高等数学习题课教材

（物理类）

下册

蒋定华　庄大蔚　邵士敏　编

北京大学出版社

高等数学习题课教材

（物理类）

下 册

蒋定华 庄大蔚 邵士敏 编

北 京 大 学 出 版 社

内容提要

本书是根据国家教委制定的物理类高等数学大纲，总结作者多年来的教学实践而编写的习题课教材。全书共分两册。下册分二十五讲，内容包括：多元函数微分学，重积分，曲线积分，曲面积分，无穷级数，富氏级数和常微分方程。

本书旨在帮助高校物理类各专业的大学生学好高等数学这门课，加深对数学基础和理论的理解，培养学生的逻辑推理和计算能力。本书每一讲精选了体现基本教学内容的典型习题和解法，对初学者易犯的错误进行分析。为适应报考研究生的学生的需要，本书还选编了具有一定难度的综合性习题。

本书可作为理工科大学本科生高等数学课的习题课教材，也可供任课青年教师、成人教育和自学高等数学的学生参考，对报考研究生的本科生来说，本书也具有重要的参考价值。

下册目录

第九章　多元函数微分学 …………………………………………（1）
　第一讲　多元函数，极限与连续 ……………………………（1）
　第二讲　偏导数和全微分……………………………………（12）
　第三讲　复合函数微分法与高阶全微分……………………（23）
　第四讲　方向导数与梯度，隐函数微分法…………………（43）
　第五讲　多元函数的泰勒公式，极值和几何应用 …………（61）
第十章　重积分 ……………………………………………………（81）
　第一讲　二重积分概念，在直角坐标下计算二重积分………（81）
　第二讲　在极坐标下计算二重积分，二重积分的
　　　　　变量替换 ……………………………………………（99）
　第三讲　三重积分的概念，在直角坐标和柱坐标下
　　　　　计算三重积分 ………………………………………（118）
　第四讲　在球坐标下计算三重积分，重积分的应用 ………（141）
第十一章　曲线积分、曲面积分及场论初步 …………………（161）
　第一讲　第一型曲线积分与第二型曲线积分的计算 ………（161）
　第二讲　格林公式，曲线积分与路径无关问题 ……………（181）
　第三讲　第一型曲面积分和第二型曲面积分 ………………（200）
　第四讲　高斯公式和斯托克斯公式 …………………………（219）
　第五讲　场论初步 ……………………………………………（236）
第十二章　无穷级数………………………………………………（251）
　第一讲　正项级数……………………………………………（251）
　第二讲　一般项级数…………………………………………（264）
　第三讲　函数项级数…………………………………………（278）
　第四讲　幂级数与泰勒级数 …………………………………（290）
　第五讲　含参变数积分………………………………………（307）

第十三章　富氏级数……………………………………………………(321)
　第一讲　富氏级数 ……………………………………………………(321)
　第二讲　富氏积分与富氏变换 ………………………………………(335)
第十四章　常微分方程…………………………………………………(346)
　第一讲　初等积分法（Ⅰ） …………………………………………(346)
　第二讲　初等积分法（Ⅱ） …………………………………………(358)
　第三讲　二阶线性微分方程 …………………………………………(369)
　第四讲　一阶常系数线性微分方程组 ………………………………(380)
课外习题答案 ……………………………………………………………(397)

第九章　多元函数微分学

第一讲　多元函数，极限与连续

内　容　提　要

1．二元函数

定义　设有三个变量x,y,z,变量x,y的变化域为D。如果对于D中每一个点$P(x,y)$,按照某一对应规则f,变量z都有一个确定的值与之对应，则称z是x,y的二元函数,记作$z=f(x,y)$,D称为函数的定义域。

这个概念的核心是对每一组x,y值都有一个确定的z值与它们对应，常据此来考察几个变量之间是否构成函数关系。

二元函数的定义域通常是平面上的一个区域。

二元函数的图形，通常是一张曲面。例如

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$$

是球心在原点，半径为1的上半球面（见图9.1）。

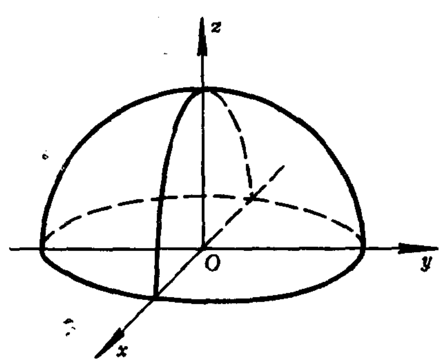

图　9.1

从二元函数推广到更多个自变量的函数是很容易的，没有什么本质上的差别。三元函数的定义域通常是空间中的一个区域，但三元函数的图形是画不出来的，它超出了三维空间的范围，四元以上的函数就连定义域也画不出来了。

2．二元函数的极限

二元函数的极限也是一元函数极限的推广．只是自变量的动点$M(x,y)$趋向于定点$M_0(x_0,y_0)$的情况比较复杂，M可以沿任意路线跑向M_0点，这就比一元函数的情形复杂多了．不过既然M要趋向于M_0，它们之间的距离$\rho=|MM_0|$就要趋向于零．用ρ来描述极限过程是很方便的，它使得多元函数的极限与一元函数的极限在形式上是相同的．

定义 设有二元函数$f(x,y)$，其定义域为D，$M_0\in D$．若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当$0<\rho(M,M_0)<\delta$，且$M\in D$时，总有

$$|f(M)-A|<\varepsilon,$$

则称当$M\to M_0$时$f(M)$的极限存在，其极限值为A，记作

$$\lim_{M\to M_0}f(M)=A \text{ 或 } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A.$$

当极限存在时，M沿任意路径趋向于M_0时，极限值是相同的．所以一旦取到两条路径，M沿这两条路径趋向于M_0时极限值不同，则说明$M\to M_0$时$f(M)$的极限不存在，这是证明极限不存在的最常用的方法．当然，由于“任意路径”是取之不尽的，所以不能用取路径的方法证明极限存在．

求极限的方法，主要是用极限的运算法则，作变换，化成极坐标，用一些不等式放大等方法．

3．多元函数的连续性

定义 设有二元函数$f(M)$，其定义域为$D,M_0\in D$．若$\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=f(M_0)$，则称函数$f(M)$在$M_0$点连续．

多元函数的连续性有一些重要性质．

(1) 多元初等函数在其定义域上是连续的．

利用这一结论可以判断许多函数的连续性．而有了连续性就

可以很容易求出连续点上的函数极限。

(2) 多元函数在有界闭区域$\overline{D}$上连续，则必在$\overline{D}$上有界。

(3) 多元函数在有界闭区域$\overline{D}$上连续，则必在$\overline{D}$上达到最大值和最小值。

(4) 设$f(M)$在区域或闭区域D上连续，$\forall M_1, M_2 \in D$，$f(M_1) < f(M_2)$，则对任意的实数a，$f(M_1) < a < f(M_2)$，在D中至少存在一点M_0，使得$f(M_0) = a$。

本次习题课的内容比较广泛，有区域、多元函数、极限与连续，重点在掌握确定定义域并画出定义域的图形和求极限的方法。

课 内 习 题

1．集合D：$x^2 - y^2 > 1$是区域还是闭区域？画出D的图形，并求其边界。

解 D的边界是双曲线$x^2 - y^2 = 1$，D不包含它的边界，所以D是区域而不是闭区域。

先画出边界曲线$x^2 - y^2 = 1$，为一双曲线，它将平面分成两部分：两条线中间的区域和两条线外面的区域。将(0,0)点代

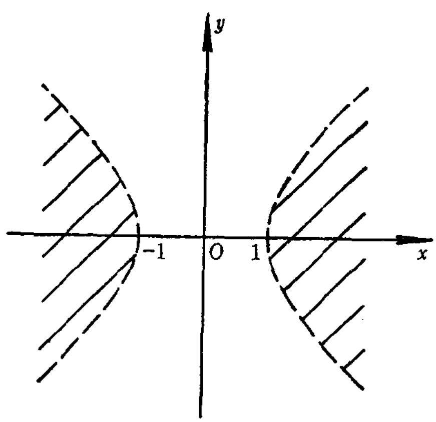

图 9.2

入方程$x^2-y^2>1$中，不满足不等式，因此$x^2-y^2>1$应是两条线外面的部分（图9.2中的阴影部分），且不包括边界曲线 $x^2-y^2=1$，边界曲线用虚线表示。

2．设

$$u=\begin{cases}1, & a>b,\\ 0, & a=b,\\ -1, & a<b,\end{cases}$$

它是否是a,b的二元函数？

解 a与b的变化域都是（$-\infty,+\infty$）。任意取定一组a,b的值，它们的大小关系是确定的，$a>b$，$a=b$，$a<b$三者必居其一，因此可得到一个确定的u值。符合二元函数定义中所述的变量之间的关系，所以u是a,b的二元函数，它的定义域是全平面$-\infty<a<+\infty$，$-\infty<b<+\infty$.

3．求下列函数的定义域，并画出定义域的图形。

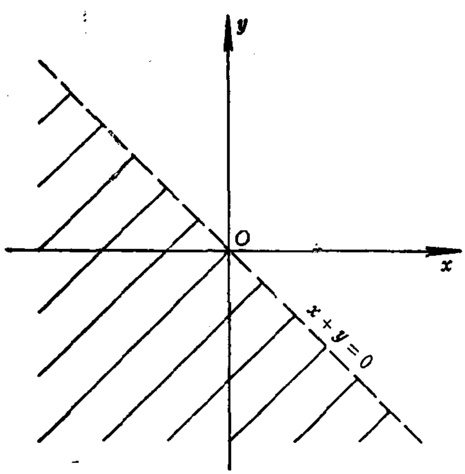

图 9.3

(1) $z=\ln(-x-y)$。

解 由$-x-y>0$即定义域为

$$x+y<0.$$

先画出边界$x+y=0$，以$(-1,0)$代入，表明其属于$x+y<0$的部分。所以，定义域为直线$x+y=0$的左下方区域，不包括直线$x+y=0$（见图9.3）。

(2) $z=\arcsin\frac{y}{x}$.

解 由$\left|\frac{y}{x}\right|\leqslant 1$,即定义域为

$$|y|\leqslant|x|.$$

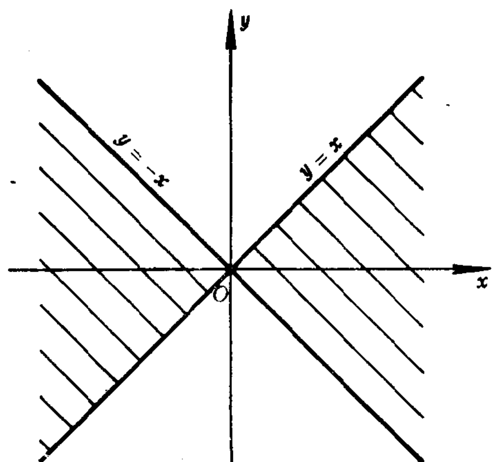

图 9.4

其边界为$|y|=|x|$，即两条直线$y=x$和$y=-x$。以(1,0)点代入，表明其属于$|y|\leqslant|x|$的部分。所以，定义域为$y=\pm x$的左、右两边的部分，包括直线$y=\pm x$在内（见图9.4）。

(3) $u=\sqrt{z^2-x^2-y^2}$.

解 $z^2-x^2-y^2\geqslant 0$，即定义域为$z^2\geqslant x^2+y^2$。

其边界为圆锥面$z^2=x^2+y^2$。以(0,0,1)代入，表明其属于$z^2\geqslant x^2+y^2$的部分。所以，定义域为圆锥内部，包括圆锥面在内（见图9.5)。

4．求下列极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\frac{3xy+x^2y^2}{x+y}=\frac{3\cdot 1\cdot 2+1\cdot 4}{1+2}=\frac{10}{3}$.

这个极限很容易计算。由于它满足极限四则运算法则的条件，可用四则运算法则拆成各部分分别求极限。

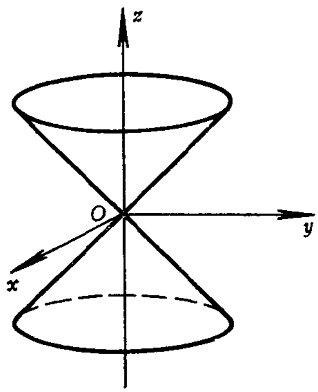

图 9.5

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}$。

解 由于$x\to 0, y\to 0$时 $\sin\frac{1}{x}$和$\cos\frac{1}{y}$ 的极限不存在，就不能用极限的四则运算法则。用放大的方法

$$\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}\right|\leqslant |x+y|,$$

因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |x+y| = 0,$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}\right| = 0,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y} = 0 .$$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x+y)\ln(x^2+y^2)$

解 采用极坐标 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

$$\begin{aligned}|(x+y)\ln(x^2+y^2)| &= |\rho(\cos\theta+\sin\theta)\ln(\rho^2)|\\ &\leqslant 2|\rho\ln\rho|(|\cos\theta|+|\sin\theta|)\\ &\leqslant 4\rho|\ln\rho|,\end{aligned}$$

而已知 $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\ln\rho=0$，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\ln(x^2+y^2)=0.$$

用极坐标，也是求极限的一种常用的方法，不过需要放大成与θ无关的式子，才能求出极限。这个问题在下面第6题中还要继续讨论。

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

解 方法一 由于 $x\to+\infty$，$y\to+\infty$，不妨设 $x>0, y>0$.

$$x^2+y^2-2xy\geqslant 0,\quad x^2+y^2\geqslant 2xy,$$

$$\frac{xy}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{2},$$

$$\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2},$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}=0$，所以

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0.$$

方法二 $\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=e^{x^2\ln\frac{xy}{x^2+y^2}}$，考察 $x^2\ln\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，由于$\dfrac{xy}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$，而$\ln t$是单调上升函数，

$$x^2\ln\frac{xy}{x^2+y^2}\leqslant x^2\ln\frac{1}{2},$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \ln\frac{1}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2\ln 2) = -\infty$，所以

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}} x^2 \ln\frac{xy}{x^2+y^2} = -\infty,$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0.$$

对于复杂一些的求极限问题，常常要用一些不等式进行放大，放大以后就很容易求出极限。上面三题都用到这一方法。

5．证明函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}$ 在点(0,0)处极限不存在。

证 沿 $y=kx$ 趋向于(0,0)点，

$$\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}=\frac{x^2+k^2x^2}{x^2+k^2x^2+(1-k)^2x^2}$$

$$=\frac{1+k^2}{2(1-k+k^2)}.$$

取 $k=0$，即 (x,y) 沿 x 轴趋向于(0,0)，极限为1/2；取 $k=1$，即 (x,y) 沿 $y=x$ 趋向于(0,0)，极限为1。所以当 $x\to0$，$y\to0$ 时，极限不存在。

*6．证明函数 $f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 在(0,0)点的极限不存在.

证 取路径 $y=kx$ 趋向于(0,0)，

$$\frac{x^3\cdot kx}{x^6+k^2x^2}=\frac{kx^2}{x^4+k^2}\to0 \quad (x\to0),$$

即 k 为任意数时，沿 $y=kx$ 趋向于(0,0)，极限都存在，且都为0。这是否能说明 $f(x,y)$ 在(0,0)处极限存在了呢？还是不能．因为趋向于(0,0)时，不仅可以沿某条直线走，还可沿着某条曲线走，甚至可以沿着某个希奇古怪的路径趋向于(0,0)，不可能

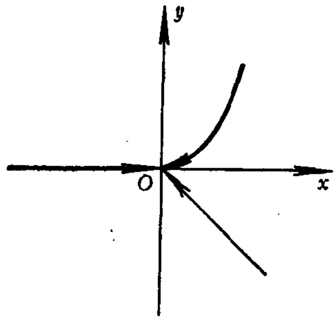

图 9.6

把所有的路径都走到。

取路径 $y=x^3$ 趋向于(0,0)，

$$\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\frac{x^6}{x^6+x^6}=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}\quad(x\to 0, y\to 0).$$

这样，我们就找到了两条路径$y=0$与$y=x^3$（图9.6），沿这两条路径趋于(0,0)时，极限值不同。这就证明了在(0,0)处极限不存在。

本题中，如果用极坐标，函数变为

$$\frac{r^3\cos^3\theta\cdot r\sin\theta}{r^6\cos^6\theta+r^2\sin^2\theta}=\frac{r^2\cos^3\theta\sin\theta}{r^4\cos^6\theta+\sin^2\theta}.$$

对任意固定的θ，$r\to 0$时极限为0。这是否能说明极限存在呢？也不行。问题就出在“任意固定的θ”上了。任意固定θ，在极坐标中只是过原点的直线（见图9.7）。因此，实际上还是只证了沿直线路径趋向于(0,0)的情形。所以，还不能说明极限存在。

这也正是用极坐标求极限时所要注意的问题。在用极坐标后，当$r\to 0$时必须是对θ一致地极限存在才行。“对θ一致”的意思是，无论θ怎样变化，$r\to 0$时的极限都是同一个值。在4.(3)题

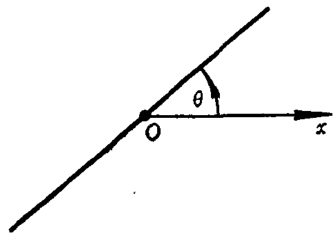

图 9.7

后面曾讲过，“需要放大成与θ无关的式子”，这样就能保证$r\to 0$时的极限是对θ一致的，从而才能得到二元函数的极限。

7. 设$\overline{D}$是平面上的有界闭区域，$P_0(x_0,y_0)$为$\overline{D}$外一点. 证明在$\overline{D}$内一定存在一点离P_0最近，也存在一点离P_0最远。

证　任取$P(x,y)\in\overline{D}$，则

$$u=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

为P到P_0的距离。

显然u在$\overline{D}$上对x,y连续。根据连续函数的性质，u在$\overline{D}$上达到最大值和最小值，即$\exists\, P_1, P_2\in\overline{D}$，使

$$u(P_1)=\max_{P\in\overline{D}} u(P),\qquad u(P_2)=\min_{P\in\overline{D}} u(P).$$

即，P_1到P_0的距离最远，P_2到P_0的距离最近。证完。

课　外　习　题

1. 设$u=\int_a^b(a+bx)^2\mathrm{d}x$，问$u$是否是$a,b$的二元函数？

2. 求下列函数的定义域，并画出定义域的图形：

(1) $z=\sqrt{x}-\sqrt{y}$；

(2) $z=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4}+\arccos\dfrac{1}{x^2+y^2}$；

(3) $u=\ln(z-x^2-y^2)$。

3．画出函数 $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 的图形。

4．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy + 1} - 1}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \dfrac{1 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$；　　(4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$。

5．证明函数

$$f(x,y) = \frac{x - y}{x + y}, \qquad D: \ y \neq -x$$

在(0,0) 处极限不存在。

6．证明 $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$ 极限不存在。

7．利用多元初等函数的连续性求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$；

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1 \\ z \to 2}} e^{xy} \sin\left(\dfrac{\pi}{4} yz\right)$。

8．求下列函数的不连续点：

(1) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$；　　(2) $u = \dfrac{xy}{x + y}$；

(3) $u = \dfrac{1}{\sin x \sin y}$。

9．设$f(x,y)$在区域D上连续，$(x_i, y_i) \in D (i = 1, 2, \cdots, n)$，证明在$D$上存在一点$(\xi, \eta)$，使得

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{n}[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) + \cdots + f(x_n, y_n)]。$$

第二讲　偏导数和全微分

内 容 提 要

1．偏导数

定义　设二元函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某一邻域内有定义。固定$y=y_0$，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称极限值为$z=f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$处对x的偏导数。

固定$x=x_0$，若极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称极限值为$z=f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$处对y的偏导数。

在一点(x_0,y_0)处的偏导数可用下列各种符号：

$$\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x},\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},z'_x(x_0,y_0),\left.z'_x\right|_{(x_0,y_0)},$$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},f'_x(x_0,y_0),\left.f'_x\right|_{(x_0,y_0)}.$$

对于二元函数$z=f(x,y)$，固定变量$y=y_0$，就是一元函数$z=f(x,y_0)$，再对x在$x=x_0$处求导数就是二元函数$z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处对x的偏导数。

对于n元函数，固定$n-1$个自变量，对剩下的一个自变量求导数就是对这个自变量的偏导数。

因此，求多元函数的偏导数，只须用一元函数的微商法就够了。