高等学校教学参考书

应用图论

苗邦均 编

中国铁道出版社
1982年·北京

内 容 提 要

本书为高等学校教学参考书。主要叙述图论的基本知识及其应用，在应用方面重点选编了与交通运输、信息传输有关的内容。全书共分七章，简要地介绍了图的基本概念、图的运算、图在电子计算机里的存储、图的圈和树、路径问题、极大流问题、随机网上的极大流以及最小费用、最优定址等内容。另外，为了便于读者学习，在第一章内还选编了集合论和矩阵的基本知识。本书供高等工科院校师生、研究生及工程技术人员、科研人员参考用。

高等学校教学参考书
应 用 图 论
苗 邦 均 编
中国铁道出版社出版
责任编辑 张显善
封面设计 翟 达
新华书店北京发行所发行
各 地 新 华 书 店 经 售
中国铁道出版社印刷厂印
开本：787×1092 印张：9.75 字数：243千
1980年4月 第1版 1982年10月 第2次印刷
印数：10,001—13,000册 定价：1.05元

前 言

一、由于图论处理问题的方法的多样性和它的应用广泛性，要想把它的主要内容概括到一本书里是很困难的。本书只选编了与交通运输管理有关的内容，这些内容对信息传输也是直接有关的。

二、为了便于读者查阅图论所涉及的预备知识，本书选编了集合论和矩阵的基础知识，对于熟悉这部分内容的读者可以从第二章读起。

三、和其它数学分支一样，现在随机性图论正在发展之中。在这方面有两种趋向，其一是把图与马尔科夫链相联系，使之相辅相成；其二是借助统计方法研究随机网上的流，我们在第六章后选编了后一内容的一部分。但本书主要是讲确定性网。

四、图论的应用越来越多地依赖于电子计算机，因此我们选编了图的存储方式和某些计算的Fortran程序。然而不应有错觉：对有限图无须作理论研究，只须让电子计算机采用历数的方法求最优解。正确的途径是先由理论研究剔除绝对多数的不良解，而后令电子计算机求解；或者是先由理论研究确定出最优解的方法，而后令电子计算机去执行。

五、有些定义在引入之后，严格地论证了它们的性质，如割集和基本割集。一俟读者熟悉之后，则说法上常采用略语，当然以不致混淆为限。例如把基本割集略为割集。

另外，有些内容常出现在几种场合，如割集，顶点集的关联集，余圈等，乃是同一事物的不同侧面，读者应以掌握实质为中心。

六、本书虽然比较注意系统性和论证的严谨性，然而作为教学参考书，读者宜把注意力放在方法的实质内容上，不宜在论证上花过多的时间。

七、本书经长沙铁道学院李慰萱同志审阅，并得到长院应用数学研究室侯振挺和中国科学院数学所王光寅二同志的关怀，一并表示谢意。

苗邦均

1979.7

目　　录

第一章 预备知识

第一节 集合论的有关知识

集合的概念是现代数学最基本的概念。构造性的集合论是实变函数、应用概率论的基础；而公理化的集合论不但是测度论、数学概率和布尔代数的基础，而且随着数理逻辑的不断发展，其重要性日益显著。集合论的发展，今天已普遍到这样的程度：很难找到一本近代数学书不用集合概念。图论也是广泛使用集合概念的。

一、集合及其运算

定义1.1：不论在纯数学还是在应用数学中，经常考虑具有某种特殊性质东西的全体，这样的全体就叫一个**集合**。我们总用一个大写字母表示集合。构成集合的每一个东西叫作集合的**元素**，简称元。为了把集合概念一目了然地表示出来，引入下列符号：

$$(\exists x)\ P$$

表示“存在具有性质P的个体x”，其中“$\exists$”叫作特称符号。

$$(\forall x)\ P$$

表示“对于所有x都有性质P”，其中“$\forall$”叫全称符号。具有特殊性质P的元素x的集合S表示为：

$$S=\{x;P(x)\}$$

a是S的元素，或a属于S可表示为：

$$a\in S$$

否则表示为 $a\,\overline{\in}\,S$

集合的元素可以是任何类型的东西。例如一组选定的点；全国各火车站；全国铁路各站间的所有区段；各区段的通过能力；全国铁路职工等等都是集合的例子。

关于集合的运算我们给出以下定义。

定义1.2：我们说集合A与B相等，记作

$$A=B$$

系指A与B有共同的元素。即$x\in A\Longleftrightarrow x\in B$〔符号“$\Longleftrightarrow$”称为等价符，两个命题$P_1$与$P_2$等价：$P_1\Longleftrightarrow P_2$表示$P_1$与$P_2$同真（成立）或同假（不成立）〕。

定义1.3：我们说集合A为集合B的子集，系指A中所有元均在B中：

$$a\in A\Longrightarrow a\in B$$

记为

$$A\subset B$$

（符号$\Longrightarrow$称为蕴涵符。命题P_1蕴涵P_2：$P_1\Longrightarrow P_2$。在本书范围内可理解为P_1成立时P_2必成立。其全部含义是，当P_1成立而P_2不成立时，$P_1\Longrightarrow P_2$为假；否则为真）。

定义1.4：不含任何元素的集合叫作空集，记为ϕ。须知只有一个元素零的集合：

$$A=\{0\}$$

不是空集。同样$\{\phi\}$含有一个元素ϕ，也不是空集。由于逻辑上的理由，规定任一集合均以空集为子集。

定义1.5：我们说集合A与B的并为集合C，系指C包含且只包含A和B中的元：

$$x\in C\Longleftrightarrow x\in A\text{或}x\in B(\text{至少有一个成立})。$$

记为

$$C=A\cup B$$

例1.1：

$$A=\{x;\ 0\leqslant x\leqslant 5\};\quad B=\{x;\ 3\leqslant x<7\}$$

则

$$C=A\cup B=\{x;\ 0\leqslant x<7\}$$

定义1.6：我们说集合A与B的交（集）为C，系指C包含且只包含A与B的公共元素：

$$x\in C\Longleftrightarrow x\in A\text{与}x\in B\ (\text{同时成立})。$$

记为

$$C=A\cap B$$

例1.2：设A与B为例1.1中的集合，则$C=A\cap B=\{x;\ 3\leqslant x\leqslant 5\}$

定义1.7：我们说集合A与B的差集为C，系指C包含且只包含属于A而不属于B的元素：

$$x\in C\Longleftrightarrow x\in A\text{与}x\overline{\in}B\ (\text{同时成立})。$$

记为

$$C=A-B$$

例1.3：对于例1.1中的集合A与B，$C=A-B=\{x;\ 0\leqslant x<3\}$，

又

$$C=B-A=\{x;\ 5<x<7\}$$

定义1.8：我们说集合A与B的对称差为C，系指

$$C=(A-B)\cup(B-A)$$

记为

$$C=A\triangle B$$

例1.4：对于例1.1中的集合A与B，

$$C=A\triangle B=\{x;\ 0\leqslant x<3\}\cup\{x;\ 5<x<7\}=\{x;\ 0\leqslant x<3\text{或}5<x<7\}。$$

定义1.9：设V为一个集合，以V的所有子集为元素的集合称为V的幂集合，记为$\mathscr{P}(V)$。特别ϕ与V本身均属于$\mathscr{P}(V)$：

$$\phi\in\mathscr{P}(V);\quad V\in\mathscr{P}(V)$$

此外对任一$A\in\mathscr{P}(V)$称

$$\overline{A}_V=V-A$$

为A（关于V）的补（集）。在不致混淆的条件下，为了方便用$\overline{A}$表示$\overline{A}_V$。

定义1.10：我们说集合C为A与B的**笛卡尔乘积**（或直积），系指

$$C=A\times B=\{(a,b);\ a\in A,\ b\in B\}$$

并称A与B为C的边界。

关于这些运算，我们指出下列性质。

性质1.1：交换律

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A,\quad A\triangle B=B\triangle A$$

性质1.2：结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

性质1.3：分配律

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

性质1.4：吸收律

$$(A\cap B)\cup A=A$$

我们在下边对分配律给出证明，其余各性质希望读者自己补出证明，借以熟悉这些性质。

证：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

设：
$$x\in(A\cup B)\cap C\xLeftrightarrow{\text{定义1.6}}x\in A\cup B\text{与}x\in C$$
$$\xLeftrightarrow{\text{定义1.5}}(x\in A\text{与}x\in C)\text{或}(x\in B\text{与}x\in C)$$
$$\xLeftrightarrow{\text{定义1.6}}x\in(A\cap C)\text{或}x\in(B\cap C)$$
$$\xLeftrightarrow{\text{定义1.5}}x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

故得 $x\in(A\cup B)\cap C\Longleftrightarrow x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$

由定义1.2得知 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

再证 $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

设
$$x\in(A\cap B)\cup C\xLeftrightarrow{\text{定义1.5}}x\in(A\cap B)\text{或}x\in C$$
$$\xLeftrightarrow{\text{定义1.6}}(x\in A\text{与}x\in B)\text{或}x\in C$$
$$\xLeftrightarrow{\text{定义1.5}}x\in(A\cup C)\text{与}x\in(B\cup C)$$
$$\xLeftrightarrow{\text{定义1.6}}x\in(A\cup C)\cap(B\cup C)$$

为了显示集合运算的直观意义，我们给出它们的图解。阴影部分表示运算结果（见图1—1）。

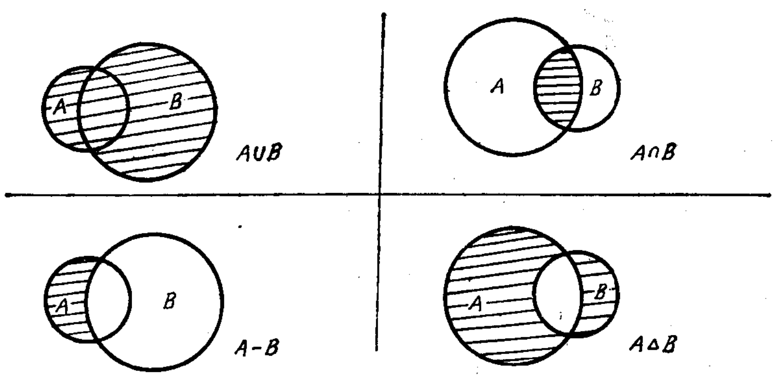

图1—1 集合运算的图解

性质1.5：De Morgan(狄摩根)公式

$$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B},\qquad\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B},$$
$$\overline{\overline{A}}=A。\qquad A\cup\overline{A}=V，A\cap\overline{A}=\phi。$$

今证：
$$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

设：
$$x\in\overline{(A\cup B)}\xLeftrightarrow{\text{定义1.9,定义1.7}}x\in V\ 与\ x\,\overline{\in}\,(A\cup B)\Longleftrightarrow$$

$$\xLeftrightarrow{\text{定义1.5}}x\in V 与 (x\,\overline{\in}\,A 与 x\,\overline{\in}\,B)\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow(x\in V 与 x\,\overline{\in}\,A) 与 (x\in V 与 x\,\overline{\in}\,B)\Longleftrightarrow$$

$$\xLeftrightarrow{\text{定义1.8}}x\in V-A 与 x\in V-B\xLeftrightarrow{\text{定义1.9}}x\in\overline{A} 与 x\in\overline{B}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{定义1.6}}x\in\overline{A}\cap\overline{B}$$

故得
$$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

作为练习请读者补证出其余各条。

二、映射

定义1.11：我们说Γ是从集合A到B中的一个**映射**，系指Γ是一个对应关系或法则，使对任一$a\in A$，有B的子集Γ_a与之对应。记为

$$A\xrightarrow{\Gamma}B\qquad 我们也允许\Gamma_a=\phi$$

如图1—2所示，其中$\Gamma_a=\{b_1,b_2,\cdots,b_k\}$，特别当$k=1$时，称映射$\Gamma$为单值的，记为

$$\Gamma_a=b\qquad 或\qquad \Gamma(a)=b$$

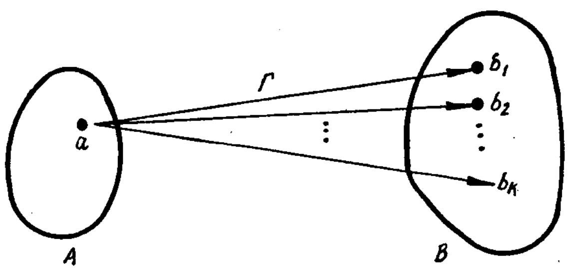

图1—2　映射

并说A为映射Γ的定义域，称$\Gamma(A)=\bigcup\limits_{a\in A}\Gamma_a$为$\Gamma$的值域。一般来说$\Gamma(A)\subset B$，即$\Gamma(A)$为B的真子集。(A为B的真子集，系指：(1)A为B的子集；(2)$(\exists x)\ x\in B$但$x\,\overline{\in}\,A$)。特别当

$$\Gamma(A)=B$$

时，我们说Γ为从A到B**上**的映射。

定义1.12：我们说两个映射Γ_1与Γ_2相等

$$\Gamma_1=\Gamma_2$$

系指Γ_1与Γ_2有共同的定义域A，和共同的值域$\Gamma_1(A)=\Gamma_2(A)$，而且对于任一$a\in A$

总有
$$\Gamma_1(a)=\Gamma_2(a)$$

定义1.13：若$A\xrightarrow{\Gamma}B$，且对任一$a\in A$总有$\Gamma(a)=b_0$ 则称Γ为以b_0为值的**常值映射**。若$A=B$，而且对任一$a\in A$

总有 $$\Gamma_a = a$$
则称Γ为**恒等映射**，用I_A来表示。

定义1.14：设$A \xrightarrow{\Gamma} B$，若Γ是单值的，且由$\Gamma(a)=\Gamma(a')\Longrightarrow a=a'$，则称Γ为**1－1对应的映射**。若Γ是从A到B上的1－1对应的映射，则称Γ为**完全的1-1对应的映射**。

定义1.15：若Γ为从集合A到B上的完全1－1对应的映射，我们定义Γ的**逆映射**Γ^{-1}如下：

对任一$b\in B$，定义$\Gamma^{-1}(b)=a$

其中$a\in A$，$\Gamma(a)=b$。易见Γ^{-1}的定义域与值域恰分别为Γ的值域和定义域。

定义1.16：设$A \xrightarrow{\Gamma_1} B$，$B \xrightarrow{\Gamma_2} C$，定义由A到C的映射$\Gamma=\Gamma_2\circ\Gamma_1$如下：

对任一$a\in A$，$\Gamma(a) = (\Gamma_2\circ\Gamma_1)(a)=\Gamma_2[\Gamma_1(a)]$并称$\Gamma_1\circ\Gamma_2$为$\Gamma_1$与$\Gamma_2$的**复合映射**。

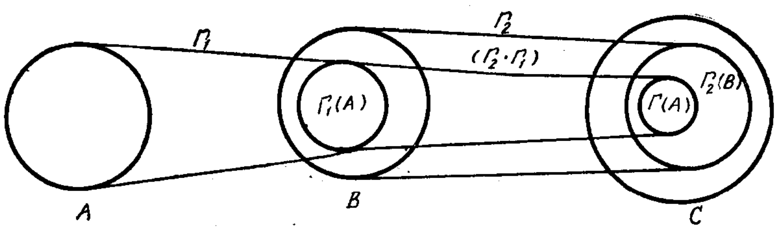

图1－3　复合映射

定义1.17：设$A_1\subset A$，并有$A \xrightarrow{\Gamma} B$，$A_1 \xrightarrow{\Gamma_1} B$。若对任一$a_1\in A_1$总有$\Gamma(a_1)=\Gamma_1(a_1)$则称$\Gamma_1$为Γ在$A_1$上的**限制**；反之称Γ为$\Gamma_1$在A上的**扩张**，记为$\Gamma_1=\Gamma|A_1$

定义1.18：设$A \xrightarrow{\Gamma} B$，由此定义

$$\mathscr{P}(A) \xrightarrow{\widetilde{\Gamma}} \mathscr{P}(B):\ X\in\mathscr{P}(A)\text{时},\widetilde{\Gamma}(X)=\{\Gamma(a):\ a\in X\}\in\mathscr{P}(B)$$

及

$$\mathscr{P}(B) \xrightarrow{\widetilde{\Gamma}^{-1}} \mathscr{P}(A);\ Y\in\mathscr{P}(B)\text{时},\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y)=\{x:\Gamma(x)\in Y\}\in\mathscr{P}(A)。$$

性质1.6：设X_1，$X_2\in\mathscr{P}(A)$，Y_1，$Y_2\in\mathscr{P}(B)$则

1. $X_1\subset X_2 \Longrightarrow \widetilde{\Gamma}(X_1)\subset\widetilde{\Gamma}(X_2)$；
2. $\widetilde{\Gamma}(X_1\cup X_2)=\widetilde{\Gamma}(X_1)\cup\widetilde{\Gamma}(X_2)$；
3. $\widetilde{\Gamma}(X_1\cap X_2)\subset\widetilde{\Gamma}(X_1)\cap\widetilde{\Gamma}(X_2)$；
4. $Y_1\subset Y_2\Longrightarrow\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y_1)\subset\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y_2)$；
5. $\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y_1\cup Y_2)=\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y_1)\cup\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y_2)$；
6. $\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y_1\cap Y_2)=\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y_1)\cup\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y_2)$；
7. $\widetilde{\Gamma}^{-1}(\overline{Y}_1)=\overline{\widetilde{\Gamma}^{-1}(Y_1)}$。

注：我们从Γ诱导出来的$\widetilde{\Gamma}$及$\widetilde{\Gamma}^{-1}$，为书写上的方便计，在不致混淆的条件下，仍写为Γ及Γ^{-1}。

作为练习请读者首先从直观上掌握上列各性质，而后给出论证。试找出两个具体的X_1与X_2使$\Gamma(X_1\cap X_2)\neq\Gamma(X_1)\cap\Gamma(X_2)$。

定义1.19：我们说A_1，A_2，…A_k为集合A的一个分割，系指

（1）对任何不同的i,j　　　　$A_i \cap A_j = \phi$；

（2）　　　　$\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i = A$。

三、基数（势）

我们的图论主要讨论有限图，偶然涉及可列情况。因此我们的基数或势至多为可列情况。所谓基数是源于个数的数学概念，详述于下。

定义1.20：我们说集合A与B是等价的，系指存在一个从A到B上的完全1－1对应的映射。记为A～B。

练习1：试举出三对等价集。

性质1.7：

（1）A～A；

（2）若$A \sim B \Longrightarrow B \sim A$；

（3）若A～B与$B \sim C \Longrightarrow A \sim C$。

证明：

（1）取$\Gamma(a)$为A上的恒等映射：$I(a)=a$，则$I(a)$为A到A上的完全1－1对应的映射。

（2）因为A～B，故存在A到B上的完全1－1映射$\Gamma(a)$。

由定义1.15可知$\Gamma^{-1}(b)$为从B到A上的完全1－1映射。

（3）因为A～B与B～C，故存在完全1－1对应的映射Γ_1与Γ_2：

$$A \xrightarrow{\Gamma_1} B,\quad B \xrightarrow{\Gamma_2} C。$$

易见$\Gamma=\Gamma_2 \circ \Gamma_1$为从A到C上的完全1－1映射。

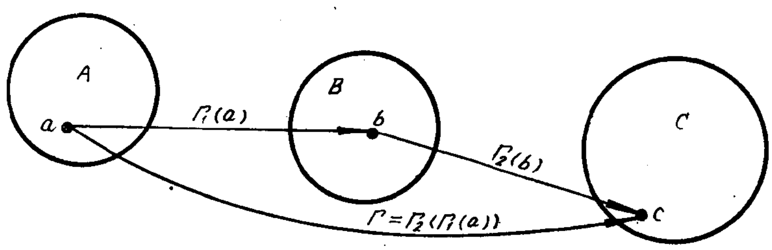

图1－4　复合映射

定义1.21：凡集合A与集合B等价，我们就说它们有共同的基数或势。A的势记为$|A|$，于是由A～B，则得$|A|=|B|$。

基数或势是表示集合中元素多少的指标，当两个集合等价时，则可以说它们有一样多的元，从而它们有共同的势。集合$S=\{a_1,\ a_2,\cdots a_n\}$的势为$n$：记为$|S|=n$。势$|S|<\infty$的集合S称为**有限集合**。凡与S等价的集合的势显然也是n。

定义1.22：令$I=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$。

凡与I等价的集合均称为可数集。集合A可数的充分必要条件是可排为

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$$

第二节　矩阵的有关知识

矩阵和置换群对图论的发展起着巨大作用，然而我们只把这些作为方法。为便于不熟悉这些内容的读者能顺利掌握图论本身，免得各处查找矩阵的有关公式和基本概念，我们在这里提供矩阵的最基本的常识。

一、矩阵及其运算

定义1.23：$m\times n$ 阶矩阵，系指排列为 m 行 n 列的数字或元素组成的矩形：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

或简写为　$A=[a_{ij}]$，当需要强调矩阵的阶数时，将A改为A_{mn}。除非有特殊说明，总设元素a_{ij}为实数。

定义1.24：两个矩阵A和B称为相等，系指它们的阶数相同，而且对一切 i，j 总有：$a_{ij}=b_{ij}$。

特别称A_{nn}为**方阵**。

定义1.25：

（1）设$A=[a_{ij}]$，对任意常数c，定义$cA=[ca_{ij}]$，

$$Ac=[a_{ij}\cdot c];$$

（2）设A与B有相同的阶：$A_{mn}=[a_{ij}]$；$B_{mn}=[b_{ij}]$。定义它们的**和**为$C=[c_{ij}]$，系指对一切i、j，$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$记为

$$C=A+B;$$

（3）设$A_{mr}=[a_{ij}]$，$B_{rn}=[b_{ij}]$。定义它们的**积**为$C_{mn}=[c_{ij}]$，系指对一切 i 和 j：$c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{r}a_{ik}b_{kj}$记为

$$C=A\cdot B;$$

（4）我们说矩阵$A_{mn}=[a_{ik}]$的转置为$A'_{nm}=[a'_{ij}]$，系指对一切 i 与 j 总有：

$$a_{ij}=a'_{ji}。$$

性质1.8：关于矩阵的上列运算有下列性质，特别需要指出的是乘法一般没有交换律：

（1）结合律　$(A+B)+C=A+(B+C)$；

$$(AB)C=A(BC)。$$

（2）分配律　$C(A+B)=CA+CB$；

$$(A+B)C=AC+BC。$$

（3）交换律　$A+B=B+A$。

（4）转置律　$(A')'=A$；　$(A+B)'=A'+B'$；

$$(AB)'=B'A'。$$

定义1.26：元素a_{11}，a_{22}，a_{33}，…，a_{nn}叫作方阵$A_{nn}=[a_{ij}]$的主对角线元，或说它们

构成方阵的**主对角线**。

若方阵$A_{nn}=[a_{ij}]$的元关于主对角线对称：$a_{ij}=a_{ji}$，则说此方阵为**对称**的。

练习2：设A为一个对称方阵，则$A'=A$。对任一矩阵A_{mn}总有AA'和$A'A$是对称方阵。

定义1.27：若对称方阵，除主对角线上的元之外均为零，则称为对角矩阵。若对角矩阵的主对角线元均为单位1，则称为单位矩阵，记为I。

练习3：若D_{mm}、D_{nn}为对角矩阵，则$D_{mm}A_{mn}$可由A_{mn}的各行以D_{mm}相应的主对角线元相乘得：$D_{mm}A_{mn}=[b_{ij}]$时 $b_{ij}=d_{ii}\cdot a_{ij}$，其中$d_{ii}$为$D_{mm}$的主对角线元。同理可证$A_{mn}D_{nn}=[c_{ij}]$时，$c_{ij}=a_{ij}\cdot d_{jj}$。由此推知$A=A_{nn}$时，$IA=AI=A$。

定义1.28：只有一行或只有一列的矩阵叫**矢**（或矢量）：$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$叫**行矢**；$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)'$叫**列矢**，简记为$\mathbf{x}=\{x_1,\cdots,x_n\}$。若$\mathbf{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$及$\mathbf{y}=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$为二列矢，则

$$\mathbf{x}'\cdot\mathbf{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n,$$
$$\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

为1×1阶矩阵，即纯数。而

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}'=[x_iy_j]_{nn}$$

为$n\times n$阶矩阵。今后如无特殊说明，总设$\mathbf{x},\mathbf{y}\cdots$为列矢。

二、线性变换与二次型

定义1.29：我们说同阶的矢量$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，…，$\mathbf{x}_p$是线性相关的，系指存在不全为零的数c_i使

$$c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2+\cdots+c_p\mathbf{x}_p=0$$

等号右边是与诸x_i同阶的零矢量，即各元素均为零的矢量，否则称$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$，…，$\mathbf{x}_p$为线性独立的。

定义1.30：线性变换

$$\begin{aligned}x_1&=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n,\\x_2&=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_m&=a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\cdots+a_{mn}y_n。\end{aligned}$$

在n维空间的点$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$与m维空间的点$\{x_1,x_2,\cdots x_m\}$之间建立起一种关系，此处m与n不必须相等。常称矩阵$A=A_{mn}=[a_{ij}]$为变换矩阵。则由矩阵运算定义1.25可知上列变换可写为

$$\mathbf{x}=A\mathbf{y}$$

定义1.31：设$\mathbf{x}$与$\mathbf{y}$独立，$A_{mn}=[a_{ij}]$则称

$$\mathbf{x}'A\mathbf{y}=\sum_{i,j}x_ia_{ij}y_j$$

为变数x_i与y_j的双线性型。特别当$m=n$，$\mathbf{x}=\mathbf{y}$而A为对称时，称

$$\mathbf{x}'A\mathbf{x}=\sum_{i,j=1}^{n}x_ia_{ij}x_j$$

为变数x_1，$x_2,\cdots,x_n$的二次型，记为$Q(\mathbf{x})$或$Q(x_1, x_2,\cdots x_n)$。用矩阵表示为$Q(\mathbf{x})=\mathbf{x}'A\mathbf{x}$，对称矩阵A也叫作二次型Q的矩阵。

性质1.9：设有二次型$Q(x_1, x_2,\cdots,x_n)=\mathbf{x}'A\mathbf{x}$，及线性变换$\mathbf{x}=C_{nm}\mathbf{y}$则当令

$B_{mm}=C'AC$时，

$$Q_1(y_1, y_2,\cdots,y_n)=\mathbf{y}'B_{mm}\mathbf{y}$$

为新变量y_1，$y_2,\cdots y_m$的二次型。这是由于$B_{mm}=[b_{ij}]$时，

$$b_{ij}=\sum_{k,l}c'_{ik}a_{kl}c_{lj}$$

因为$c'_{ik}=c_{ki}$，$a_{kl}=a_{lk}$

故

$$b_{ij}=\sum_{k,l}c'_{jl}a_{lk}c_{ki}=b_{ji}$$

所以B_{mm}为对称的。

三、线性方程

定义1.32：方阵$A_{nn}=[a_{ij}]$的行列式是记为以下形式的一个数：

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=|a_{ij}|$$

$|A|$的定义是$|A|=\Sigma\pm a_{1r_1},a_{2r_2}\cdots a_{nr_n}$，这里求和是对$r_1,r_2,\cdots r_n$的一切可能排列取的。为了说明“+”、“−”号的取法，我们先看一个实例。当用x_1代x_2，用x_2代x_1；用x^3代x_4，用x_4代x_3时，我们把这种排列写为（这里$n=4$）：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

或记为 (1,2)·(3,4)。对于有限个元的排列易见总可以表示为有限个轮换[(1,2)及(3,4)各叫一个轮换]之积。排列r_1，$r_2,\cdots r_n$，依照其轮换因子有偶数个或奇数个，而称为偶排列或奇排列。当r_1，$r_2,\cdots,r_n$为偶排列时a_{1r_1}，$a_{2r_2}\cdots a_{nr_n}$取正号；为奇排列时取负号。

性质1.10：关于方阵的行列式有下列性质：

（1）A的转置矩阵的行列式与A的行列式相同，即

$$|A'|=|A|$$

（2）若A的两行或两列互换位置，则其行列式变号。从而可知当A有两行或两列相同时，其行列式必为零。

（3）若方阵B与C之积为方阵A：$A=B\cdot C$则有

$$|A|=|B|\cdot|C|$$

定义1.33：设A为一矩阵（不一定为方阵），A的子方阵的行列式叫作A的**子式**。若A为方阵，则当其子式的对角线元均为A的主对角线元时，称为A的**主子式**。

若$A=[a_{ij}]$为一方阵，将a_{ij}所在的行和列由A中删除，所得子式乘以$(-1)^{i+j}$之后，叫作a_{ij}的余子式，记为A_{ij}。

性质1.11：关于余子式有下列展式：

（1）
$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{ij}=\begin{cases}|A| & \text{如果}k=i\\ 0 & \text{如果}k\neq i\end{cases}$$

（2）
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ij}=\begin{cases}|A| & \text{如果 }k=j\\ 0 & \text{如果 }k\neq j\end{cases}$$

定义1.34：矩阵A的秩是满足下列条件的整数$r=r(A)$：

（1）存在A的一个r阶不为零的子式；

（2）不存在A的大于r阶的不为零的子式。

由此定义可知$A=A_{mn}$的秩数r满足条件：

$$r\leqslant\min\{m,n\}$$

性质1.12：我们把A的行或列，常看作矢。若A的秩为r，则必可找出A的r个线性独立的行，同时A的任意$r+1$行都是线性相关的。对列有同样的性质。

性质1.13：若方阵的行列式不为零，$|A|\neq 0$，则A的秩必为n。若$|A|=0$则A的秩必小于n。依照$|A|=0$或$|A|\neq 0$，而称方阵A为奇异的或非奇异的。

若$|A|\neq 0$而B为任一矩阵，则AB及BA的秩与B相同。

定义1.35：设$A=[a_{ij}]$为一方阵，设A_{ij}为a_{ij}的余子式，令$A^*=[a^*_{ij}]$，其中$a^*_{ij}=A_{ji}$，则称A^*为A的伴随转置矩阵。

即

$$AA^*=A^*A=|A|\,I=\begin{bmatrix}|A| & 0 & \cdots & 0\\ 0 & |A| & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & |A|\end{bmatrix}.$$

若A非奇异则方阵$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^*=\left[\frac{A_{ji}}{|A|}\right]$称为A的**逆阵**。

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$$

性质1.14：逆阵有下列性质：

（1）$[A^{-1}]^{-1}=A$；

（2）$[A^{-1}]'=[A']^{-1}$；

（3）$[AB]^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$；

（4）设D为以$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为对角元的非奇异对角方阵，则$D^{-1}$也是对角方阵，其对角元依次为$\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$。

定义1.36：设方阵$C=[c_{ij}]$使$C\cdot C'=C'\cdot C=I$，则称C为正交方阵。

性质1.15：正交方阵有以下性质：

（1）$|C|=\pm 1$；

（2）$C^{-1}=C'$；

（3）$\sum_{j=1}^{n}c_{ij}c_{kj}=\delta_{ik}$（其中$\delta_{ik}$只当两足码相等时为1，否则为零，称它为柯若尼柯符号）。

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} c_{ik} = \delta_{jk};$$

（4）设C_1及C_2为二同阶正交方阵，则$C = C_1 \cdot C_2$也是正交的；

（5）对于任一自然数$p < n$，和p个行矢$(c_{i1}, c_{i2}, \cdots, c_{in})$，$i = 1, 2, \cdots, p$，只要它们满足上列性质（3），就可以找到另外的$n - p$个行矢，使它们一起组成的$n \times n$阶矩阵为正交的。

定义1.37：线性变换$\mathbf{x} = C\mathbf{y}$，当矩阵C为正交的时候，叫作正交变换。

性质1.16：正交变换的性质为保持距离不变。因为$\mathbf{x} = C\mathbf{y}$，$\mathbf{x}' = \mathbf{y}'C'$，所以
$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}'C'C\mathbf{y} = \mathbf{y}'I\mathbf{y} = \mathbf{y}' \cdot \mathbf{y}$。

即对于任一x恒有：　$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$。

性质1.17：设A为任一对称方阵，则必有正交方阵C，使$C'AC$为一对角矩阵：

$$C'AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

而且任一使A变为对角矩阵的正交矩阵都有相同的对角线元，可能它们的排列顺序不同。所以对角线诸元λ_1，$\lambda_2, \cdots \lambda_n$是A所特有的，称为A的**固有值**、它们是下列$n$次方程的实根。

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

由此可见A的秩为其非零固有值的数目。

第二章　图的基本概念

第一节　历 史 概 况

图的理论已经取得了非凡的发展，据统计现在以每年400篇文献的速度向前发展着，其应用之广泛也是少有的。它在电信、交通网络方面；在物理学、化学和数学的其它分支方面；甚至在经济、建筑和社会学等方面，也都有广泛应用。

图论之所以能高速发展是有其来由的。首先是图论模型有广泛的适用性；二是图论的图解表达式直观而清晰；三是由于图论与其它科学的广泛联系，特别是与其它数学分支的密切联系，从而能吸取各方面的研究方法。

但是要准确地追溯图论的起源，那也是困难的。按现有记载，图论的先驱者有欧拉（Euler），他在1736年解决了当时闻名的葛尼西堡七桥问题。因此有人认为欧拉应该是拓扑学和图论的奠基人。七桥问题的数学实质是要证明图2—1不是一笔画（即从某点开始经过各条线恰好一次再回到起点）。

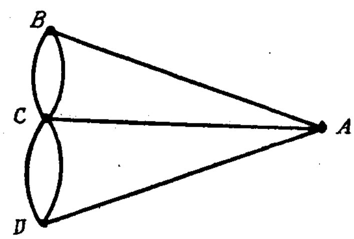

图2—1　七桥

1847年，基尔赫夫（Kirchhoff）在研究电网时奠定了树的概念和理论。基尔赫夫是一位卓越的物理学家，但他极善于抽象思维。他为了探索方程组的互独立方程的个数，他把电路中的电器统统看作是电路的一部分，而无视它们的电学特征。以后他用只有点和线段的受检图来代替原来的电路，并在受检图上逐步删除线段，一直到使受检图变为一棵树为止。于是他得到如下的结论：独立方程的个数等于删除的线段数，而且对应于每一被删线段有唯一的一个基本圈和与此圈相应的一个方程。

1857年，著名的化学家开勒（Cayley)在研究同分异构体的结构时，独立地引入了树形图。我国著名化学家唐敖庆教授把图论应用于化学也取得了一系列成果。

第一次从数学上考虑树的是若当（Jordan）在1868年的工作。

四色问题早在1840年就为人们熟知：平面或球面上任何一张地图，用四种颜色就可以画清楚，而且保证两个相邻的国家都染有不同的颜色，条件是每个国家必须是单连通的，而所谓相邻是指有一条公共边界。1969年奥瑞（Ore）和斯太姆普（Stemple）证明了对于40个顶点以下的平面图四色定理成立。四色问题在1976年已由美国伊利诺大学柯·阿派尔（K·AppeL)、喔·哈肯（W·Haken)在寨·考贺（J·Koch）协作之下，利用高速电子计算机得到解决。它用了100亿个逻辑判定，花了1,200机时，因此作为对这定理的证明并不理想，但无论如何算是解决了一大难题。

图的理论，作为独立的学科而有其自身的发展，主要是靠占有大量实用问题的运筹工作者的创造。因此绝大多数图论著作并非出自数学工作者，只有为数不多的数学家发表了他们的图论专著。例如“图论”的作者弗朗柯·亨瑞（Frank·Harary）及“图的理论及其应

用”的作者柯劳德·贝热（其新著“图和超图”在1973年发表）均为数学家。

图论这门科学，目前主要是用来处理有限系统，即便如此，在付诸应用时的计算工作也是极为浩繁的，所以它与电子计算机的联系日益密切。甚至有的著作中主要篇幅是讨论图在电子计算机里的存储方式及从最优化程序的角度处理图论的各种方法，并给出实现程序。我们将在第三、四章给予讨论。

图的主要内容之一为研究各种网络，如铁路网、信息网以及各种公用设施网。须知任何网络的任何一段都可能由于以下原因而不能确保提供使用：一是由于偶然性的故障；二是它被占用。也就是说把网络看作是随机性的更为符合实际情况。从而近年来与确定性网络并行地发展了随机性网络，我们在第六章中予以介绍。

第二节　图论模型实例

图论之所以应用广泛，可以这样来说明：任何一个能用双边关系描述的体系，都可以用图来提供数学模型。我们这一节的任务在于直观地提供一些图的例子，借以说明什么是图？图论的主要内容是什么？这样我们在转入严格定义时就有了初步的感性基础。

例2.1：全国铁道线路连同所有火车站是一个图。所以一个图就是一些点子和它们之间的一些连接线段之综合体。一个图可以是连成一片的，也可以是几片，我国全国铁路图就是由两片组成的：一片为祖国大陆上的路网，另一片为台湾省路网。

例2.2：图２—２中A，B，C，D，E，F，G，H，K表示九个仓库，其间的连线表示道路，这也是一个图。为安全计，夜间派有巡回保卫小组，试为他们选定两个仓库（答案是K和D）作为休息地点，并为他们制订巡回路径，使从一个休息地出发将每条道路恰走一遍，最后到另一休息地休息。

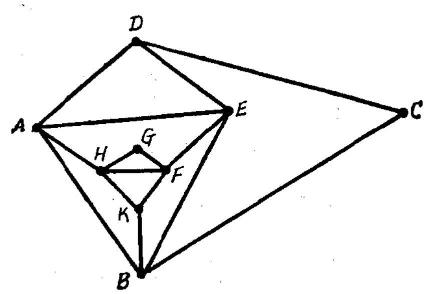

图２—２　欧拉圈

例2.3：在例2.2中，若要求保卫人员坐在一条路上，使他能看到两端的仓库，问最少要布置几位守卫者？如何安排其位置？

通过上面的实例，我们大致可以想象到图的研究内容，就其要者略述于下：

1．在图上的两点间找出一条路来，如例2.2所示；

2．在两点间找出满足特定条件的路径来，例如最短路径，以及把一种货物从图上的一点运往另一点时，需要找出具有最大流量的路径，或是运费最低的路径，或是游遍图上各点的路径等等；

图２—３　图式

3．讨论分配问题，例如按人们的不同专长，机械的不同性能适当地分配他们的工作。例2.3说明人与地址的最佳配对问题。这对继电器理论也是很重要的；

4．以上三个例子容易给人这样一种印象，似乎图是实际问题本身自然呈现出来的。其实不然，例如在某种竞赛中总要选出一位优胜者，我们可以用图来提供一种模型。把每个参加比赛者当作一个点，把对垒的一对竞赛者A和B用矢连接起来，表示“A胜B”。这样就得到一个图２—３，按竞赛规则从图上可以一目了然地看出优胜者。