数学故事丛书

变量中的常量

—函数的故事

上海科学普及出版社

变量中的常量

·函数的故事·

张 远 南

上海科学普及出版社

内容提要

本书系数学故事丛书中的一册。全书由24篇生动有趣的小故事组成。介绍了函数的概念和函数在日常生活中的应用，寓数学知识于趣味之中。主要目的是为提高中学生学习数学的兴趣，加深和扩展中学数学课堂知识。

本书可供中学生、中学数学教师以及广大数学爱好者阅读。

序

函数是中学数学最为重要的概念之一。函数概念的出现，是人类思维从静飞跃到动的必然。当人们试图描述一个运动和变化的世界的时候，导入变量和因变量是极为自然的！

然而，今天的函数的含义与三百年前是大不相同的。公元1692年，莱布尼兹使用“函数”（function）这个词时，所表示的仅仅是“幂”、“坐标”、“切线长”等与曲线上点有关的几何量。而到十八世纪，这一概念已扩展为“由变量和常量所组成的解析表示式”。到十九世纪，解析式的限制被取消，并为对应关系所替代。函数概念的几度扩张，反映了近代数学的迅速发展。

关于函数的理论，是数学王国一座金碧辉煌的城堡，这本书既不打算也不可能对此作详尽的介绍。作者的目的只是希望激起读者的兴趣，并由此引起他们自觉学习这一知识的欲望。因为作者认定：兴趣是最好的老师，一个人对科学的热爱和献身往往是从兴趣开始。然而人类智慧的传递，是一项高超的艺术。从教到学，从学到会，从会到用，又从用到创造，这是一连串极为能动的过程。作者在长期实践中，有感于普通教学的局限和不足，希望能通过非教学的手段，实现人类智慧接力棒的传递。

基于上述目的，作者计划尽自己的力量，写一套各自独立的趣味数学读物。它们是：《偶然中的必然》、《未知中

的已知》、《否定中的肯定》、《无限中的有限》、《变量中的常量》、《抽象中的形象》等。分别讲述概率、方程、逻辑、极限、函数、图形等故事。作者心目中的读者，是广大的中学生和数学爱好者，他们是衡量本书最为精确的天平。

由于作者水平有限，书中的错误在所难免，敬请读者不吝指出。

但愿本书能为读者开拓视野，探求未来，充当引导！

张远南

1988年10月

目　　录

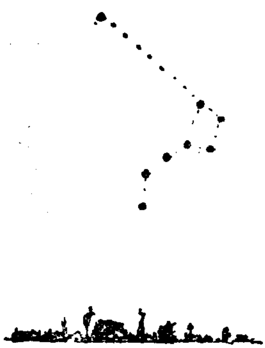
一、一个永恒运动的世界

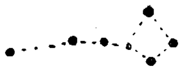
我们这个星球，宛如飘浮在浩瀚宇宙中的一方岛屿，从茫茫中来，又向茫茫中去。生息在这一星球上的生命，经历了数亿年的繁衍和进化，终于在创世纪的今天，造就了人类的高度智慧和文明。

然而，尽管人类已经有着如此之多的发现，但仍不知道我们周围的宇宙是怎样开始的，也不知道它将怎样终结！万物都在时间长河中流淌着，变化着。从过去变化到现在，又从现在变化到将来。静止是暂时的，运动却是永恒！

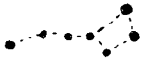
天地之间，大概再没有什么能比闪烁在天空中的星星，更能引起远古人的遐想。他们想象在天庭上应该有一个如同人世间那般繁华的街市。而那些本身发着亮光的星宿，则忠诚地守护在天宫的特定位置，永恒不动。后来，这些星星便区别于月亮和行星，称之为恒星。其实，恒星的称呼是不确切的，只是由于它离我们太远了，以致于它们间的任何运动，都慢得使人一辈子感觉不出来！

北斗七星，大约是北天最为明显的星座之一。在天文学上有个正式的名字叫大熊星座。大熊座的七颗亮星，组成一把勺子的样子（右图），勺底两星的连线延长约5倍处，可寻找到北极星。





（1）



（2）

（3）

在北天的夜空是很容易辨认的。

大概所有的人一辈子见到的北斗七星，总是如同上图那般形状，这是不言而喻的。人的生命太短暂了！几十年的时光，对于天文数字般的岁月，是几乎可以忽略不计的！然而有幸的是：现代科学的进展，使我们有可能从容地追溯过去，和精确地预测将来。左图的（1）、（2）、（3）是经过测算，人类在十万年前、现在和十万年后应该看到和可以看到的北斗七星，它们的形状是大不一样的！

不仅天在动，而且地也在动。火山的喷发，地层的断裂，冰川的推移，泥石的奔流，这一切都还只是局部的现象。更加不可思议的是：我们脚下站立着的大地，也如同水面上的船只那样，在地幔上缓慢地漂移着！

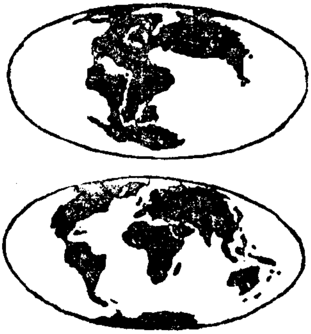
本世纪初，德国年青的气象学家魏根纳（Wegener，1880～1930）发现：大西洋两岸，特别是非洲和南美洲海岸轮廓，非常相似。这其间究竟隐含着什么奥秘呢？魏根纳为此而深深思索着。

一天，魏根纳正在书房看报，一个偶然的变故，激发了他的灵感。由于座椅年久失修，某个接头突然断裂，魏的身体骤然间向后仰去，持在手中的报纸被猛然撕裂。在这一切过去之后，当魏根纳重新注视手上的两半报纸时，顿时醒悟了！长期萦回

在脑中的思绪跟眼前的现象，碰撞出智慧的火花！一个伟大的思想在魏根纳的脑中闪现了：世界的大陆原本是连在一起的，后来由于某种原因而破裂分离了！

此后，魏根纳奔波于大西洋两岸，为自己的理论寻找证据。公元1912年，“大陆漂移说”终于诞生了！

今天，大陆漂移学说已为整个世界所公认。据美国宇航局的最新测定表明，目前大陆移动仍在持续：如北美正以每年1.52厘米的速度远离欧洲而去；而澳大利亚却以每年6.858厘米的速度，向夏威夷群岛飘来！



世间万物都在变化，“不变”反而使人充满着疑惑，下面的故事是再生动也不过了。

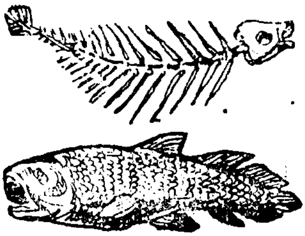
公元1938年12月22日，在非洲的科摩罗群岛附近，渔民们捕捉到一条怪鱼。这条鱼全身披着六角形的鳞片，长着四只“肉足”，尾巴就像古代勇士用的长矛。当时渔民们对此并不在意，因为每天从海里网上来的奇形怪状的生物多得是！于是这条鱼便顺理成章地成了美味佳肴。

话说当地博物馆有个年轻的女管理员叫拉蒂迈，此人平时热心于鱼类学研究。当她听到消息闻讯赶来的时候，见到的已是一堆残皮剩骨。不过，出于职业的爱好，拉蒂迈小姐还是把鱼的头骨收集了起来，寄给当时的鱼类学权威，南非罗兹大学的史密斯教授。

教授接信后，顿时目瞪口呆。原来这种长着矛尾的鱼，早在七千万年前就已绝种了。科学家们过去只是在化石中见

到它。眼前发生的一切，使教授由惊震转为打一个大大的问号。于是不惜定下十万元重金，悬赏捕捉第二条矛尾鱼！

时间一年又一年地过去，不知不觉过了十四个年头。正当史密斯博士抱恨绝望之际，公元1952年12月20日，教授突然收到了一封电报，电文是："捉到了您所需要的鱼。"史密斯见电欣喜若狂，立即乘机赶往当地。当教授用颤抖的双手打开鱼布包时，一股热泪夺眶而出……



那么，为什么一条矛尾鱼竟会引起这样大的轰动呢？原来现在捉到的矛尾鱼和七千万年前的化石相比，几乎看不到变异！矛尾鱼在经历了亿万年的沧桑之后，竟然既没有灭绝，也没有进化。这一"不变"的迷惑，无疑是对"变"的进化论的挑战！究竟是达尔文的理论需要修正呢，还是由于其他更加深刻的原因？争论至今仍在继续！

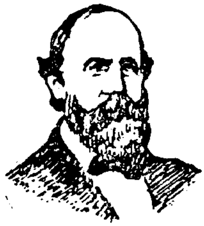
我们前面讲过，这个世界的一切量，都跟随着时间的变化而变化。时间是最原始的自行变化的量，其他量则是因变量。一般地说，如果在某一变化过程中有两个变量x，y，对于变量x在研究范围内的每一个确定的值，变量y都有唯一确定的值和它对应，那么变量x就称为自变量，而变量y则称为因变量，或变量x的函数，记为：

$$y = f(x)$$

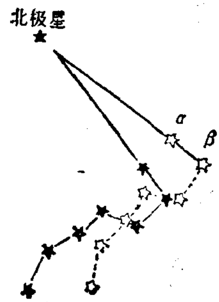
函数一语，起用于公元1692年，最早见自德国数学家莱布尼兹的著作。记号f(x)则是由瑞士数学家欧拉于公元1724年首次使用的。上面我们所讲的函数定义，属于德国数学家黎曼（Riemann，1826～1866）。我国引进函数概念，始

于1859年，首见于清代数学家李善兰（1811～1882）的译作。

一个量如果在所研究的问题中保持同一确定的数值，这样的量我们称为常量。常量并不是绝对的。如果某一变量在局部时空中，其变化是那样地微不足道，那么这样的量，在这一时空中便可以看成常量。例如读者所熟知的“三角形内角和为180°”的定理，那只是在平面上才成立的。但绝对平的面是不存在的。即使是水平面，由于地心引力的关系，也是呈球面弯曲的。然而，这丝毫没有影响广大读者，去掌握和应用平面的这条定理！又如北斗七星，诚如前面所说，它前十万年与后十万年的位置是大不相同的。但在近几个世纪内，我们完全可以把它看成是恒定的，甚至可以利用它来精确地判定其他星体的位置！



（1826～1866）



左图中α、β是北斗七星中极亮的两颗星。沿βα方向延长到原来的5倍，那里有一颗稍微暗一点的星，那就是北天群星都绕它旋转的北极星！尽管这些星体的相对位置也在改变，但上述的位置法则，至少还可以延用几百年！

二、“守株待兔”古今辩

有一则寓意深刻的故事叫《守株待兔》，大意是：

宋国有个农民，有一天，他在地里耕作，看到一只兔子从身旁飞跑而过，恰好撞在地边的一棵大树上，折断了颈项，死于树下。那个农民不费吹灰之力，拾得了一只现成的兔子。

这个农民自从拾到兔子之后，就想入非非，从此废弃耕耘，每天坐在那棵大树底下，等待着又一只兔子撞树而来。结果非但没有再拾到兔子，反而把田地给荒芜了！

这则寓言，出自先秦著作《韩非子》，脍炙人口，已经流传了二千二百多年。

两千年来，人们总以为“待兔”不得，罪在“守株”！其实，抱怨“守株”是没有道理的。问题的关键在于兔子的运动规律。倘若通往大树的路是兔子所必经的，那么“守株”又将何妨？

Leonardo da Vinci

（1452～1519）

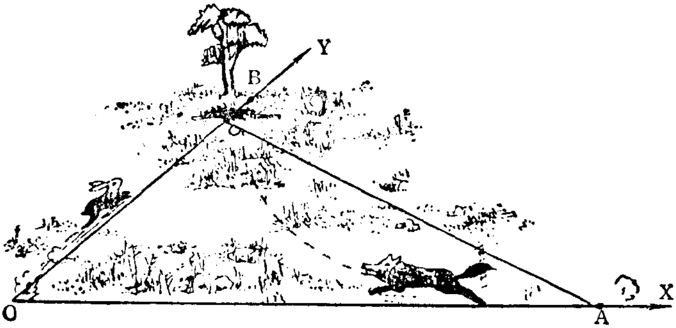
然而正如上节故事中我们讲到的，我们周围的世界是一个不断运动的世界。兔子的活动，在时空的长河中，划出一条千奇百怪的轨迹，希望这条轨迹能与树木在时空中的轨线再次相交，无疑是极为渺茫的，这正是这位农人悲剧之所在！

下面一则更为精妙的例子，可以使人们生动地看到问题的症结。例中表明如能

弄清了兔子运动的规律，有时“守”甚至还是明智的！

列奥纳多·达·芬奇（Leonardo da Vinci，1452～1519）是意大利文艺复兴时期的艺术大师，他那传闻很广的《画蛋》故事，对于青少年读者，可说是很熟悉的。达·芬奇不仅对绘画艺术造诣极深，而且对数学也颇有研究。他曾提出过一个饶有趣味的“饿狼扑兔”问题：

一只兔子正在洞穴(c)南面60码的地方(o)觅食，一只饿狼此刻正在兔子正东100码的地方(A)游荡。兔子回首间猛



然遇见了饿狼的贪婪的目光，预感大难临头，于是急忙向自己的洞穴奔去。说时迟，那时快，恶狼见即将到口的美食就要失落，旋即以一倍于兔子的速度紧盯着兔子追去。于是，狼与兔之间，展开了一场生与死惊心动魄的追逐。

问：兔子能否逃脱厄运？

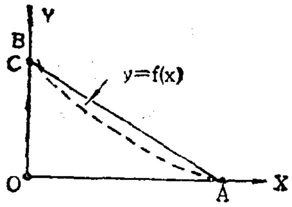
有人作过以下一番计算：

以O为原点，OA，OC分别为X，Y轴，以1码为单位长。则OA＝100，OC＝60。根据勾股定理，在RtΔAOC中

$$AC=\sqrt{OA^2+OC^2}$$

$$=\sqrt{100^2+60^2}=116.6$$

这意味着：倘若饿狼沿AC方向直奔兔子洞穴，那么由于兔子速度只有狼速度的一半，当饿狼到达兔穴洞口时，兔子只跑了$116.6 \div 2 = 58.3$码距离，离洞口尚差1.7码。这时先行到达洞口的饿狼，完全可以守在洞口，“坐等”美餐的到来！



以上计算似乎天衣无缝，结论只能是兔子厄运难逃。可实际上这是错误的！饿狼不可能未卜先知地直奔兔穴洞口去“坐守”，它的策略只能是死死盯住运动中的兔子，这样它本身也就运动成一条曲线，这条曲线可以用解析的方法推导出来：

$$y = \frac{1}{30}x^{\frac{3}{2}} - 10x^{\frac{1}{2}} + \frac{200}{3}$$

当$x = 0$时，代入上式得$y = 66\frac{2}{3}$。

这意味着，如若北边没有兔子洞，那么当兔子跑到离原点$66\frac{2}{3}$码的B点时，恰被饿狼逮住。然而有幸的是，兔子洞离原点仅有60码，此时此刻兔子早已安然进洞了！

随着“饿狼扑兔”谜底的解开，对于“守株待兔”的辩析，似乎也已接近尾声。不料，后来又有人提出异议，对《守株待兔》故事的真实性表示怀疑，理由是：那么机灵的兔子怎会自己撞到偌大的树桩上去？它那两只精灵的大眼睛干什么去了？！

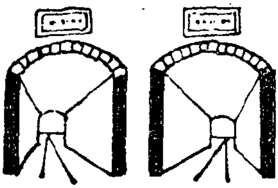
说得不无道理！不过，答案是肯定的。要说清这一点，还得从眼睛的功能谈起。

眼睛的视觉功能是有趣的：一只眼睛能够看清周围的物

体，但却无法准确判断眼睛与物体之间的距离。下面的实验可以极为生动地证实这一点。

找两支削尖了的铅笔，两只手各拿起一支。然后如同右图那样，闭上一只眼睛，让两支笔的笔尖从远到近，对准靠拢。这时，你会发现一种奇怪的现象：任你怎么集中注意力，两支笔尖总是交错而过！然而，如若你睁着双眼，要想对准笔尖，那是很容易做到的。

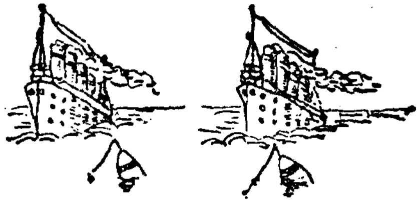
以上实验表明：用两只眼看，能准确判断物体的位置，而用一只眼看却不能！那么，为什么用两只眼睛便能判定物体的准确位置呢？



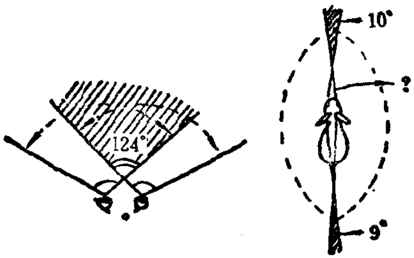
原来，同一物体在人的两眼中看出来的图象是不一样的！左图是一个隧道分别在两眼中的图象，它们之间的不同是很明显的。为了证明这两侧图形确是由你左右两眼分别看出的，你可以把上图摆在你的面前，然后两眼凝视图中央空隙的地方，如此集中精力几秒钟，并全神贯注于一种要看清图后更远的意念。这样，无须很久，你的眼前便会出现一种神奇的景象：图中左右两侧的形象逐渐靠近，并最终融合在一起，变成了一幅壮观的立体隧道图形！

下页图是个很好的练习，它选自别莱利曼《趣味物理学》第九章。当你感到两侧图象靠近并融合时，你会领略到一幅壮丽的海上景观：一艘轮船在宽阔的海面上，乘风破浪！

现在我们回到兔子撞树的讨论上来。



仔细观察一下便会发现，人眼与兔眼的位置是不相同的：人的两眼长在前方，相距很近，而兔的两眼却长在头的两侧。又根据测定，兔子每只眼睛可见视野为189°30′，而人的每只眼睛可见视野约166°。不过，由于人的两眼长在前



面，因此两眼同时能看到的视野有124°左右。在这一区域内的物体，人眼能精确判定其位置。而兔眼虽说能看到周围任何东西，但两眼重合视野只有19°，其中前方10°，后方9°。因此兔子只有在很小的视区内才能准确判断物体的远近！

由上图还能看出：纵然兔子对来自四方的威胁都能敏锐地感觉，但对鼻子底下的东西（图中“？”号区域），却完全看不到！况且在惊慌失措的奔命中，说不准早已昏了头脑，撞树的事也就难保不会发生。

“守株待兔”的故事，是韩非子亲眼所见呢，还是他杜