普通数学

第二卷

实数与实变量函数

[法] C. Pisot, M. Zamansky 著
邓应生 译　陈昌平 校

高等教育出版社

普通数学

第二卷

实数与实变量函数

[法] C. Pisot, M. Zamansky 著

邓应生 译　陈昌平 校

高等教育出版社

这套书系根据原著第二版译出，是法国的大学第一阶段、工程师学校预科第一、二学年与工程师学校第一、二学年的数学教材，是按法国官方教学大纲编写的．全套书共分六卷，本书是第二卷．

本书内容为实数、实变量函数．

本书可供高等学校数学专业师生参考．

普 通 数 学

第 二 卷

实数与实变量函数

[法] C Pisot, M. Zamansky

邓应生 译 陈昌平 校

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

青浦任屯印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7 字数 166,000

1982 年 8 月第 1 版 1983 年 12 月第 1 次印刷

印数 00,001—10,300

书号 13010·0781 定价 1.10 元

目　录

第一章　实　　数

引　　言

我们从自然数集N出发，构造了整数集 Z(第一卷，第五章，第二部分)．加法和乘法两个规律被推广到 Z，使Z成为一个环．从 Z 出发，我们又构造了有理数集Q(第一卷，第五章，第三部分)．

构造了Z以后，就使得减法在Z中总是可能的，而减法在N中并不总是可能的．但在Z中，除法并不总是可能的．构造了Q以后，就使得除法(去掉用 0 作除数)总是可能的．

在每次构造中我们都是把所由出发的集嵌入到更大的集中，并且是这样地嵌入：使得原有的代数法则扩充到新的集上去．

本章的目的是把Q嵌入到更大的集R中去，而把Q看作R的一个子集；R上的代数法则加法与乘法应用到Q的元素上去时和Q上原有的法则相同；这些法则使R成为一个域．

在第一卷构造新的数集时，就是考虑老的元素的有序对和一个等价关系，这样得到新的元素．为了构造实数，要用到有理数的无限性．

想法就是，把实数定义为可数无限多个有理数序列的极限，然而很明显，“有理数序列 r_n 当 n 趋于无穷时趋于实数 x” 这句话，在 x 未被定义以前，是没有意义的．

分割的方法对在Q上序的概念起着基本的作用．序的关系的存在导致极限概念或(根据今后所采用的术语)拓扑概念的存在．我们还要指出R的公理化定义．

我们所使用的方法以在Q上定义一个拓扑作为开始，也就是对“有理数序列收敛到一个有理数”这句话给它一个意义．然后在

非收敛的有理数序列中，考虑那些定义实数的所谓柯西序列.

对这些序列将给以某些简单的约定. 这些约定将给出实数集 R 上的加法与乘法规则. 此外还容易得到序的关系和拓扑，也就是收敛的实数序列概念；Q 将被认为恒等于 R 的一个子集，在 R 上所定义的代数法则，序的关系和拓扑在用于 Q 的元素上时就是原先在 Q 上定义的代数法则，序的关系和拓扑.

第一部分　Q 的拓扑研究

§1　收敛到有理数的有理数序列

一个有理数序列是一 n 的函数，它对于 n 的值用 r_n 来标记. 而这个序列本身则用 (r_n) 来标记，它写起来比 $(r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n, \cdots)$ 要方便一些.

有时要考虑 n 取 0 值的情况，这时序列就写作 $(r_0, r_1, \cdots, r_n, \cdots)$. 要避免当用 r_0 表示一固定的数时可能产生的混淆，序列 (r_n) 的下标 n，最好不取零值.

有理数序列的例子——1° 对不论怎样的 n，$r_n=1$.

2° 如果 $n=2p$（正偶数），则 $r_{2p}=1$；设 $n=2p+1$（正奇数），则 $r_{2p+1}=0$.

3° $r_n=1/n$.

在第一个例子里序列 (r_n) 只取一个值；在第二个例子里取两个不同的值；在第三个例子里取两两不相同的无穷多个值.

4° $r_n=p_n/10^n$，分子中的 p_n 只由一个整数 9 组成，n 是几，它就有几个：

$$r_1=\frac{9}{10},\quad r_2=\frac{99}{100},\quad 等等\cdots$$

定义——如果对于每一正有理数 ε，有一个整数 p 与之对应，

使得对每一$n>p$，有$|r_n|<\varepsilon$，则说有理数序列(r_n)当n趋于无穷时收敛到0.

设(r_n)为有理数序列，r_0为有理数. 如果当n趋于无穷大时序列(r_n-r_0)收敛到0，则说当n趋于无穷大时，有理数序列(r_n)收敛到有理数r_0.

上述两种情况相应地写作

$$\lim_{n\to\infty} r_n=0 \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty} r_n=r_0,$$

r_0叫做序列(r_n)的极限.

也可用下列等价的词组和概念.

当n趋于无穷大时，r_n趋于r_0；

r_n趋于r_0（简略的说法，然而它是不正确的，也是危险的）；

r_n收敛（注释同上）；

$$r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} r_0, \quad r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} r_0.$$

一个非收敛的序列叫做发散的.

词组"序列(r_n)在Q内收敛"表示：存在一个有理数r_0，当n趋于无穷大时，r_n收敛到它.

我们用基本概念来给出各种各样的注释和等价的定义.

1° 我们首先定义了收敛到0；然后由于Q是一加法群，考虑通项为r_n-r_0的序列而定义了收敛到r_0，这能形象地说，在0的邻域中出现的情况可以经过某个平移在任何有理数r_0的邻域中再现.

2° 在定义中，有理数ε是一个任意给定的数，整数p依赖于ε，然而一个整数$p'\geqslant p$可以代替p，因为在定义中词组"有一个整数p与之对应"表示，应该至少存在一个这样的整数，具有定义中所要求的性质；然而显然它并不要求p是唯一的.

常常为了明显起见，写成$p(\varepsilon)$来代替p. 以强调p是依赖于ε的；这一点要记住.

3° 已给的有理数 ε 是这样一个任意的数,它要使收敛定义中要求的条件对任意的 $\varepsilon>0$ 都能满足.

然而现在要指出,如果给定一个正有理数的序列(ε_m),当m趋于无穷时它趋向零,则只要对任意的 ε_m,总能找到一个整数$p(\varepsilon_m)$,不妨写作 p_m,使得任意的 $n\geqslant p_m$,导致$|r_n-r_0|<\varepsilon_m$,就足以断定 r_n 趋向于 r_0.

这还表明,设给定两个序列(r_n),(r'_n),如果$|r_n|\leqslant|r'_n|$,又如果 r'_n趋向于零,则 r_n 也趋于零.

4° 如果(r_n)收敛到 r_0,则序列$(|r_n|)$收敛到$|r_0|$,因为根据绝对值的性质有

$$||r_n|-|r_0||\leqslant|r_n-r_0|,$$

这只要应用上面 3°最后的说明就可证明了.

5° 收敛序列的概念是与这个序列的极限不可能分开的.当考虑的只是有理数时,这个极限应该是一有理数.我们预先讲一下以后要阐述的序列,即说明,如果在实数集合内,一个序列收敛到$\sqrt{2}$(它是实数,然而不是有理数),这个序列在实数集R内是收敛的,但在有理数集Q内不收敛.

6° 语句"对于每一 $\varepsilon>0$,存在这样的 $p(\varepsilon)$,使得对每一$n>p(\varepsilon)$,$|r_n-r_0|<\varepsilon$"在逻辑上等价于:"对于每一 $\varepsilon>0$,$|r_n-r_0|\geqslant\varepsilon$ 只对 n 的有限个值有效"或"对于每个 $\varepsilon>0$,$|r_n-r_0|<\varepsilon$ 除去 n 的有限个值外都成立".

采用逻辑符号来书写,就是

$$\forall\varepsilon>0,\exists p \quad 且 \quad \forall n>p\Longrightarrow|r_n-r_0|<\varepsilon.$$

这个语句的否定,定义了一个非收敛的序列,它就是:"存在$\varepsilon>0$,使得$|r_n-r_0|\geqslant\varepsilon$ 对 n 的无限多个值成立",它也可写作

$$\exists\varepsilon>0,\forall p \quad 且 \quad \exists n>p\Longrightarrow|r_n-r_0|>\varepsilon.$$

还可以说:如果对每个正有理数 ε,序列(r_n)的一切 r_n,除去

其中的有限个外，有$|r_n-r_0|<\varepsilon$，则r_n收敛到r_0.

或者说：如果对不论怎样的正有理数ε，只对有限个n的值才有$|r_n-r_0|\geqslant\varepsilon$，则$r_n$收敛到$r_0$. 实际上，使$|r_n-r_0|\geqslant\varepsilon$的序标$n$是有限的数；如果$p$是这些序标中最大的一个，则当$n\geqslant p+1$时，就有$|r_n-r_0|<\varepsilon$.

语言——词组“除去有限个”表示，例外的情况预计只发生有限次，或不发生.

7° 下面的命题是重要的，我们在最一般的情况下还会遇到这命题.

如果一个有理数序列在Q内收敛，则其极限是唯一的.

实际上，假设序列(r_n)在Q内收敛到r_0，与$r_0'\neq r_0$. 设

$$\varepsilon=\frac{|r_0-r_0'|}{3}.$$

因为(r_n)收敛到r_0，则对每一$n\geqslant p$有$|r_n-r_0|<\varepsilon$.

因为(r_n)收敛到r_0'，则对每一$n\geqslant p'$有$|r_n-r_0'|<\varepsilon$. 设P是p和p'中最大的一个，则对每一$n\geqslant P$同时有

$$|r_n-r_0|<\varepsilon \quad 和 \quad |r_n-r_0'|<\varepsilon.$$

可是

$$|r_0-r_0'|=|r_0-r_n+r_n-r_0'|\leqslant|r_0-r_n|+|r_n-r_0'|,$$

于是

$$|r_0-r_0'|\leqslant\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

可是

$$\varepsilon=\frac{|r_0-r_0'|}{3},$$

于是有$3\varepsilon\leqslant2\varepsilon$，这是一个矛盾.

8° 设(r_{n_k})是从(r_n)中抽取出来的序列（卷一，第六章，第三部分，§2）. 如果(r_n)收敛到r_0，于是，除了n的有限个值以外，有

$|r_n-r_0|<\varepsilon$. 从而,除了(n_k)的有限个值之外,总有$|r_{n_k}-r_0|<\varepsilon$. 因而:

从收敛序列(r_n)抽取出来的序列(r_{n_k})收敛到与 (r_n) 同一的极限.

然而其逆是错的. 例如,由 $r_{2p}=0$, $r_{2p+1}=1$ 定义的序列不收敛,因为偶数序标的序列收敛到 0. 如果(r_n)收敛, 它的极限应是 0, 然而有(r_n)中的无限多项使$|r_n-0|>\frac{1}{2}$,这些项就是序标为奇数的一切项(见上面的 6° 之末).

9° 不等式$|r_n-r_0|<\varepsilon$ 等价于下列两个不等式

$$-\varepsilon<r_n-r_0<\varepsilon$$

或

$$r_0-\varepsilon<r_n<r_0+\varepsilon.$$

以此我们可以引入区间概念.

10° 如果一个序列 (r_n) 是收敛的, 则除掉有限个序标外成立 $|r_n-r_0|<\varepsilon$. 于是,如果考虑这个序列的两项 r_p, r_q,因为

$$|r_p-r_q|=|r_p-r_0+r_0-r_q|\leqslant|r_p-r_0|+|r_0-r_q|,$$

则

$$|r_p-r_q|<2\varepsilon$$

除掉 p 和 q 的有限个值成立.

换句话说,对于任意的正有理数 ε(或 2ε,如上面的不等式,这是没关系的,因为 ε 是任意的), 存在一个整数 P, 使得如果 p 和 $q\geqslant P$,则成立$|r_p-r_q|<\varepsilon$.

这个条件对于序列在 Q 中收敛是必要的,然而不是充分的.

以此我们可以引进柯西序列的概念.

§2 Q 的区间

有理数的集 Q 也叫做有理直线，而有理数则叫做点.

设 a, b 是这样的有理数：$a\leqslant b$. 我们说 a 在 b 左边，或 b 在 a 右边.

满足 $a<r<b$ 的有理数 r 的集合叫做以 a, b 为端点的开区间. 也说它是含于 a 与 b 之间的数集或点集. 这个开区间用 $]a, b[$ 来表示.

如果 $a=b$, 这区间就不包含点. 叫它做空的.

满足 $a\leqslant r\leqslant b$ 的有理数 r 的集合叫做闭区间并用 $[a, b]$ 来表示. 如果 $a=b$, 这区间就只包含一个点. 一个点于是为闭区间.

同样也可考虑右闭左开区间：$]a, b]$, 左闭右开区间：$[a, b[$, 它们分别定义为：$a<r\leqslant b$, $a\leqslant r<b$.

开区间 $]a, b[$ 的端点 a, b 不属于区间. 可是, 闭区间的端点 a, b 属于区间.

一个非空的开区间永不能退化为一点.

因为 a, b 是有理数，$\frac{a+b}{2}$ 也是有理数；点 $\frac{a+b}{2}$ 叫做区间的中点. 区间 $]r_0-\varepsilon, r_0+\varepsilon[$ (这里 r_0, ε 是有理数)的中点正是 r_0.

如果有 $a<r<b$ (相应地 $a\leqslant r\leqslant b$), 则说有理数 r 属于开区间 $]a, b[$ (或闭区间 $[a, b]$). 也说所考虑的区间包含 r.

利用区间的概念，有理数序列 (r_n) 收敛到有理数 r_0 的定义于是可叙述如下：

(r_n) 收敛到 r_0, 是指：任一开区间 $]r_0-\varepsilon, r_0+\varepsilon[$ (r_0 是它的中点), 除掉 (r_n) 中可能的有限项以外, 包含一切的项 r_n.

然而还应指出，包含 r_0 的每个开区间 $]a, b[$ 也包含中点为 r_0 的一个开区间，因为这里只要取 ε 为 r_0-a, $b-r_0$ 两数中最小的

一数即可；从而中点为 r_0 的每个开区间$]r_0-\varepsilon, r_0+\varepsilon[$可以看成是包含在包含 r_0 的一个开区间$]a, b[$内，由此有下面关于收敛的另一种定义：

(r_n)收敛到 r_0，是指包含 r_0 的每个开区间包含除掉有限多个项以外的一切 r_n.

收敛序列的这后一个定义是最重要的. 我们不仅在关于实数的定义中遇到它，而且在极限、连续等更一般的概念中将遇到它.

§3 收敛的有理数重序列

有理数的一个重序列是一个从 $N\times N$ 到 Q 内的映射，即一个函数，它的变量是两个整数的有序对(p, q)，它的值是用 $r_{p,q}$ 表示的有理数(卷一，第四章，第三部分，§2).

可以用一个简单的序列构造一个重序列，例如这时可以对每个整数有序对(p, q)令 $r_{p,q}=r_p-r_q$.

也可以在一个重序列 $(r_{p,q})$ 中把序标 p 和 q 看成一个是另一个的函数而构造出无限多个简单序列，例如，如果 $r_{p,q}=p+q$，且设 p 取每一整数值，而 $q=p+1$，则得一简单序列 $2p+1$. 又例如，固定 p 的值，令 q 变化，这样得到的简单序列记作$(r_{p,q})_{q\in N}$.

说一个重序列$(r_{p,q})$当 p 和 q 趋于无穷时收敛到零，是指对每个正有理数 ε，可以对应于一个整数 P，使得对每个有序对(p, q)当同时 $q\geqslant P$, $p\geqslant P$时，有$|r_{p,q}|<\varepsilon$.

又说重序列$(r_{p,q})$ 当 p 和 q 趋于无穷时收敛到有理数 r_0，如果序列$(r_{p,q}-r_0)$收敛到 0.

写作

$$\lim_{p,q\to+\infty} r_{p,q}=r_0 \quad 或 \quad \lim_{\substack{p\to+\infty\\ q\to+\infty}} r_{p,q}=r_0.$$

注释——与在简单序列(r_n)情况中所发生的事相反，一个重

序列$(r_{p,q})$的收敛性定义并不导致：除掉有限个(p,q)外，$|r_{p,q}|<\varepsilon$. 这样，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$收敛到零，而如果$\varepsilon<1$，则对$p=1$和任意的$q\in N$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\varepsilon$.

§4 柯西序列

设(r_n)是一有理数序列. 我们已看到(§1, 10°末尾)，如果(r_n)收敛，则从p和q的某个值P开始，对不论怎样的p和q，有$|r_p-r_q|<\varepsilon$. 换句话说，用$r'_{p,q}=r_p-r_q$定义的重序列$(r'_{p,q})$收敛到零(不言而喻是指当p和q趋于无穷时). 于是：

为了使(r_n)在Q内收敛，必需重序列(r_p-r_q)收敛到零.

然而这个条件不是充分的. 这里有一个例子.

在初等课程中已证明，在有理数的元素中，没有其平方等于2的，且对任意的整数n，可以找到一个整数p_n，使得

$$\left(\frac{p_n}{10^n}\right)^2\leqslant 2<\left(\frac{p_n+1}{10^n}\right)^2.$$

于是

$$2-\frac{p_n^2}{10^{2n}}<\frac{(p_n+1)^2}{10^{2n}}-\frac{p_n^2}{10^{2n}}=\frac{2p_n+1}{10^{2n}}.$$

可是

$$p_n^2\leqslant 2\cdot 10^{2n}<4\cdot 10^{2n}.$$

于是

$$p_n<2\cdot 10^n,$$

且

$$\frac{2p_n+1}{10^{2n}}\leqslant\frac{4\cdot 10^n+1}{10^{2n}}=\frac{4}{10^n}+\frac{1}{10^{2n}}.$$

可是对不论怎样的$n\geqslant 1$，$10^n>n$；这个性质可以用递推法证

明. 由此可得结论: $(p_n/10^n)^2$ 当 n 趋于无穷时, 以 2 为极限. 令 $x_n=p_n/10^n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^2=2$. 如果存在 $x\in Q$ 使 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, 则由于 $x^2-x_n^2=(x-x_n)(x+x_n)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^2=x^2$. 于是 x^2 等于 2, 这是不可能的. 然而因为序列(x_n^2)是收敛的, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_p^2-x_q^2|=0$, 且由于 $x_p^2-x_q^2=(x_p-x_q)(x_p+x_q)$, 则有 $\lim\limits_{p,q\to\infty}|x_p-x_q|=0$. 可见序列 (x_n) 在 Q 中不收敛, 然而是一柯西序列.

最后要指出, 由 $r_{2p}=0$ 和 $r_{2p+1}=1$ 所定义的序列(r_n)不适合条件 $\lim\limits_{p,q\to\infty}|r_p-r_q|=0$, 因为 $r_{2p+1}-r_{2p}=1$.

、 小结

这样在一切有理数序列的集合里, 我们要区别开下列几件事:

1° 序列(r_0)在 Q 中收敛(因而 $\lim\limits_{p,q\to\infty}|r_p-r_q|=0$).

2° 使 $\lim\limits_{p,q\to\infty}|r_p-r_q|=0$ 的序列(r_n), 既包括在 Q 中收敛的一切序列, 然而也包括在 Q 中不收敛的序列.

3° 使$|r_p-r_q|$不趋于零的序列(r_n)是发散的序列, 然而它们不包括在 Q 中发散的所有序列.

于是, 施加于 r_n 上的条件 $\lim\limits_{p,q\to\infty}|r_p-r_q|=0$ 不如对收敛所要求的条件严格.

这个条件将用来定义柯西序列, 我们最终将得到这样的结果: 对于实数来说, 条件 $\lim\limits_{p,q\to\infty}|r_p-r_q|=0$ 是使实数序列收敛的充分必要条件.

条件 $\lim\limits_{p,q\to\infty}|r_p-r_q|=0$ 叫做柯西条件.

有理数的柯西序列的定义——一个有理数序列如果适合柯西条件: $\lim\limits_{p,q\to\infty}|r_p-r_q|=0$, 就叫做**柯西序列**.

重要的注释——我们已看到, 如果一个序列(r_n)收敛到 r_0, 则

从(r_n)中抽取出来的每个序列也收敛到r_0. 然而其逆是不成立的.

可是, 如果序列(r_n)是柯西序列, 则其逆为真. 事实上, 设(r_n)是一柯西序列, 它的一个子序列(r_{n_k})收敛到0. 设$p, q>P(\varepsilon)$, $P(\varepsilon)$是一足够大的数, 则有

$$|r_p-r_q|<\varepsilon,$$

于是, 对于p和$n_k>P(\varepsilon)$, 有$|r_p-r_{n_k}|<\varepsilon$. 然而, 既然$(r_{n_k})$收敛到零, 则除去对有限个$n_k$有$|r_{n_k}|<\varepsilon$. 从不等式

$$|r_p-r_{n_k}|<\varepsilon, \quad |r_{n_k}|<\varepsilon$$

推出: 除p的有限个值以外, 有

$$|r_p|<2\varepsilon.$$

于是序列(r_n)收敛到零. 这样有

定理 1——如果从一柯西序列(r_n)可以抽取一收敛的序列, 则序列(r_n)本身也是收敛的.

由此也同样可推出下列定理2.

定理 2——如果(r_n)是一柯西序列, 则存在一有理数$M>0$, 使得对任意的n, 有$|r_n|\leqslant M$. 如果序列(r_n)不趋于零, 则存在一严格为正的有理数m, 使得: 除去可能对有限个序标外, 下列两个不等式中只有一个成立: $r_n<-m$, 或$r_n>m$. 结果是$|r_n|>m$.

实际上, 对于$p\geqslant n_0$, $q\geqslant n_0$, 有$|r_p-r_q|<\varepsilon$, 于是, 如果$n\geqslant n_0$, 则有$|r_n-r_{n_0}|<\varepsilon$, 即$|r_n|<|r_{n_0}|+\varepsilon$. 这样, 对每个$n$有$|r_n|\leqslant M$, 这里$M$是以下诸数中最大的

$$|r_1|, |r_2|, \cdots, |r_{n_0-1}|, |r_{n_0}|+\varepsilon.$$

如果(r_n)不趋于0, 则存在某个$r>0$, 使得对无穷多个n, 有$|r_n|>r$. 现在取$\varepsilon=r/2$, 则存在$n_1\geqslant n_0$, 使得$|r_{n_1}|>2\varepsilon=r$, 且对$p\geqslant n_0$, $q\geqslant n_0$, 有$|r_p-r_q|<\varepsilon$; 于是, 对一切$n\geqslant n_0$, 有$|r_n-r_{n_1}|<\varepsilon$, 即$r_{n_1}-\varepsilon<r_n<r_{n_1}+\varepsilon$. 因为$|r_{n_1}|>2\varepsilon$, 数$r_{n_1}-\varepsilon$和$r_{n_1}+\varepsilon$同号, 即两者同时为正或同时为负.