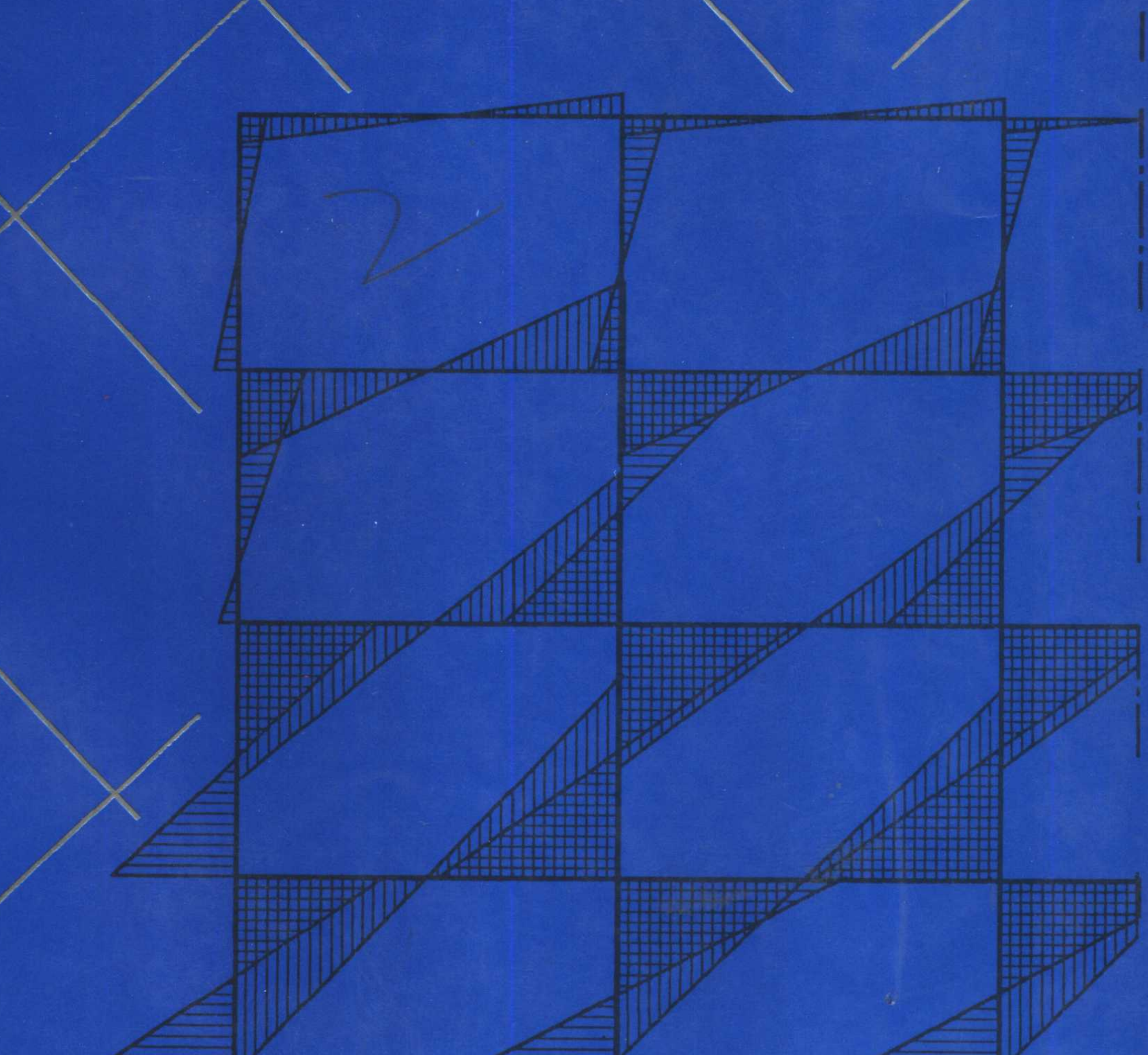
矩阵结构力学

吕子华　吕令毅　著



中国建筑工业出版社

矩阵结构力学

吕子华　吕令毅　著

中国建筑工业出版社

(京)新登字035 号

本书是应用矩阵理论研究结构力学问题的专著。在理论体系和分析方法上，与现行的传统结构力学截然不同，彼此也不相互依存。全书按方法分篇，按结构分章，计3篇24章。对土建工程中广泛采用的杆系、板系和索系结构，从静力、动力和稳定分析到几何非线性问题等，都进行了广泛的探索。内容全部取材于著者近40年间就上述题材所作的研究成果。

本书可供与结构力学有关的研究生和高年级本科生，结构设计工程师和科学研究工作者学习和参考。

*　　*　　*

责任编辑：欧　剑　董苏华

矩阵结构力学
吕子华　吕令毅　著
*
中国建筑工业出版社出版、发行(北京西郊百万庄)
新　华　书　店　经　销
北京市彩桥印刷厂印刷
*
开本：787×1092毫米 1/16 印张：35¼　字数：860千字
1997年6月第一版　　1997年6月第一次印刷
印数：1—2000册　　定价：**45.00**元
ISBN7-112-02947-3
TU・2248(8062)

序

矩阵结构力学是应用矩阵理论研究结构力学问题的一门学科，是独立于传统结构力学的一个分支。本书从最初的思想萌芽，历经成功与失败的广泛探索，直至最后系统成稿，历时整40年。本书内容即全部取材于这40年间就上述题材所作的研究成果。这些成果的大部分已在国内外陆续发表过，有的已在工程设计中获得采用和推广，并曾先后被联合国权威文献《国际建筑研究、实验与文献委员会文献》[CIB(Conseil International du Bâtiment pour Recherche, L'etude et la Documentation)]、美国《工程索引》(The Engineering Index Monthly: The index to the world's engineering developments)、俄罗斯科学院《力学文摘》(Российская академия наук: реферативный журнал по механике)和英文版《中国科学文摘》(Science Abstracts of China: Mathematical and Physical Sciences)等所录载。

本书得以成稿问世，并以比较完整的面貌奉献给世人，主要归功于中国建筑工业出版社的远见卓识和学术界许多著名学者的大力推荐。其中特别值得提出的有同济大学的朱振德教授、东南大学的丁大钧教授和吕志涛教授、河海大学的赵光恒教授、中国科技大学的黄茂光教授和王秀喜教授、合肥工业大学的沈鹏程教授和蔡四维教授、安徽建筑工程学院的肖鹤麟教授以及西南交通大学的徐文焕教授等，他们都对本书作了鼓励性的评价。对于其中实属过誉的赞美之词，著者是不敢身受的，只能作为今后继续努力的一种鞭策而心领。

书稿整理的具体分工是：第11、第14、第15、第16、第18、第20、第21和第24等8章由第二著者执笔，其余各章及全书统稿由第一著者完成。原稿的文字誊写和插图绘制，主要由江苏省建筑科学研究院的汪朝旸、南京大学的庄红、东南大学的黄良辉和南京建筑工程学院的熊爱华、陈海生等同志完成，一并在此致谢！还需说明的是，由于本书涉及面比较宽，研究过程中可供借鉴的经验又比较少，更因著者学术水平有限，书中难免会有考虑不周、疏漏和错误之处，切盼广大读者不吝赐教，先此敬致谢忱！

吕子华　吕令毅

于南京

目　录

第二篇　递　归　法

第1章 导 论

§1-1 传统结构力学刍议

结构力学是一门古老的技术基础性应用学科。有资料可考[62]，如果从木质桁架桥的设计和建造开始算起，它可以上溯到文艺复兴时期。倘若只以它从静力学和材料力学中分离出来作起点，也有两百多年的历史。它所提供的科学理论知识，培育了全世界一代又一代的土木工程师，教他们学会了如何设计工程结构的科学思想和方法，至今仍在各国高等学府的有关专业中，作为一门主干学科而广为传授。对这门饱含着多少代世界各国学者群体研究心血的传统结构力学，无疑是必须继承和借鉴的。

关于传统结构力学的全面评价，是力学史家的工作，本书当然不宜为此多费笔墨。这里只想指出的一点是：由于历史的局限，它是在以简单运算工具为背景中，以“手算”为前提的苛刻条件下形成和发展起来的。在很长一段历史时期内，广大研究者在彼此相互隔绝的情况下，只能像民间手工艺人那样，就一个个简单的小型问题精雕细刻，断断续续地拿出自己的单个“成品”。记得当年(1930年)美国伊利诺斯大学教授 Hardy Cross 以连续梁和单层无侧移刚架为“载体”，公开发表他的“力矩分配法”时[63]，在世界土木工程界几乎引起轰动，无不为之兴高采烈。国内直到50年代初，还在为如何将它推广应用于“桁架刚构”作着不懈的努力[25,64]。原因没有别的，就是因为它采用渐近计算的方式，给数学中的“松弛法”赋予了形象生动的物理概念，从而避免了联立方程的求解。这样的例子可以举出很多很多。因此，在一部传统结构力学中，占据重要位置和大量篇幅的，主要是一些物理概念不同、应用功能殊异、彼此缺乏内在联系的特殊方法，几乎很难找到一个统揽全局的一般性通法，能将各种不同类型的结构和各种不同性质的力学问题，可操作地统一解决在同一个理论思想体系中。即以当前评价最高的位移法及其变种矩阵位移法为例，它也只能在“超动定”杆系结构中发挥其优势，若使用于“动定”结构，就立即暴露出笨拙不堪的“窘态”。而且，它能否用于现代工程中广泛推行的索系结构，至今尚无这方面的文献可考。至于力法及其变种矩阵力法(或秩力法)，就要更逊一筹。因为它只有求解“超静定”结构的多余未知力一种功能，面对“静定”结构分析将一筹莫展，试用于计算结构位移更是无计可施。其他如一次和多次力矩分配法[64]、柱比法[65]、弹性中心法[37]、弹性荷载法[66]等等，更是等而下之了。因为这些方法的适应面过于狭窄，只能解决某个局部范围内的简单问题，不能形成一个独立的统一结构分析程式。不过，它们展示的生动物理概念和形象思维方法，却是耐人玩味和值得称道的。

囿于上述理论素材的局限性，目前高校普遍采用的几种现行“结构力学教程”[67~69]对教学内容的编排，均可概括为“两线三元”式。所谓“两线”，系指以结构的内力分析(强度问题)为一条线，位移分析(刚度问题)为另一条线。两条线的概念基础不同，计算方法各异；而且只有讲清了前者，才能继续讲授后者。所谓“三元”，是指划静定结构分析为第一单元，超静定结构分析为第二单元，结构的振动和稳定等为第三单元。着力讲授第一单元的根本

目的，与其说是为了工程应用的实际需要，不如说是作为一种基本功训练，为学习第二和第三单元创造条件。“量体裁衣”，这种编排本身是无可非议的。但却暴露出传统结构力学的理论体系至少存在着三个明显的弊端：第一个是，两条线路之间和三个单元之间以及线与元之间，重复的“无用功”作得太多，造成的结果是教学上付出大而收效小。第二个是，由于微电脑的迅速普及，以“手算”方法为主体的理论教学内容，同当前工程结构设计的实际状况明显脱节，大有“闭门造车，出不投辙”之势。第三个是，随着世界性高科技的应用和发展，传统的结构体系已日渐不能适应现代工程结构的需要。面临着结构形式的不断变化，新的力学分析方法必须与之“同步”发展，结构力学才有强大的生命力。由于带有共性的基础理论未能在传统结构力学中很好地发挥作用，这个历史使命该如何完成，是必须慎重思考的。因此，如果不从传统结构力学的理论体系和分析方法上进行根本性的变革，传统结构力学的这些弊端是难以克服的。

§1-2　矩阵结构力学梗概

矩阵结构力学是应用矩阵理论研究结构力学问题的一门学科，其研究对象已从常规的杆系结构，拓宽到土建工程中广泛采用的板系和索系结构；研究课题则从结构的静力、动力和稳定性分析，延展到结构的几何非线性问题。与传统结构力学相比，不仅在思想体系上彼此迥然不同，在理论基础上也不相互依存。

矩阵结构力学有自己统一的理论思想体系。简言之，这个体系就是：以“递归”概念作为贯通全书的主线，通过这条主线把外形截然不同的各种结构内部潜在的共同本质，以一种隐形的方式联系起来，造成可以建立具有广泛适应性通法的条件。与此并行，全书通篇以“矩阵论”作为论证和运算的数学工具，充分发挥矩阵论的组织作用和机理作用，把一般性通法在各种类型结构和各种力学问题上的表现形式展现出来，形成了既有统一结构分析程式，又能灵活适应于各种不同问题的具体操作方案。通过对大量工程结构的实施结果证明，这个思想体系是成功的。

为了易于展示矩阵结构力学的总体面貌，本书按方法分篇，按结构分章，计 3 篇 24 章，每篇下有选择地各辖若干具体工程结构。从宏观上看，全书是一个整体，有严密的系统性；分开来看，各章之间又有相对独立性，便于适应不同层面读者的不同需要。采取这种编排体例，能更好地遵循力学学科的特殊规律。因为，众所周知，阐明一个力学方法的基本思路和解题程式，必须以某个工程实体(具体结构)为依托；检验一个力学方法是否理论上具有普遍性，实践上具有可操作性，更是必须以众多工程结构为“载体”。否则，只是不着边际地空泛议论，有意回避接触工程实体，是不能有说服力的。

三大篇篇名的“边值法”、“递归法”和“矩阵法”，不是互不相关的孤立方法，它们都是实践前述统一理论思想体系的不同侧面，是统一分析程式的不同操作方式。不能认为边值法只能解决本篇范围内的所属课题，也不能认为递归法不适用于第一和第三篇涉及的所有课题。其实，它们的位置都是可以互换的，只是在使用效率上可能会呈现差异。在同一思想指导下，将统一分析程式“设计”成几种不同操作方式，也是出于对本门学科特殊性的考虑。尽人皆知，结构力学的研究对象比较复杂：有连续介质体系，也有天然离散体系；对象的几何形体更是变化无常。显然，如果只用一种操作模式去面对形态各异的力学问题，必然会出现“尾大不掉”的局面。因此，将统一分析程式按有效发挥的“势力范围”设计成不同的操作方式，无疑会收到主动灵活的良好效果。

已如前述，递归概念和矩阵运算是贯通全书的主体，两者正适合计算机软件的工作需要。从这个意义上讲，本书各篇篇名的分析方法，都是直接为使用计算机而设计的。但在书中各篇各章之后，除少数个别例外，一般均未附录相关的源程序框图或子程序段。这固然是为了节省篇幅，也是由于这些内容纯属计算机技术，在微电脑已基本普及的当前情况下，将这些技术知识充塞在一部力学专著中，显然是没有必要的。此外，为了说明方法的统一性和可操作性，书中列举了大量的计算实例。其中除少数大题目因限于篇幅只给出“电算”结果外，绝大部分例题都列示了详细的计算流程，这对于加深对方法本质的理解和操作繁简的评判，都是非常重要的。

§1-3 边值法导言

边值法是结构力学意义上的精确法。具体地说，除去先修学科关于材料物性所作的连续性、均匀性、各向同性、完全弹性、小变形和平截面等几项基本假设外，不再引入其他近似构思，也不采取化“无限”为“有限”的离散分割。但在运用形式上，边值法却属于数值方法范畴：它不是从连续函数的角度，研究结构的截面内力和位移同位置坐标的依从关系；而是从离散变量出发，按照设计需要，寻求指定部位的截面内力和位移。这意味着，它宜于处理以结点荷载、离散截面内力、位移等作为研究对象的“集中参数系统”；与此相应，需要把连续介质和不连续介质的各种物理几何量，以及相关的力学方程，表达成以离散变量为主体的矩阵形式，从而使矩阵数学成为论证和运算的基本工具。

由包括材料力学在内的力学理论已知，结构分析的解，必须受三个方面的制约，即：结构的静力平衡条件、变形协调条件和材料本构关系(或应力一应变关系)，也就是通常所称的“力学三原则”。边值法从建立到使用，直至对最后运算结果正确与否的评判，都紧紧地把握着这三条原则，因而它的构思系直接确立在最本质的理论基础上。大量结构分析实例证明，边值法是一个普适性通法。对于任何可以建立控制微分方程的连续体系，和不能建立控制微分方程的天然离散体系，边值法的思路流程都是适用的，仅仅在数学处理上略有繁简之分而已。

众所周知，凡属一般性通法，都有各自选定的计算对象(基本未知量)，和相应的表征结构整体某项条件的典型方程。以传统结构力学中的力法和位移法为例。力法的典型方程是结构某些部位变形协调条件的数学表述，选定的基本未知量是“多余未知力”。位移法的典型方程是结构某些部位静力平衡条件的直接展开，选定的基本未知量是“结点位移”。边值法的典型方程是“边值矩阵方程”(简称边值方程)，它不是某个单一条件的体现，而是综合静力平衡、变形协调和物理关系三者的总体反映；作为基本未知量，其中只含有结构两端边界的力和位移。

边值法的解题思路，对于连续体系和离散体系，有一个固定的统一程式。这个统一程式的核心，就是要揭示原结构的“递归性”，并且通过递归性反映出来的力学量间的内在联系，建立起直接解决结构分析问题的典型方程，即边值方程。这里所谓的递归性，主要有两层涵义：第一层是“定性”的，即根据计算上的需要，通过广义结点或节线，把原结构理解为一串依序首尾相连的子结构，形成从一端边界贯通到另一端边界的“结构链”，其上只有结点荷载而无非结点荷载作用。链式结构两端边界处的支承反力和端点位移，统称之为“边值”；并把前者称为“力边值”，后者称为“位移边值”。第二层是“定量”的，要求具体找出边值法所需的递归公式，把子结构链一端的内力和位移，用另一端的内力和位移

来表示。这是关键性的一步。土建工程中的许多结构，从形式到本质就是一种链式结构，存在明显的递归性，如连续梁和连续架等等。有些结构，如单个独立的梁板、悬索和壳体等，形式上并无链式结构的几何特征，但本质上仍然具有潜在的递归性，只要略加思考，揭示其递归性是很容易的。总括言之，链式结构和结构的递归性是两个不同的概念：前者是形式，后者是本质；链式结构一般都具有递归性，但具有递归性的结构不一定呈链型。读完本书第 2、第 10、第 11 和第 21 等章之后，方可彻底领悟此言之不谬。

不论结构形式和问题性质多么不同，边值法的基本思路总是遵循上述统一程式。值得指出的是，思路中牵涉到的某些关键性环节，比如寻求递归公式、建立边值方程等，都是一次性的“定型化”工作：这类公式和方程一经确立，对于同一类型的结构，将不因荷载性质、支承条件、截面形状等的不同而改变。在工程结构设计中，一般总要处理多种不同工况，这种“定型化”的优点是尽人皆知的。

关于边值法的功能，值得指出的有以下几点：

(1) 把结构区分为静定和超静定，并且以静定结构分析的成果作为分析超静定结构的基础，这种因方法本身的局限性不得已而为之的传统思想，在这里是不必要的。因为结构不分静定和超静定，也不分动定和超动定，边值法的应用均无所限制，而且解决问题的程式完全相同。

(2) 把结构的内力分析同位移计算割裂开来，并且以内力分析作为位移计算的前提，按照平行独立的两条理论体系进行叙述的传统思想，在这里也是不必要的。因为结构的内力分析(强度问题)和位移分析(刚度问题)，在一次边值法分析过程中可以“同步”获得解决，没有先后之分。

(3) 边值矩阵方程不仅是结构内力分析和位移分析的典型方程，也是结构稳定和动力分析的有力工具。它的建立只须根据几个简单的低维矩阵，采取递归推进的方式就可完成，这正适合电脑软件的工作模式。

(4) 边值法的基本未知量是“边值”，而结构的边值总是不多的；在这为数不多的边值中，并非全部都进入边值矩阵方程中；在进入边值方程中的少数边值中，又有半数可以通过边界条件直接判定其量值。因此，边值矩阵方程中实际包含的未知量一般都很少，而且不随结构变得比较复杂而有大幅度的波动。

(5) 结构分析的结果正确与否？累计舍入误差程度如何？边值法可以在工作结束的同时，立即从静力平衡和变形协调两个方面自动显示出来，勿须另辟专项进行检查。这种功能，在传统结构力学中是极为罕见的。

§1-4 递归法导言

在思想体系上，递归法和边值法原属于一个整体，它们的共同基点是：以“边值”作为主攻的基本未知量；以“矩阵”作为论证和运算的数学工具；以“递归”作为贯通解题全过程的主线。因此，边值法的前述许多功能，在递归法中也基本存在。不仅如此，由于递归法不囿于边值矩阵方程的建立，计算形式比较灵活多样，对于高层建筑中的各种大型结构体系，涉及几何非线性的索系结构，以及结构的动力响应和弹性稳定等不同性质的力学分析问题，都有较强的适应性，从而更显得得心应手、游刃有余。具体表现可列出如下几个方面：

(1) 把递归性的概念，从“空间”上的递归性扩展到“时间”上的递归性，从而以

“水到渠成”的形式，极自然地把结构的动力分析和静力分析问题，融汇于同一个思想体系中。于是，传统结构力学中，由于理论体系的局限性，把结构的静力分析同动力分析截然分开，用大量篇幅并行讲授结构动力分析的做法，这里看来就显得有点多余。顺便指出，这里所谓的“空间递归性”，主要是指以各种几何造型的子结构链为依托而反映出来的递归关系。各种不同类型结构的静力分析和稳定性分析，运用的就是空间递归性。“时间递归性”则不同，它不需以某个几何型体为依托，而是将时间进行离散，找出连续相邻三个分点时刻所属力学量之间的递归关系。结构动力时程分析一章中运用的就是这种时间递归性。

（2）不难理解，运用递归概念作结构分析时，对于高层建筑和连续拱坝一类的大型结构，常常因为递归路线过长或转换“驿站”过多，相关矩阵中的元素数字会愈来愈大。这势必造成数字计算工作量的急剧增加，甚至超出计算机内存的容纳能力；同时由于舍入和截断误差的连续传播和积累，还可能出现计算混乱，导致最后结果完全失真。在解大型线性和非线性方程组的运算中，这种现象是屡见不鲜的。在递归法的运用中，采取“分区递归”的办法，轻而易举地解决了“数值分析”中经常遇到的这个难题。其具体做法，详见第 8、第 13、第 14、第 15 等章的有关章节。

（3）在实际工程中，从考虑综合经济效益与改善受力性能出发，常力求将结构设计成“等劲式”，或接近等劲式。所谓“等劲式”，并不要求组成结构的全体部件一律具有雷同的几何物理参数，只是指各个子结构链，总体上具有相等或接近相等的抗弯、抗剪或抗轴向变形能力。这种等劲式结构有一种潜在的能使数值分析简化的特殊规律性。递归法发现了这种规律性，并且通过“矩阵递归”的机理作用，充分利用了这种规律性，使一系列高耸结构的静力、动力和稳定性分析计算，获得了大幅度的简化，产生了良好的效果。第 20 章所述各节，只是印证这种效果比较集中的一批范例，散见于其他有关章节的典型事例还有不少，读者可细心领略。

（4）由于客观实际条件的限制，或构造和使用上的需要，大型结构的全体子结构链具有雷同的抗干扰能力，这种情况当然比较少见。但彼此迥异、漫无规则的现象也是极个别的。几何物理参数分布的大多数实际情况是：整体宏观上有变化，局部区域内有雷同。因此，大型结构的边部或中部少数几个子结构链的几何物理参数偏离标准值的情况总是难免的。遇到这种情况，递归法也有简易的处理方案：在等劲式分析的基础上，辅以“递归摄动”分析，即可精确计入因偏离标准值而产生的影响。

§1-5 矩 阵 法 导 言

一个分析方法能否纳入矩阵法范畴，并不以它在解题的某个环节上是否使用了矩阵符号和矩阵代数为基准，而应以在建立方法本身的基本关系和方程及其求解时，矩阵是否贯穿于结构分析的全过程来权衡。按照这个观点，边值法和递归法都应归类于矩阵法范畴。但因它们各有更本质的思想路线，所以没有一般地沿用这个命名。上述关于矩阵法命名的规范化定义，只是作为自身严格要求的一种思维准则，当然只适用于本书，不宜强加于其他同类文献。否则，即使是当前广为传播的“矩阵位移法”，是否有“资格”归类于矩阵法，都是值得商榷的。

第三篇篇名的矩阵法，主要包括“五弯矩阵列方程”和“矩阵迭代方程”两部分。前者是专为分析网格梁系一类的格栅结构而研制的特种方法，后者是专为解决杆系结构的几何非线性问题所作的尝试。

建立和求解五弯矩阵列方程所设计的矩阵法，除满足上述一般性定义的要求外，还有它更丰富的内涵。简言之，这个内涵就是：只以少数几个极其简单的整数矩阵为轴心，按照设计好的矩阵运算模型，采用“滚动式”推进的办法，形成必需的辅助矩阵并建立矩阵方程，直至完成分析的全过程。作为“滚动轴心”的整数矩阵，其中的元素与结构的几何物理参数无关，都是一些自然数按序排列的低维矩阵，勿须计算，可以直接写出。这个方法在工程设计中采用和推广的实践结果证明，在节省计算机内存和缩短运算时间两个方面，是有限元法不能与之相比的，文献[43]对此有较详细的对比说明。

第 24 章中为求解矩阵迭代方程而提出“直接迭代法”，与数值分析中介绍的牛顿迭代法[70]，形式上具有相同的数学结构，但两者有本质上的不同：

(1) 直接迭代法形成的迭代序列不依赖于迭代步数，属于单步定常迭代。牛顿迭代法形成的迭代序列随迭代步数而变，属于单步非定常迭代，两者在计算上有明显的繁简差异。

(2) 对于牛顿迭代法，初值的选取至关重要，但又缺乏可供选择的参考依据，因而常有收敛缓慢，甚至不收敛之虞。直接迭代法明确取线性解作为初值，不存在发散的可能性，且收敛极为迅速。

(3) 牛顿迭代法的每一步迭代，都要计算一个 $2n\times 2n$ 维的雅可比矩阵及其逆阵；也就是每一步都要计算 $2n$ 个函数值和 $(2n)^2$ 个偏导数值，同时还要作一次 $2n\times 2n$ 维矩阵的求逆，计算工作量之大，不言而喻。至于直接迭代法的每一步迭代，则只需一次矩阵乘法 $\mathbf{K}^{-1}\cdot\mathbf{K}(\delta_i)$，其中 $\mathbf{K}^{-1}$ 已在选取初值时形成，迭代过程中始终保持不变。

(4) 当雅可比矩阵奇异或者病态时，牛顿迭代法将因无法进行而失效。直接迭代法则不可能出现这种局面，因为对于几何稳定的实际工程结构，逆矩阵 $\mathbf{K}^{-1}$ 总存在，且无病态之忧。除非结构本身几何可变或几何瞬变，而这在实际工程中是不能容许的。

由于非线性方程组求解的复杂性，近一二十年来相继出现了一些新的数值方法。但多数都是针对牛顿法存在的缺点，在它的基础上作出某种改进而形成的，总的说来，收效并不理想。至少，在这些牛顿型方法中，每一步迭代还是需要解一组 $2n$ 元联立方程[70]。直接迭代法之所以收敛迅速，计算工作量大幅度减少，是因为在建立迭代方程之初，已将方程组中的线性部分与非线性部分自动分离。由此给人们一个启示：在解决实际工程中的非线性问题时，与其在求解方法的改进上下功夫，不如在建立方程时周密考虑它的可解性和易解性来得更有效。

第一篇　边　值　法

第 2 章　单跨直梁的内力和位移分析

§ 2-1　问 题 的 提 法

单跨直梁，亦称单梁，是最简单的工程结构之一。除可作为独立结构存在以外，更多地是作为一个组成部件隐含在其他较复杂的工程结构中，因而它的两端一般可为铰支、固定、自由或其他任意弹性支承。各种不同端部约束的适当组合，会形成通常概念上的静定梁或超静定梁。在本书中，这种区分是没有必要的，也是没有意义的。

设图 2-1 所示为一等截面或阶式变截面单梁，跨中作用有一系列离散分布的集中力 P_i 和集中力偶 $m_i(i=0, 1, 2, \cdots, n)$。现欲求此单梁两端的支承反力和边界位移，以及跨中从 1 到 $n-1$ 个指定截面处的线位移和角位移、弯矩和剪力。

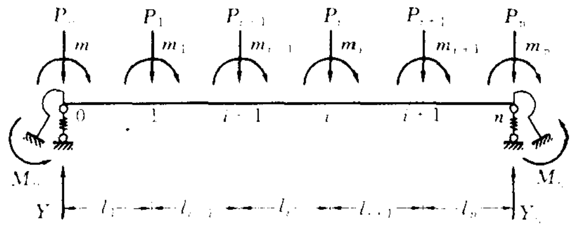


图 2-1　集中参数系统

关于单梁分析问题的上述提法，需要补充说明的有三点：

第一，题设荷载“离散分布”的规定，只是为了便于叙述边值法的基本思路和物理概念采取的“权宜”之策，并非方法的理论根据和实际应用有此限制。往后即将看到，以离散分布荷载为依托讲清边值法的计算流程之后，处理连续分布荷载时就“水到渠成”了。

第二，跨中的 $n-1$ 个离散截面，是根据设计需要而指定的“计算截面”，其数目、部位和间距完全可以任意；不是“有限元”意义上的“离散化”概念。边值法是精确法，不是近似法，不存在单元划分问题。

第三，问题提法中要求从支座反力到截面内力、位移的计算，必须是“同步”的。也就是说，通过一次完整的边值法分析流程，可以同时解决上面提出的全部问题，做到“毕其功于一役”。而不是像传统结构力学那样，需要经历理论和方法各异的三个没有内在联系的处理阶段，才能最后解决问题。

要完成对边值法的理解和认识，应弄清几个基本环节，包括关于位移函数、物理方程和递归公式的概念，直至边值矩阵方程的建立等等。以下将逐节依序讨论这些问题。

§ 2-2　梁段的位移函数

图 2-2 表示从图 2-1 所示单梁中取出的任意一节梁段，长度为 l_i，抗弯刚度为 EI_i；两端截面上有图示正向的内力和位移，中间无直接荷载作用。由材料力学已知，对于这种无荷

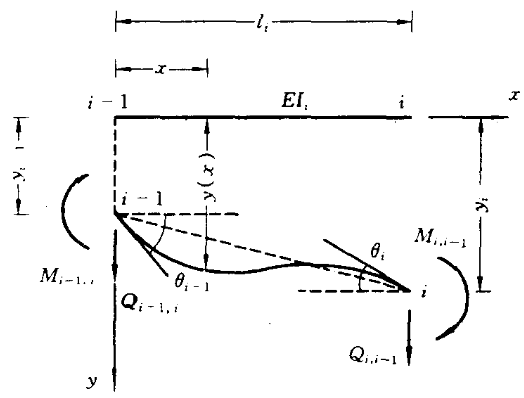


图 2-2 梁段的位移函数

载梁段，其弹性曲线微分方程呈齐次式

$$\frac{d^4y}{dx^4}=0 \tag{a}$$

它有通积分

$$y(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D \tag{b}$$

其中 A，B，C，D 是四个待定常数。

由微分方程理论知道，n 阶齐次线性常微分方程的通解，总可表为 n 个任意独立特解的线性组合。因此，为了便于建立边值法，无妨将方程(a)的一般积分改取作

$$y(x)=\varphi_1(x)y_{i-1}+\varphi_2(x)\theta_{i-1}+\varphi_3(x)y_i+\varphi_4(x)\theta_i \tag{2-1}$$

式中 y_{i-1}，θ_{i-1}和 y_i，θ_i 分别表示梁段左、右两端的线位移和角位移(图 2-2)；$\varphi_j(x)$($j=1\sim4$)则是四个待定函数。

式(2-1)的意思是，将梁段区间内的连续位移函数用两端的四个离散位移来表示。至于待定函数 $\varphi_j(x)$的选取，则要求它们必须是方程(a)的四个独立特解，同时满足下列边值条件：

$$\left.\begin{array}{llll}\varphi_1(0)=1 & \varphi_1'(0)=0 & \varphi_1(l_i)=0 & \varphi_1'(l_i)=0\\ \varphi_2(0)=0 & \varphi_2'(0)=1 & \varphi_2(l_i)=0 & \varphi_2'(l_i)=0\\ \varphi_3(0)=0 & \varphi_3'(0)=0 & \varphi_3(l_i)=1 & \varphi_3'(l_i)=0\\ \varphi_4(0)=0 & \varphi_4'(0)=0 & \varphi_4(l_i)=0 & \varphi_4'(l_i)=1\end{array}\right\} \tag{2-2}$$

根据上述两点要求，极易确定式(2-1)中每个函数 $\varphi_j(x)$的显性式。试以 $\varphi_1(x)$为例

因为 $\varphi_1(x)$必须是方程(a)的一个特解，故可以随意地将它写成式(b)的形式

$$\varphi_1(x)=A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1 \tag{c}$$

于是，由式(2-2)中的第一个边值条件不难推知

$$A_1=\frac{2}{l_i^3},\ B_1=-\frac{3}{l_i^2},\ C_1=0,\ D_1=1$$

代入式(c)后，即得

$$\varphi_1(x)=1-3\left(\frac{x}{l_i}\right)^2+2\left(\frac{x}{l_i}\right)^3 \tag{2-3a}$$

同理，利用式(2-2)的后三个边值条件，便可依序得到

$$\varphi_2(x)=x-2\frac{x^2}{l_i}+\frac{x^3}{l_i^2} \tag{2-3b}$$

$$\varphi_3(x)=3\left(\frac{x}{l_i}\right)^2-2\left(\frac{x}{l_i}\right)^3 \tag{2-3c}$$

$$\varphi_4(x)=-\frac{x^2}{l_i}+\frac{x^3}{l_i^2} \tag{2-3d}$$

式(2-3)所示的四个函数 $\varphi_j(x)$($j=1\sim4$)，通常称为梁函数。在计算数学中，则习惯称之为厄米特(Hermite)多项式。在传统结构力学的近似计算中，常用它来作为插值函数。