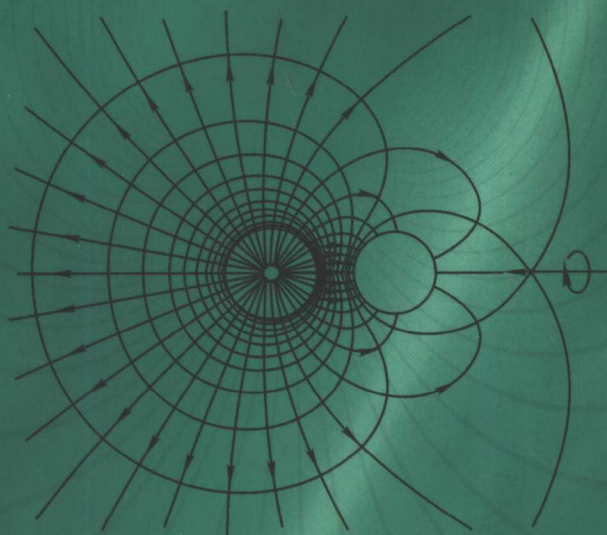




面向 21 世纪 课程 教材  
Textbook Series for 21st Century

# 工程电磁场导论

冯慈璋 马西奎 主编



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

## 内容提要

本书教育部《面向 21 世纪高等教育教学内容和课程体系改革计划》项目研究成果,是面向 21 世纪课程教材。本书由西安交通大学电工原理教研室在多年教学研究和实践的基础上编写而成。全书上较好地处理了与物理学中电磁学相衔接的内容。与《电磁场》(冯慈璋主编)相比,删去了狭义相对论和各向异性媒质中电磁场的内容,增加了准静态电磁场和波导与谐振腔的相应内容,不仅保证了强电专业对电磁场理论课程的基本要求,也适当拓展了强电专业的电磁场知识范围。书中突出了电磁场理论在工程实际中的应用,并配有丰富的例题、思考题和习题。

本书适用于电气工程与自动化类学科各专业,也可作为选修课教材或供社会读者参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

工程电磁场导论/冯慈璋,马西奎主编. —北京:高等教育出版社,2000

ISBN 7-04-007988-7

I. 工… II. ①冯… ②马… III. 电磁场  
IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 17621 号

工程电磁场导论  
冯慈璋 马西奎 主编

---

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号 邮政编码 100009  
电 话 010-64054588 传 真 010-64014048  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 中国科学院印刷厂

纸张供应 山东高唐纸业集团总公司

---

开 本	787×960 1/16	版 次	2000年6月第1版
印 张	23	印 次	2000年6月第1次印刷
字 数	420 000	定 价	19.50 元

---

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

**版权所有 侵权必究**

## 内容提要

本书教育部《面向 21 世纪高等教育教学内容和课程体系改革计划》项目研究成果,是面向 21 世纪课程教材。本书由西安交通大学电工原理教研室在多年教学研究和实践的基础上编写而成。全书上较好地处理了与物理学中电磁学相衔接的内容。与《电磁场》(冯慈璋主编)相比,删去了狭义相对论和各向异性媒质中电磁场的内容,增加了准静态电磁场和波导与谐振腔的相应内容,不仅保证了强电专业对电磁场理论课程的基本要求,也适当拓展了强电专业的电磁场知识范围。书中突出了电磁场理论在工程实际中的应用,并配有丰富的例题、思考题和习题。

本书适用于电气工程与自动化类学科各专业,也可作为选修课教材或供社会读者参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

工程电磁场导论/冯慈璋,马西奎主编. —北京:高等教育出版社,2000

ISBN 7-04-007988-7

I. 工… II. ①冯… ②马… III. 电磁场  
IV. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 17621 号

工程电磁场导论

冯慈璋 马西奎 主编

---

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

电 话 010-64054588

传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 中国科学院印刷厂

纸张供应 山东高唐纸业集团总公司

开 本 787×960 1/16

版 次 2000年6月第1版

印 张 23

印 次 2000年6月第1次印刷

字 数 420 000

定 价 19.50 元

---

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

**版权所有 侵权必究**

# 前 言

电磁场理论是高等学校工科电类专业的一门技术基础课。它所涉及的内容是电类专业学生应具备的知识结构的必要组成部分，同时又是一些交叉领域的学科生长点和新兴边缘学科发展的基础。学好这门课程将增强学生的适应能力与创造能力。

本书是为高等学校工科电类专业本科生学习电磁场理论课程而编写的教学用书，并于1998年经教育部批准为面向21世纪课程教材。

编写《工程电磁场导论》教材的主要目标是：为了适应当前高等教育改革中注重素质培养和能力培养、加强基础、拓宽专业的需要。在编写中，编者主要作了如下的考虑：

(1) 到下个世纪初，目前电磁场理论作为一门主干(核心)课程的框架仍将基本保持不变。它仍然是以经典内容为主，也仍然是电类专业技术的基础。但是，应该重新审视、选择和组织教学内容，处理好基础部分与深入内容、传统方法与现代观点之间的关系，不宜片面强调电磁场理论学科本身的系统性和完整性。应该明确本门课程是作为专业学习的基本支撑，是为学科方向服务的。

(2) 突出电磁场的普遍规律，注重教材的基础性，使学生对基础知识牢固掌握、灵活运用。注重基本概念、基本规律和基本的分析计算方法。

(3) 注意应用性和实践性(即工科特色)的体现。重视工程问题的电磁模型的建立和定性分析，有意识地培养学生从定性的方法入手提出问题和分析问题的能力。

(4) 协调好本课程与前后课程之间的关系。让学生充分发挥已掌握的数学知识和技能，把物理概念和数学工具妥善地结合起来处理电磁问题。

(5) 加强计算能力的训练。我们相信，要全面掌握这门课，没有一定数量且能应用这些基本方法的练习是不可能完成的。

在上述指导思想下，本书的编写遵循由特殊到一般、由简单到复杂、循序渐进的原则，在内容的安排上适当兼顾了强电和弱电专业的要求。概括起来，本书的主要特点：

(1) 在每一章节中，设立有小标题，使得重点突出，层次分明，便于学习。

(2) 突出准静态电磁场的分析，并单独设章。这些内容过去不太被注意，

但工程中的电磁场问题则有很多属于这一类。

(3) 边值问题没有单独设章,把“边值”这一概念贯穿于全书的各章节中去。这样,在理论部分含有计算问题,在计算部分含有理论问题,而不是把理论与计算截然分开,有助于学生树立起建立电磁模型的习惯。

(4) 精心配备例题和习题。本书列举了相当数量的例题。这些例题与正文密切配合,以利于学生更好地理解和掌握基本概念和基本分析方法。各节次之后都配有密切配合本节内容的习题,可以让学生验证他们对内容的理解程度。此外,结合课程特点,每章之后还配备有思考题,同时选编了不同层次的习题,供学生深入钻研,为教师布置课外作业提供了更多的灵活性,并提供因材施教的余地。

全书共分八章,分别是:静电场、恒定电场、恒定磁场、时变电磁场、准静态电磁场、平面电磁波的传播、均匀传输线中的导行电磁波、波导与谐振腔。把矢量分析另列于附录中。每章末均附有小结。书末附有部分习题答案。本书的部分章节相对独立性,在教学中可以根据各自的需要取舍。

本书由冯慈璋、马西奎主编。第一、五章由马西奎执笔,第二、三章由刘补生执笔,第四、八章和附录A由邱捷执笔,第六、七章由王仲奕执笔。书稿承蒙浙江大学倪光正教授和华北电力大学崔翔教授仔细审阅,提出了许多宝贵修改意见。本书的立项和出版得到了教育部“电路、信号系统和电磁场课程”教学指导小组,高等教育出版社和西安交通大学的大力支持和资助。谨在此一并表示衷心的感谢。

对于书中不妥和错误之处,衷心欢迎使用本书的师生和其他读者批评指正。意见请寄西安交通大学电气工程学院电工原理教研室(邮编710049)。

编 者

一九九九年十月  
于西安交通大学

责任编辑	林宇
封面设计	张楠
责任绘图	尹莉
版式设计	马静如
责任校对	俞声佳
责任印制	宋克学

# 目 录

<b>第一章 静电场</b> .....	(1)
§ 1-1 电场强度·电位 .....	(1)
§ 1-2 高斯定律 .....	(13)
§ 1-3 静电场基本方程·分界面上的衔接条件 .....	(19)
§ 1-4 静电场边值问题·唯一性定理 .....	(24)
§ 1-5 分离变量法 .....	(30)
§ 1-6 有限差分法 .....	(35)
§ 1-7 镜像法和电轴法 .....	(40)
§ 1-8 电容和部分电容 .....	(46)
§ 1-9 静电能量与力 .....	(52)
提要 .....	(61)
思考题 .....	(64)
习题 .....	(67)
<b>第二章 恒定电场</b> .....	(70)
§ 2-1 导电媒质中的电流 .....	(70)
§ 2-2 电源电动势与局外场强 .....	(73)
§ 2-3 恒定电场基本方程·分界面上的衔接条件 .....	(74)
§ 2-4 导电媒质中的恒定电场与静电场的比拟 .....	(79)
§ 2-5 电导和部分电导 .....	(81)
提要 .....	(88)
思考题 .....	(89)
习题 .....	(90)
<b>第三章 恒定磁场</b> .....	(92)
§ 3-1 磁感应强度 .....	(92)
§ 3-2 安培环路定律 .....	(96)
§ 3-3 恒定磁场基本方程·分界面上的衔接条件 .....	(103)
§ 3-4 磁矢位·恒定磁场的边值问题 .....	(106)
§ 3-5 磁位 .....	(114)
§ 3-6 镜像法 .....	(117)

§ 3-7 电感 .....	(120)
§ 3-8 磁场能量与力 .....	(126)
§ 3-9 磁路及其计算 .....	(132)
提要 .....	(139)
思考题 .....	(142)
习题 .....	(142)
<b>第四章 时变电磁场</b> .....	(146)
§ 4-1 电磁感应定律和全电流定律 .....	(146)
§ 4-2 电磁场基本方程组·分界面上的衔接条件 .....	(151)
§ 4-3 动态位及其积分解 .....	(156)
§ 4-4 电磁功率流和坡印亭矢量 .....	(160)
§ 4-5 正弦电磁场 .....	(164)
§ 4-6 电磁辐射 .....	(169)
提要 .....	(179)
思考题 .....	(181)
习题 .....	(183)
<b>第五章 准静态电磁场</b> .....	(186)
§ 5-1 电准静态场与磁准静态场 .....	(186)
§ 5-2 磁准静态场和电路 .....	(189)
§ 5-3 电准静态场与电荷弛豫 .....	(193)
§ 5-4 集肤效应 .....	(198)
§ 5-5 涡流及其损耗 .....	(200)
§ 5-6 导体的交流内阻抗 .....	(203)
§ 5-7 邻近效应和电磁屏蔽 .....	(206)
提要 .....	(210)
思考题 .....	(211)
习题 .....	(212)
<b>第六章 平面电磁波的传播</b> .....	(215)
§ 6-1 电磁波动方程和平面电磁波 .....	(215)
§ 6-2 理想介质中的均匀平面电磁波 .....	(218)
§ 6-3 导电媒质中的均匀平面电磁波 .....	(225)
§ 6-4 平面电磁波的极化 .....	(231)
§ 6-5 平面电磁波的反射与折射 .....	(235)
§ 6-6 平面电磁波的正入射·驻波 .....	(241)
提要 .....	(252)



思考题 .....	(254)
习题 .....	(255)
<b>第七章 均匀传输线中的导行电磁波 .....</b>	<b>(258)</b>
§ 7-1 无损耗均匀传输线方程 .....	(258)
§ 7-2 无损耗均匀传输线的传播特性 .....	(262)
§ 7-3 无损耗传输线中波的反射和透射 .....	(267)
§ 7-4 无损耗传输线的人端阻抗 .....	(274)
§ 7-5 无损耗均匀传输线的阻抗匹配 .....	(281)
§ 7-6 有损耗均匀传输线 .....	(285)
提要 .....	(290)
思考题 .....	(292)
习题 .....	(293)
<b>第八章 波导与谐振腔 .....</b>	<b>(296)</b>
§ 8-1 导行电磁波的分类及其一般特性 .....	(296)
§ 8-2 矩形波导 .....	(302)
§ 8-3 介质波导 .....	(308)
§ 8-4 谐振腔 .....	(312)
提要 .....	(316)
思考题 .....	(320)
习题 .....	(320)
<b>附录一 矢量分析 .....</b>	<b>(321)</b>
<b>附录二 电磁单位制 .....</b>	<b>(336)</b>
<b>附录三 部分材料的参数和物理常数 .....</b>	<b>(339)</b>
<b>部分习题答案 .....</b>	<b>(342)</b>

# 第一章 静 电 场

相对于观察者静止且量值不随时间变化的电荷所产生的电场,称为静电场。本章首先介绍静电场中最主要的场量——电场强度  $\mathbf{E}$  和标量电位  $\varphi$ 。从库仑定律出发,在分析真空中静电场的基础上,分别讨论导体和电介质对电场的影响。电介质的影响可归结为极化后出现的极化电荷所产生的影响,从而引入电极化强度矢量  $\mathbf{P}$ 。在研究电场强度矢量闭合面积分的基础上,引入电通[量]密度(又称电位移)  $\mathbf{D}$ , 并导得高斯定律  $\left(\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q\right)$ , 它与静电场无旋特性  $\left(\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0\right)$  一起, 构成静电场的积分形式的基本方程。

应用积分形式的基本方程, 导得不同媒质分界面上的衔接条件。应用微分形式的基本方程  $(\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$  和  $\nabla \times \mathbf{E} = 0)$ , 导出电位  $\varphi$  满足的泊松方程  $(\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon)$  和拉普拉斯方程  $(\nabla^2 \varphi = 0)$ 。把静电场问题归结为在给定边界条件下求解泊松方程或拉普拉斯方程的边值问题。

在讨论静电场问题解答唯一性的基础上, 先介绍三种直接解法——直接积分法、分离变量法和有限差分法, 然后介绍两种重要的特殊解法——镜像法和电轴法。

本章将电容概念推广于多导体系统, 引入部分电容。从场的角度, 讨论了静电能量的计算和静电能量的分布, 引入静电能量密度。最后, 重点讨论应用虚位移法求电场力, 并介绍关于电场力的法拉弟观点。

## § 1-1 电场强度·电位

电荷的周围, 存在着一种特殊形式的物质, 称为电场。电场是统一的电磁场的一个方面, 它的表现是对于被入场中的静止电荷有力的作用。相对于观察者为静止的、且其电荷量不随时间变化的电荷所引起的电场, 即为静电场。本节首先从库仑定律出发引入静电场的一个基本场量——电场强度  $\mathbf{E}$ 。在应用矢量分析阐明静电场具有无旋特性的基础上, 引入静电场的另外一个重要的场量——标量电位  $\varphi$ , 简称电位。

### 1.1.1 电场强度

1785年,法国学者库仑(Coulomb)在做了一系列精巧的静电实验后总结出:在无限大真空中,当两个静止的小带电体之间的距离远远大于它们本身的几何尺寸时,该两带电体之间的作用力可表示为

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{e}_{21}}{R^2} \quad (1-1a)$$

和

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{e}_{12}}{R^2} \quad (1-1b)$$

这一规律称为库仑定律。以上两式中,  $q_1$  和  $q_2$  分别是两带电体的电荷量。 $R$  是两带电体之间的距离,  $\mathbf{e}_{21}$  和  $\mathbf{e}_{12}$  是沿两带电体之间连线方向的单位矢量,前者由  $q_2$  指向  $q_1$ , 后者由  $q_1$  指向  $q_2$ 。 $\epsilon_0$  是真空的介电常数。 $\mathbf{F}_{12}$  是带电体  $q_2$  对带电体  $q_1$  的作用力,  $\mathbf{F}_{21}$  是带电体  $q_1$  对带电体  $q_2$  的作用力。

本书采用国际单位制(简称国际制,代号为SI)。在库仑定律的表达式中,电荷量的单位是C(库),距离的单位是m(米),力的单位为N(牛)。 $\epsilon_0$  的单位是F/m(法/米),其值为  $10^{-9}/36\pi = 8.85 \times 10^{-12}$ 。

库仑定律适用的条件是带电体本身的几何尺寸远远小于它们之间的距离。在这样的条件下可以把带电体看成一个几何上的点,称为点电荷。物理上并不存在真实的点电荷,“点”只是相对意义上的概念。

库仑定律给出了两点电荷之间作用力的量值与方向,但并未说明作用力是通过什么途径传递的。历史上,围绕静电力的传递问题有过多年的争论。现在已经知道,电荷之间的作用力是通过其周围空间中存在的一种特殊物质——电场,以有限速度传递的。任何电荷都在其周围空间产生电场。电场的一个重要特性是对处在其中的任何其它电荷都产生作用力,人们引入物理量——电场强度来描述电场的这一重要特性。

设在电场中某  $P$  点置一带正电的试验电荷  $q_0$ <sup>①</sup>, 电场对它的作用力为  $\mathbf{F}$ , 则电场强度(简称场强)定义为

$$\mathbf{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad (1-2)$$

电场强度  $\mathbf{E}$  是一个随着空间点位置不同而变化的矢量函数,仅与该点的电场有关,而与试验电荷的电荷量无关。在SI中,  $\mathbf{E}$  的单位是V/m(伏/米)。

根据电场强度的定义和库仑定律,可以得到位于坐标原点上的点电荷  $q$

① 试验电荷——是指一电荷量足够小的点电荷,以致它的引入对被测电场的影响可以略去不计。

在无限大真空中引起的电场强度为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (1-3)$$

如果点电荷  $q$  所在处的坐标为  $\mathbf{r}'$ , 则它在点  $\mathbf{r}$  引起的电场强度为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{e}_R \quad (1-4)$$

在(1-4)式中涉及空间的两个点, 如图 1-1 所示。一个是电荷量为  $q$  的点电荷所在的位置, 其坐标为  $(x', y', z')$ , 简称“源点”; 另一个是需要确定场量的

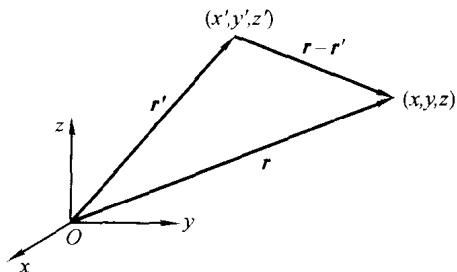


图 1-1 源点与场点坐标的矢量表示

点, 其坐标为  $(x, y, z)$ , 简称“场点”。本书用加撇的坐标  $(x', y', z')$  或  $\mathbf{r}'$  表示源点, 用不加撇的坐标  $(x, y, z)$  或  $\mathbf{r}$  表示场点。

### 1.1.2 叠加积分法计算电场强度 $\mathbf{E}$

(1-4)式还说明, 在电场中的任何一个指定点, 电场强度与产生电场的点电荷的电荷量成正比。场与源之间的这种线性关系使人们可以利用叠加原理来计算  $n$  个点电荷所形成场的电场强度, 即在电场中某一点的电场强度等于各个点电荷单独在该点产生的电场强度的矢量和。它的数学表达式为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{R_k^2} \mathbf{e}_{R_k} \quad (1-5)$$

对于以体密度  $\rho(\mathbf{r}')$  连续分布在  $V$  中的体积电荷, 它所产生的电场强度为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}') \mathbf{e}_R}{R^2} dV' \quad (1-6)$$

参看图 1-2。

同样, 对于面积电荷和线电荷, 它们所产生的电场强度分别为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}') \mathbf{e}_R}{R^2} dS' \quad (1-7)$$

和

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l'} \frac{\tau(\mathbf{r}') \mathbf{e}_R}{R^2} dl' \quad (1-8)$$

式中,  $\sigma(\mathbf{r}')$  和  $\tau(\mathbf{r}')$  分别是对应的电荷面密度和电荷线密度。一般若已知真空中的电荷分布, 原则上都可由上面各式计算电场强度。但都是矢量积分公式, 运算比较复杂。

**例 1-1** 如图 1-3 所示, 真空中有一以线密度  $\tau$  沿  $z$  轴均匀分布的无限长线电荷, 试求离其  $\rho$  处的电场。

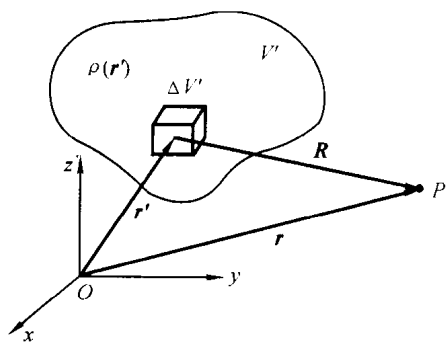


图 1-2 体积电荷的电场

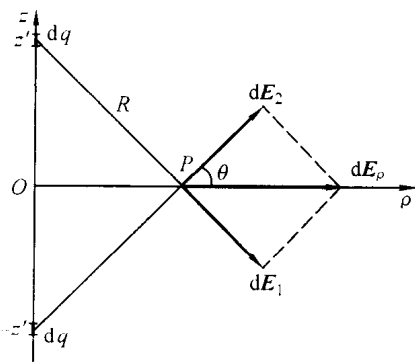


图 1-3 线电荷的电场

**解:** 如图 1-3 所示, 在  $z'$  处的元电荷  $\tau dz'$  所产生的电场为  $\frac{\tau dz'}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ , 方向为  $dE_1$ ; 而在  $(-z')$  处对应的元电荷  $\tau dz'$  产生一大小相等, 方向为  $dE_2$  的电场, 两者合成则得方向为径向的合成场  $dE_\rho$ 。故总电场的方向为径向, 它是所有元电荷产生电场的矢量和, 即

$$\mathbf{E}(\rho) = 2 \int_0^\infty \frac{\tau dz' \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{e}_\rho$$

因为  $R = \sqrt{z'^2 + \rho^2}$  及  $\cos \theta = \rho/R$ , 故

$$\mathbf{E}(\rho) = \frac{\tau \rho}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dz'}{(z'^2 + \rho^2)^{3/2}} \mathbf{e}_\rho = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 \rho} \mathbf{e}_\rho$$

这说明: 以线密度  $\tau$  均匀分布的无限长线电荷周围的电场垂直于线电荷, 场强与坐标  $z$ 、 $\phi$ <sup>①</sup> 无关, 与垂直距离  $\rho$  成反比。

① 为避免与标量电位  $\phi$  相混淆, 本书中用字母  $\phi$  表示坐标系中的  $\phi$  角。

**例 1-2** 一均匀带电的无限大平面,其电荷面密度为  $\sigma$ ,求距该平面前  $x$  处的电场。

**解:** 从观察点向平面作垂线,以垂线与平面的交点为圆心,以半径  $a$  作一环形元电荷,根据对称性,此环形元电荷的电场方向垂直于带电平面。故总电场的量值为(参看图 1-4)

$$E(x) = \int_0^{\infty} \frac{2\pi\sigma a da}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{a da}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

这说明:均匀带电的无限大平面两边的电场均垂直于带电平面,场强为恒值  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ ,平面两侧电场强度的方向相反。

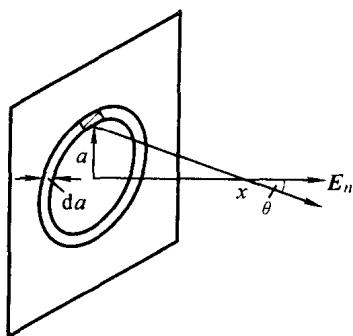


图 1-4 均匀带电无限大平面面积电荷的电场

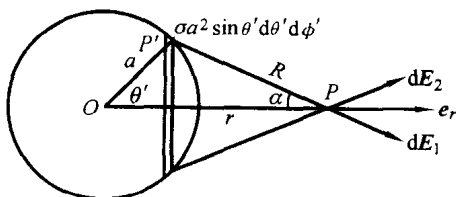


图 1-5 均匀球面电荷外的电场

**例 1-3** 一半径为  $a$  的球面上均匀分布有电荷,其电荷面密度为  $\sigma$ ,求此球面电荷的电场。

**解:** (1) 球外电场

如图 1-5 所示,以  $P$  点与球心连线为球坐标的极轴( $\theta = 0$ ),则  $P$  点的坐标为  $(r, 0, 0)$ 。在球面上,  $P'$  点的坐标为  $(a, \theta', \phi')$ ,取面元  $a d\theta' a \sin\theta' d\phi'$ ,可将其上的面电荷  $\sigma a^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'$  看成一个点电荷,与  $P(r, 0, 0)$  点的距离为  $R$ ,这个面电荷在  $P$  点建立的电场  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma a^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'}{R^2}$  方向为  $dE_1$ 。而在对称点  $(a, \theta', \phi' + 180^\circ)$  处的元电荷  $\sigma a^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'$  产生一大小相等的电场,方向为  $dE_2$ ,两者合成则得径向的合成场  $dE_r$ 。故总电场的方向为径向,它是所有元电荷产生电场的矢量和,即

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sigma a^2 \sin\theta' \cos\alpha}{R^2} d\theta' d\phi'$$

因为  $\cos \alpha = \frac{r^2 + R^2 - a^2}{2rR}$ ,  $\cos \theta' = \frac{r^2 + a^2 - R^2}{2ra}$ , 故  $\sin \theta' d\theta' = -d\cos \theta' = \frac{RdR}{ra}$ 。将上述  $E_r$  积分式的积分变量换为  $dR$ ,  $\theta' = 0$  时,  $R = r - a$ ;  $\theta' = \pi$  时,  $R = r + a$ ,

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_{r-a}^{r+a} \frac{\sigma a^2 R (r^2 + R^2 - a^2)}{ra \times 2rR \times R^2} dR d\phi' \\ &= \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \int_{r-a}^{r+a} \frac{r^2 + R^2 - a^2}{2r^2 R^2} dR \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{a}{2r^2} \right) \left( R - \frac{r^2 - a^2}{R} \right) \Big|_{r-a}^{r+a} \\ &= \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

设球面上有电荷总量  $Q$ , 则上式可化为

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

这说明: 均匀球面电荷在球外建立的电场反比于场点与球心距离的平方, 相当于把球面上的电荷集中到球心所形成的点电荷的电场。

### (2) 球内电场

对于球内电场, 上面的积分下限应换成  $a - r$ , 则

$$E_r = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{a}{2r^2} \right) \left( R - \frac{r^2 - a^2}{R} \right) \Big|_{a-r}^{a+r} = 0$$

这说明: 均匀球面电荷在球内建立的电场恒为零。

以上关于球外和球内电场的计算结果是在电荷沿球面均匀分布的前提下得到的, 即电荷在  $\theta$  及  $\phi$  方向均匀分布。由此可得出推论: 对于球形体积电荷只要每层的电荷体密度是均匀的, 即电荷体密度在  $\theta$  及  $\phi$  的方向是常数, 则在球外建立的电场相当于全部电荷集中到球心所形成的点电荷的电场。而球内的电场应等于场点以内的那部分球体电荷集中在球心时所建立的电场。因为场点以外的沿  $\theta$  及  $\phi$  方向均匀分布的球壳电荷在该场点建立的电场为零。

### 1.1.3 电位

现在来研究将一个单位正试验电荷  $q_0$  在静电场中沿某一路径  $l$  从  $A$  点移至  $B$  点(如图 1-6 所示)时, 电场力所作的功, 即

$$W = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-9)$$

如果电场由点电荷  $q$  单独产生, 则  $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$ , 从而有

$$W = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{l}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (1-10)$$

这个功只与两端点有关，而与移动时的具体路径无关。在  $\mathbf{E}$  由许多电荷产生的一般情况下，电场力所作的功也是与路径无关的。

如果试验电荷在静电场中沿一闭合路径  $l$  从  $A$  点出发经过  $B$  又回到  $A$  点 (如图 1-7)，则电场力所作的功

$$\begin{aligned} W &= \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_A} \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_A} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1-11)$$

即在静电场中，沿闭合路径移动电荷，电场力所做功恒为零。换句话说，电场强度的环路线积分恒等于零，通常写成

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1-12)$$

这是静电场的重要性质。因为任意静电场都可看作是由许多点电荷的静电场叠加的结果，所以该结论对于任意静电场也是正确的。(1-12)式称为静电场的环路定律。

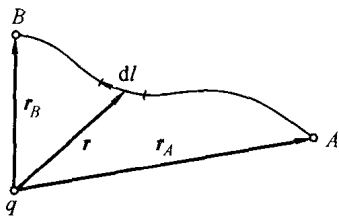


图 1-6 电荷  $q_0$  沿路径  $l$  从  $A$  点移至  $B$  点

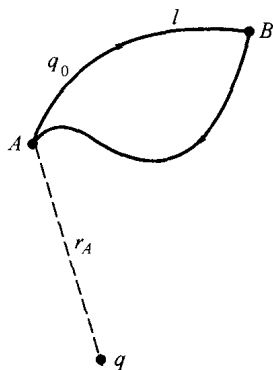


图 1-7 电荷  $q_0$  沿闭合路径移动

应用斯托克斯定理于(1-12)式，则

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

由于上式中的面积分在任何情况下都为零，因此被积函数必处处恒为零，即

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1-13)$$

上式表明，静电场的电场强度  $\mathbf{E}$  的旋度到处为零。因此，通常也说静电场是一个无旋场。



由矢量分析知, 任意一个标量函数的梯度的旋度恒等于零。因此, 静电场的电场强度  $\mathbf{E}$  可以由一个标量函数  $\varphi$  的梯度表示, 即定义

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (1-14)$$

这个标量函数  $\varphi$  称为静电场的标量电位函数。它是表征静电场特性的另一个物理量。电位函数  $\varphi$  在空间某一点的值称为该点的电位。在 SI 中, 其单位是 V (伏)。上式中的负号表示  $\mathbf{E}$  的方向与  $\nabla\varphi$  的方向相反, 即  $\mathbf{E}$  指向电位函数  $\varphi$  最大减小率的方向。

前面(1-9)式中给出了单位正试验电荷在电场中移动时, 电场力对电荷所作的功。将(1-14)式代入该式, 有

$$W = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_A^B \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l}$$

由矢量运算

$$\nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = d\varphi$$

因此,

$$W = - \int_A^B \nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} d\varphi = \varphi_A - \varphi_B \quad (1-15)$$

这就是说, 单位正试验电荷从 A 点移到 B 点时, 电场力所作的功就是这两点的电位差, 即

$$\varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-16)$$

因电场  $\mathbf{E}$  的线积分与路径无关, 所以任意两点间的电位差具有确定的数值。把两点间的电位差定义为此两点间的电压  $U$ , 即

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-17)$$

上式表明, 静电场中两点间的电压, 也等于由一点到另一点移动单位正点电荷时电场力所作的功。在 SI 中, 电压的单位也是 V。

虽然两点间的电位差有确定的数值, 但适合公式(1-14)式的电位函数并不唯一确定。因为如果  $\varphi$  是静电场  $\mathbf{E}$  的电位函数, 取  $\varphi' = \varphi + C$  (任意常数), 则

$$-\nabla\varphi' = -\nabla(\varphi + C) = -\nabla\varphi = \mathbf{E}$$

所以  $\varphi'$  也是静电场  $\mathbf{E}$  的电位函数。也就是说,  $\varphi$  与  $\varphi + C$  这两个电位函数代表同样的电场  $\mathbf{E}$ 。这表明电位的值是相对的。因此, 为了得到确定的电位值, 可以人为地选定空间某点 Q 作为电位的参考点。不管 Q 点如何选取, 一经确定后, 空间任一点 P 都有确定的单一电位值  $\varphi_P$ , 即

$$\varphi_P = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1-18)$$