $y = \ln x^2$ 与 $u = 2\ln x$

(2) $f(x) = x + 2$ 与 $g(x) = \sqrt{(x+2)^2}$

(3) $f(x) = \ln x^3$ 与 $\varphi(t) = 3\ln t$

解 (1) $y = \ln x^2$，其定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$；$u = 2\ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$，两函数的定义域不同，故不是相同函数.

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$，而

$g(x)=|x+2|$，即两函数的对应规则不同，故不是相同函数.

(3)　因 $f(x)=\ln x^3$ 与 $\varphi(t)=3\ln t$ 的定义域均为 $(0,+\infty)$，且在 $(0,+\infty)$ 内有 $\ln x^3=3\ln x$ 或 $\ln t^3=3\ln t$，即对应法则也相同，故 $f(x)$ 与 $\varphi(t)$ 是相同函数.

〔练习题〕

2. 判定下列各对函数是否相同：

(1)　$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x)=x+1$

(2)　$f(x)=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $g(t)=1$

3. 求函数值

对于函数 $y=f(x)$，求其在定义域内某处的函数值时，要首先明确函数的对应规则 $f(\quad)$ 是什么，然后，按自变量 x 的取值代入计算即可.

例 4　已知 $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$，求 $f(-1)$，$f(a)$，$f(x+1)$，$f[f(x)]$.

解　由 $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$，可知其对应规则为 $f(\quad)=\dfrac{(\quad)+1}{(\quad)}$.

因此有

$$f(-1)=\frac{-1+1}{-1}=0$$

$$f(a)=\frac{a+1}{a}\quad(a\neq 0)$$

$$f(x+1)=\frac{(x+1)+1}{x+1}=\frac{x+2}{x+1}(x\neq -1)$$