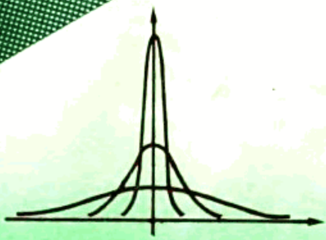

河南财经学院概率论与数理统计编写组

经济数学基础（三）

概率论与数理统计

河南大学出版社

前　言

国家教委高教司于1989年10月颁布了包括经济数学基础、计算机应用基础在内的十一门高等院校财经类专业核心课程的教学大纲，要求在全国范围内贯彻实施，以提高财经类专业的总体教学水平。目前国内所用教材都不同程度地与新颁大纲不相吻合，编写出版新教材成为贯彻大纲的当务之急。为此，我系成立了教材编写委员会，并组成了微积分、线性代数、概率论与数理统计、计算机应用基础四个编写组，完成了《经济数学基础》的三个分册：《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》及《计算机应用基础》共四本教材的编写工作。

本书是《经济数学基础》的三个分册之一。与目前国内同类教材相比，本书有以下几个特点：

第一，本教材符合新颁大纲要求，体现了新颁大纲精神，在内容取舍、顺序安排以及学时分配诸方面和新颁大纲相吻合。

第二，本教材充实了数学在经济方面的应用内容，增加了在经济管理中应用较多的新知识、新方法。如在统计估计一章中，增加了比率的区间估计；在假设检验一章中，增加了比率的比较；在回归分析一章中，充实了一元线性回归的显著性检验，增加了一元线性回归的预测。

第三，本教材注重概念教学，引进概念力求自然，重视介绍背景，讲述概念尽量简洁明了。同时，注重基本方法和技巧的训练。书中配有相当数目的各种类型的典型例题，使读者有更多的解题训练机会，以培养分析和解决实际问题的能力。深入浅出，通俗易懂，利教利学，文字精炼是这套教材编写者的追求目标。

第四，本教材各章后面配有相当数量的练习题，并在书末附有答案，供读者查对，也为自学者提供方便。

第五，本教材为适合不同专业及层次的需要，对于要求较高的内容或较深的部分加了“*”号，使用时可视具体情况酌情取舍。

参加本书编写工作的有：朱树德、徐泽贵、王瑗、石永生、肖红、史夫勇和罗晓晖。参加审稿的有王瑗、朱树德、徐泽贵三位同志。

在《经济数学基础》的写作和出版的过程中，我们得到了各方面的关心、支持和帮助。特别是河南省数学会副理事长孙荣光教授在百忙中审阅了全书。在此，我们谨向河南财经学院副院长侯恒教授、孙荣光教授以及河南财经学院教务处、成人教育部和河南大学出版社表示最诚挚的谢忱。

由于时间仓促，编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请读者不吝赐教。

河南财经学院经济信息系
教材编写委员会
1991年元月

目　　录

第一章　随机事件与概率

在生产、生活和科学研究中，我们常常会遇到两类现象：确定性现象和随机现象。所谓确定性现象，是指在一定条件下必然会出现某一种结果的现象。比如，在标准大气压下，纯水加热到100℃必然沸腾；用步枪发射子弹，子弹飞不出地球引力场，等等。所谓随机现象，是指在一定条件下可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而且不能预先断言出现哪种结果的现象。比如，往桌面上投掷一枚硬币，可能正面向上，也可能反面向上，而且在投掷以前不能预先断言一定哪一面向上；从含有一定个数次品的一批产品中任意取出3件，取到次品的件数可能是0，1，2或3。概率论与数理统计就是从数量侧面研究随机现象规律性的数学学科。作为数学学科来说，概率论属于“纯粹数学”，而以概率论为基础的数理统计则是“应用数学”的重要分支。二者关系十分密切，一般多是结合起来论述。

第一节　随机事件

（一）随机事件的概念

对现象观察的过程通常称为试验。随机现象的试验称为随机试验，简称为试验。随机试验具有下列三个特性：

第一，试验可以在相同条件下重复进行；

第二，每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

第三，进行某一次试验之前，不能确定哪个结果会发生。

为了便于研究，我们把随机试验的结果称为随机事件，简称事件，用大写拉丁字母A，B，C等表示．在一定范围内，不能再分的事件称为基本事件．由两个或两个以上基本事件组合而成的事件称为复合事件．

在一定条件下，必然发生的事件称为必然事件，记作Ω；在一定条件下，必然不发生的事件称为不可能事件，记作$\varnothing$．必然事件和不可能事件严格地说都不是随机事件，它是描述确定性现象的结果的，但为了今后讨论方便起见，我们把它们当作特殊的随机事件．

例如，掷一颗骰子，观察出现点数的试验．“出现1点”，“出现两点”，…，“出现6点”就是6个基本事件．而“出现偶数点”则是一个复合事件，它是由“出现2点”，“出现4点”，“出现6点”这三个基本事件所组成的（即当且仅当这三个基本事件中有一个发生，“出现偶数点”这一复合事件发生）．而“点数不大于6”的事件是必然事件，“点数大于6”的事件是不可能事件．

（二）事件间的关系与运算

在某些问题的研究中，我们讨论的往往不只是一个事件，而这些事件之间又存在着一定的联系。为了说明这些联系，下面引进事件之间的主要关系及运算．

1.事件的包含　如果事件A发生必然导致事件B发生，则称事件B包含事件A，或称事件A含于事件B，记作$B\supset A$或$A\subset B$。

为了直观起见，今后我们常用一个矩形表示必然事件Ω，而矩形内一些区域表示一些随机事件．如图1-1表示$A\subset B$。

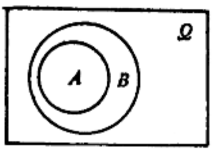

图 1-1

显然包含关系有以下两个性质：

对任意事件A，有$A\subset A$；

若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$。

2.相等事件　如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称A与B是相等事件，记作$A=B$。

3.和事件　事件A与事件B至少有一个发生，这一事件称为A与B的和事件（或并事件），记作$A+B$或$A\cup B$（见图1-2）。

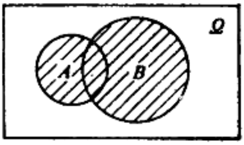

图 1-2

类似地，可以推广到n个事件的情况。事件A_1，A_2，…，A_n中至少有一个发生，这一事件称为这n个事件的和事件，记作

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \quad 或 \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

4.积事件　事件A与事件B同时发生，这一事件称为A与B的积事件（或交事件），记作AB 或$A\cap B$（见图1-3）。

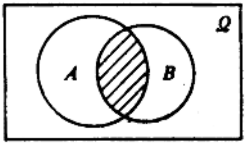

图 1-3

类似地，可以推广到n个事件的情况。事件$A_1,A_2,\cdots$，A_n同时发生，这一事件称为这n个事件的积事件，记作

$$\prod_{k=1}^{n} A_k \quad 或 \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

5.差事件　事件A发生而事件B不发生，这一事件称为A与B的差事件，记作$A-B$（见图1-4）。

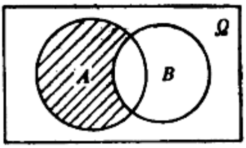

图 1-4

6.互不相容事件　若事件A与事件B不能同时发生，即$AB=\varnothing$，则称A与B是互不相容事件（或互斥事件）。反之，称A与B是相容事件。（图1-5表示互不相容事件）。

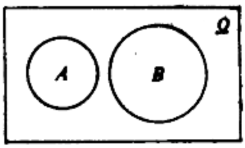

图 1-5

互不相容只是两个事件间的关系。

多于两个的事件之间只考虑两两互不相容，所谓 n 个事件两两互不相容，指的是其中任意两个事件都是互不相容的。

7.对立事件　如果事件 A 与事件 B 中有且仅有一个发生，亦即 $A+B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 为对立事件（或互逆事件），记作　$A=\overline{B}$ 或 $\overline{A}=B$（见图1-6）。

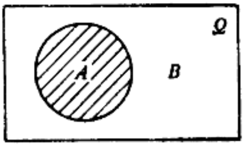

图 1-6

对立事件具有如下性质：

$$\overline{\Omega}=\varnothing;\quad \overline{\varnothing}=\Omega;\quad \overline{\overline{A}}=A.$$

例 1　某射手第 k 次击中目标的事件记为 $A_k(k=1, 2, 3)$，试用文字叙述下列事件：A_1+A_2；$A_1A_2\overline{A}_3$；$\overline{A}_1$；A_1-A_2；$A_1A_2+A_2A_3+A_1A_3$。

解：A_1+A_2：前两次射击中至少有一次击中目标；

$A_1A_2\overline{A}_3$：前两次击中目标而第三次未击中目标；

$\overline{A}_1$：第一次未击中目标；

A_1-A_2：第一次击中目标而第二次未击中目标；

$A_1A_2+A_2A_3+A_1A_3$：三次射击中至少有两次击中目标。

例 2　设 A，B，C 为三事件，试用 A，B，C 及其对立事件通过运算关系表示下列各事件：

（1）A 发生，B，C 不发生；

（2）A 与 B 都发生而 C 不发生；

（3）A，B，C 都发生；

（4）A，B，C 恰有一个发生；

（5）A，B，C 恰有两个发生；

（6）A，B，C 至少有一个发生；

（7）A，B，C 都不发生；

（8）A，B，C 至多有两个发生。

解：（1）$A\overline{B}\overline{C}$；（2）$AB\overline{C}$；（3）$ABC$；

(4) $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$；(5) $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$；

(6) $A+B+C$，

或$A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC$；

(7) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$，或$\overline{A+B+C}$；

(8) $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}\bar{C}$，

或$\overline{ABC}$，或$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$。

将本例的(7)，(8)一般化，可得事件运算的对偶律：

$$\overline{\sum_{k=1}^{n} A_k}=\prod_{k=1}^{n}\bar{A}_k,\qquad \overline{\prod_{k=1}^{n} A_k}=\sum_{k=1}^{n}\bar{A}_k.$$

证明从略，此运算规律在简化运算时是很有用的。

（三）事件与集合

我们已经学习过一些集合论的知识，为了便于研究，我们把随机试验中每个基本事件表示为单元素集$\{\omega\}$，称ω为一个样本点，所有样本点构成的集合称为样本空间，仍记为Ω。于是，试验中每一个随机事件都可用样本空间Ω的某一个子集表示。而样本空间Ω表示必然事件，空集$\varnothing$表示不可能事件。由此可以看到，概

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间，必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
$\{\omega\}$	基本事件(ω为样本点)	单元素集
A	事件	子集
$\bar{A}$	A的对立事件	A的补集
$A\subset B$	事件A含于事件B	A是B的子集
$A=B$	A与B是相等事件	A与B是相等集合
$A\cup B$	A与B的和事件	A与B的并集
$A\cap B$	A与B的积事件	A与B的交集
$A-B$	A与B的差事件	A与B的差集
$A\cap B=\varnothing$	A与B为互不相容事件	A与B是分离的

率论中事件之间的关系与运算和集合论中集合之间的关系与运算是一致的。为了便于对照，我们列出上表。

这样，我们常常可以把对事件的分析转化为对集合的分析，利用集合的运算来分析事件的关系。

例 3 掷一颗骰子，观察出现点数的试验：用 A 表示"出现奇数点"的事件；用 B 表示"出现点数小于 5"；用 C 表示"出现小于 5 的偶数点"。试用集合的列举法表示下列事件：Ω，A，B，C，$A+B$，$A-B$，AB，AC，$C-A$，$\bar{A}+B$。

解：$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$；$A=\{1, 3, 5\}$；

$B=\{1, 2, 3, 4\}$；$C=\{2, 4\}$；

$A+B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$；$A-B=\{5\}$；

$AB=\{1, 3\}$；$AC=\varnothing$；

$C-A=\{2, 4\}$；$\bar{A}+B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$。

例 4 测定某种灯泡寿命 x 的试验，则其结果可以是任何非负实数（以小时为单位），于是任何一个非负实数都是一个样本点，故样本空间Ω可表示为

$$\Omega=\{x:\ 0\leqslant x<+\infty\};$$

而灯泡寿命大于1000小时的事件 A 可表示为

$$A=\{x:\ 1000<x<+\infty\}.$$

例 5 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 袋里装有标号分别为1，2，3，4的四个球。从袋中任取一球后，不放回袋中，再从袋中任取一球，记录两次取球的结果；

(2) 将(1)的取球方式改为第一次取球后放回袋中再作第二次取球，记录两次取球的结果；

(3) 将(1)的取球方式改为一次从口袋里任取两个球，记录取球的结果。

解：(1) 若用(1, 2)表示第一次取得 1 号球，第二次取得 2 号球，其余可作类似理解，则样本空间Ω_1可表示为

$$\Omega_1=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),$$
$$(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),$$
$$(4,2),(4,3)\},$$

共包括$P_4^2=12$个样本点。

(2) 此试验与(1)的区别在于两次取得球的标号可以相同，所以样本空间Ω_2可表示为

$$\Omega_2=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),$$
$$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$$
$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),$$
$$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\},$$

共包括$4^2=16$个样本点。

(3) 此试验与(1)的区别在于取得的两个球没有先后顺序问题，若用 $\boxed{1,\ 2}$ 表示取得1号球和2号球，其余可作类似理解，则样本空间Ω_3可表示为

$$\Omega_3=\{\boxed{1,\ 2},\ \boxed{1,\ 3},\ \boxed{1,\ 4},\ \boxed{2,\ 3},\ \boxed{2,\ 4},\ \boxed{3,\ 4}\},$$

共包括$C_4^2=6$个样本点。

第二节 事件的概率

(一)概率的统计定义

定义 1.1 设事件A在n次重复试验中发生了m次，那末就称m为n次试验中A发生的频数，称比值$\frac{m}{n}$为n次试验中事件A发生的频率。

现在我们通过两个实例来看看事件频率的规律性。历史上有人进行过投掷一枚硬币的试验，下表列出其结果：

实 验 者	投掷次数 n	“正面向上”次数	频率$\frac{m}{n}$
蒲 丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维 尼	30000	14994	0.4998

又如，从0，1，2，…，9十个数字中任意取出一个数字，下表列出观察结果：

观察次数 n	2000	2000	2000	2000	2000
“1”出现次数 m	194	218	205	185	205
频 率	0.0970	0.1090	0.1025	0.0925	0.1025

（此表是利用电子计算机进行模拟试验所得结果）.

从上面两个实例可以看出，在多次重复的试验中，同一事件发生的频率并不相同，这反映出频率波动性的一面. 但是，另一方面，频率却在一个固定数值附近摆动（前一例摆动于$\frac{1}{2}$附近，后一例摆动于$\frac{1}{10}$附近），这反映出频率的稳定性，而且随着试验重复次数的增加，这样的现象愈加显著. 频率的这种稳定性，揭示出一个随机事件发生的可能性有一定的大小可言：频率稳定于较大的数值，表明相应事件发生的可能性较大，频率稳定于较小数值，表明相应事件发生的可能性较小，从而，频率所接近的这个固定数值，就是相应事件发生可能性大小的一个客观的定量的度量，称为相应事件的概率.

定义 1.2 如果随着试验次数 n 的增大，事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 在某个确定的常数 p 附近摆动，那末就称 p 为事件 A 的概率，记作

$$P(A)=p.$$

习惯上，称这个定义为概率的统计定义。该定义在理论上肯定了事件概率的存在性，在应用上给出了一个近似计算概率的方法：那就是当 n 充分增大时，可以取频率为概率的近似值。在许多实际问题中，当概率不易求出时，往往就是这样做的。

（二）概率的古典定义

不少随机试验（例如投掷一枚硬币，投掷一颗骰子等试验）都具有以下两个共同的特点：

(1) 有限性：试验的基本事件总数是有限的；

(2) 等可能性：试验中每个基本事件发生的可能性大小是相同的。

具备有限性和等可能性的试验，称为等可能概型，它在概率论发展的初期曾是主要研究对象，所以也称为古典概型。

对古典概型，当然也可以通过大量试验，利用频率近似计算概率。但我们也可以利用古典概型的两个特点直接计算概率。

定义 1.3 在古典概型中，若基本事件的总数为 n，事件 A 包含其中 m 个基本事件，那末就称 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 的概率，记作

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

这个定义仅适用于古典概型，所以通常称它为概率的古典定义。它是结构性定义，不但给出了概率的概念，而且给出求事件概率的方法。古典概型的计算式子 $P(A)=\frac{m}{n}$ 虽然很简便，但在具体计算时，要分别算出 m 和 n 却不是一件容易的事，往往要用到排列组合知识，这是比较困难而且富于技巧的，必须通过一定数量的练习题，摸索探求计算 m，n 的方法。

例 1 有10只晶体管，其中有 2 只次品，从中随机地抽取 3

只，求：

(1) 其中恰有1只次品的概率；

(2) 至少有1只次品的概率.

解：此试验基本事件的总数为C_{10}^3（因为从10只中抽取3只共有C_{10}^3种取法）.

(1) 设A表示"3只中恰有1只次品"的事件，则A包含基本事件的个数为$C_2^1C_8^2$，所以

$$P(A)=\frac{C_2^1C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}.$$

(2) 设B表示"3只中至少有1只次品"的事件，则B包含基本事件的个数为$C_2^1C_8^2+C_2^2C_8^1$（因为3只中至少有1只次品，包括两种情况：恰有1只次品，有$C_2^1C_8^2$种取法；恰有2只次品，有$C_2^2C_8^1$种取法）. 所以

$$P(B)=\frac{C_2^1C_8^2+C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{8}{15}.$$

例 2 一部五卷的选集，按任意顺序放到书架上，试求下列事件的概率：

(1) A= "各卷自左向右或自右向左的卷号恰为1，2，3，4，5"；

(2) B= "第一卷及第五卷分别在两端".

解：基本事件的总数为P_5^5（因为5本书按任意顺序放到书架上的排法有P_5^5种）.

(1) 事件A包含两个基本事件，所以

$$P(A)=\frac{2}{P_5^5}=\frac{1}{60}.$$

(2) 事件B包含$P_2^2P_3^3$个基本事件（因为第一卷及第五卷分别在两端的排法有P_2^2种，第二、三、四卷在中间的排法有P_3^3种，配合起来的排法共有$P_2^2P_3^3$种），所以

$$P(B)=\frac{P_2^2P_3^3}{P_5^5}=\frac{1}{10}.$$

例 3 有 3 个打字员为 4 个科室服务．如果 4 个科室各有一份文件要打字，且各科室对打字员的选择是随机的，试求：

(1) 4 个科室把任务交给同一个打字员的概率；

(2) 每个打字员都有任务的概率．

解：基本事件总数为3^4（因为每个科室交任务都有 3 个打字员可供选择，所以共有3^4种方法。）

(1) 设A表示"4 个科室把任务交给同一个打字员"的事件 则A包含基本事件个数为C_3^1．所以

$$P(A)=\frac{C_3^1}{3^4}=\frac{1}{27}.$$

(2) 设B表示"每个打字员都有任务"的事件，则B包含基本事件个数为$C_3^1C_4^2P_2^2$（因为 3 人中必有 1 人打 2 份文件，其余 2 人各打 1 份文件．3 个打字员有 1 人打 2 份文件，可以看成从 3 个打字员中选出 1 人，然后从 4 份文件中选 2 份文件交给该打字员，共有$C_3^1C_4^2$种选法，剩下 2 份交给另外 2 个打字员，共有P_2^2种选法，配合起来共有$C_3^1C_4^2\cdot P_2^2$种），所以

$$P(B)=\frac{C_3^1C_4^2\cdot P_2^2}{3^4}=\frac{4}{9}.$$

第三节 概率的基本性质及运算法则

本节的基本性质及运算法则我们仅在古典概型范围内给予证明，从概率的统计定义出发它们也成立，下面不再一一说明．

（一）概率的基本性质

1．任何事件A的概率都在 0 与 1 之间，即$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

2．必然事件Ω的概率等于 1，即$P(\Omega)=1$；