高等数学习题集

上海交通大学应用数学系　编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书是上海交通大学应用数学系编写的《高等数学》教材的习题集，编排次序与《高等数学》章次完全一致。

本书收集了一元函数与多元函数微积分、级数、微分方程、矢量代数与空间解析几何、矢量分析与场论等方面的习题1710道，并附有积分表(154个公式)、平面曲线图形(32幅)、曲面所围立体图形(40幅)以及习题答案。

本书可供高等工科院校师生、成人高校师生以及报考工科院校研究生的读者参考。

高等数学习题集

上海交通大学出版社出版

(淮海中路1984弄19号)

新华书店上海发行所发行

上海交通大学印刷厂印装

开本 787 × 1092 毫米 1/32 印张 13.875 字数 308000

1987年4月第1版 1987年6月第1次印刷

印数：1—24000

统一书号：13324·111 科技书目：150—318

定价：2.90元

目　　录

第一章　函数

1.1　证明下列不等式，其中 n 为自然数：

(1) 若 $r>1$，则 $r^n>1+n(r-1)$，$n>1$；

(2) 若 $r>1$，则当 $n\geqslant 3$ 时，$r^n>\frac{n^2}{4}(r-1)^2$；

(3) $\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}$；

(4) $\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$；

(5) 当 $n>1$ 时，$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}$；

(6) $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_n$（其中 a_1、a_2、…、a_n 是同符号且大于 -1 的数）；

(7) $2^{n-1}\geqslant n$ 与 $2^{n-1}\geqslant 2(n-1)$.

1.2　证明下列等式：

(1) $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$，

(2) $\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2n-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$；

(3) $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$，

(4) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\cdots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$.

1.3 若 $f(x)=x^3+1$，求 $f(x^2)$ 和 $[f(x)]^2$.

1.4 设 $F(x)=e^x$，证明：

(1) $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$；

(2) $\frac{F(x)}{F(y)}=F(x-y)$.

1.5 设 $F(x)=\lg(x+1)$，

证明 $F(y^2-2)-F(y-2)=F(y)$.

1.6 设 $f(x)=\frac{ae^x+be^{-x}}{a+b}$，求 $f(y)+f(-y)$，并

证明 $f(2x)-f(-2x)=[f(x)]^2-[f(-x)]^2$.

1.7 设 $\varphi(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$

求 $\varphi(3)$、$\varphi(2)$、$\varphi(0)$、$\varphi(0.5)$、$\varphi(-0.5)$.

1.8 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$

求 $\varphi(1)$、$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$、$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$、$\varphi(-2)$.

1.9 若已知函数 $f(x)$ 定义在区间 $[-5, 5]$ 上，试求方程 $f(x)=f\left(\frac{x+8}{x-1}\right)$ 所有的根，其中 $f(x)=x^2-x+3$.

1.10 设 $f(x)$ 具有性质：$f(x+y)=f(x)+f(y)$，则必有 $f(0)=0$，$pf(x)=f(px)$（p 为任意正整数）.

1.11 试确定下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$;

(2) $y=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{1+x}{1-x}$;

(3) $y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1-x)}$;

(4) $y=\log_2(\log_2 x)$;

(5) $y=\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}$;

(6) $y=\lg\sin x$;

(7) $y=\lg(1-2\cos x)$;

(8) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$.

1.12 已知从高为 h 处落下的重物所经过的路程由公式 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 来确定，问(1)此函数的定义域为何？(2)解析式 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 的定义域又如何?

1.13 下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？

(1) $f(x)=\ln x^2$，　　$g(x)=2\ln x$;

(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$，　　$g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，　$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

1.14 求下列函数的反函数：

(1) $y=x^2-2x$;

(2) $y=\sqrt[3]{x^2+1}$;

(3) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$;

(4) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$;

(5)* $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$;

(6)* $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$;

(7) $y=\sin x,\quad x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

1.15 下列初等函数由哪些基本初等函数复合而成？

(1) $y=\sqrt{2-x^2}$;　(2) $y=\cos\dfrac{3x}{2}$;

(3) $y=2^{x^2}$;　(4) $y=\lg\sin x$;

(5) $y=\sin^3 5x$;　(6) $y=\operatorname{arctg}(\cos e^{-\frac{1}{x^2}})$;

(7) $y=\ln^2\ln x^2$;　(8) $y=\arccos\sqrt{\log_a(x^2-1)}$.

1.16 设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求以下函数的定义域：

(1) $f(x^2)$;　(2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)\ (a>0)$; (4) $f(x+a)-f(x-a)\ (a>0)$.

1.17 已知函数 $y=\dfrac{2x-5}{x-3}$ 的值域是 $y\leqslant 0$，$y\geqslant 4$，求函数 y 的定义域.

1.18 设 $f(x)=x+1$，$\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，求 $f[\varphi(x)+1]$.

1.19 设 $\varphi(x)=x^2$，$\psi(x)=2^x$，求 $\varphi[\varphi(x)]$、$\psi[\psi(x)]$、$\varphi[\psi(x)]$、$\psi[\varphi(x)]$.

1.20 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

1.21 设 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x$，求 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$.

1.22 设 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+a}$，$\varphi(x)=\frac{lx+m}{nx+l}$，且 $b:c=m:n$，证明 $f[\varphi(x)]=\varphi[f(x)]$.

1.23 设 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n\text{次}}$，若 $f(x)=a+bx$，证

$$f_n(x)=a\cdot\frac{b^n-1}{b-1}+b^n x.$$

1.24 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\leqslant 0,\\ 0, & x>0,\end{cases}$ $\varphi(x)=x^2-1$，求 $f[\varphi(x)]$.

1.25 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ $g(x)=\ln x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

1.26 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $\varphi(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f[\varphi(x)]$ 和 $\varphi[f(x)]$.

1.27 设有一边长为 a 的正方形的铁皮，现将各角截去相等的小方块，然后折起各边而组成一无盖的箱，试建立此箱的体积与截去小方块边长间的函数关系。

1.28 在斜高 l 给定为 2 时，试写出圆锥体的体积 V 作为它的高 h 的函数表达式。

1.29 设有容量为 $10\mathrm{m}^3$ 的无盖圆柱形桶，底用铜制，侧壁用铁制，已知铜价为铁价的 5 倍，试建立做此桶所需费用与桶的底半径 r 之间的函数关系。

1.30 设M为密度不均匀细杆OB上的一点，若OM的质量与OM的长度平方成正比，又已知$OM=4$单位时其质量为8单位，试求OM的质量与长度间的关系。

1.31 一物体作直线运动，已知阻力的大小与物体运动的速度成正比，但方向相反，当物体以1m/s速度运动时阻力为$2g$，试建立阻力与速度间的函数关系。

1.32 某工厂建一蓄水池，池长50m，断面尺寸如图1-1所示，为了随时能知道池中水的吨数（每立方米水重1吨），可在水池的端壁上标出尺寸，观察水的高度x，就可以换算成储水的吨数T。试列出换算用的函数关系式，并指出函数$T(x)$的定义域。

1.33 底$AC=b$，高$BD=h$的三角形ABC中（见图1-2），内接矩形$KLMN$，其高记为x，试将矩形的周长p和面积S表示为x的函数。

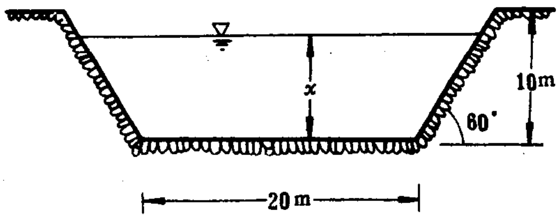

图 1-1

1.34 有三个矩形彼此相距1m放置（见图1-3），其高分别等于3m、2m、1m，而底都为1m。假定$x(-\infty<x<+\infty)$连续变动（即直线AB连续地平行移动），试将阴影部分的面积S表示为距离x的函数。

1.35 试写出图1-4～图1-7所示函数的分析表达式。

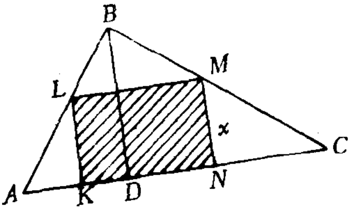

图 1-2

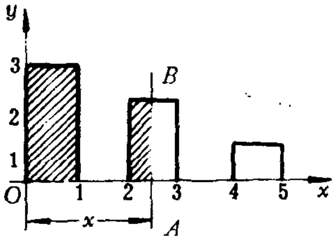

图 1-3

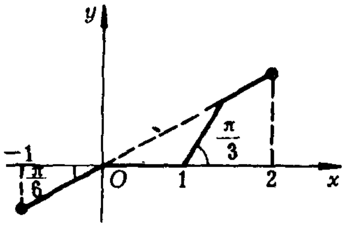

图 1-4

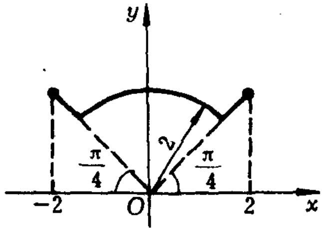

图 1-5

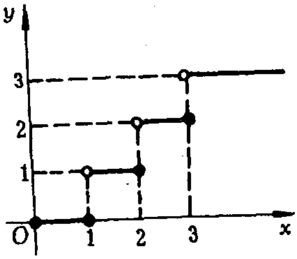

图 1-6

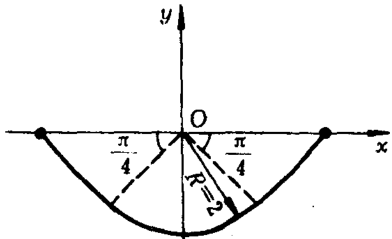

图 1-7

1.36 设 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 及 $f(x)$ 为单调增函数，证明若 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$，则 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$。

1.37 指出下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $y=x^2\cos x$；　　(2) $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=x-x^2$；　　(4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(5) $y=\dfrac{x}{a^x+1}$.

1.38 设函数 $f(x)$满足 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{a}{x}$, a 为常数,

证明：$f(x)$是奇函数。

1.39 证明：不论 $f(x)$ 是定义在 $(-l, l)$ 内的什么样的函数, $f(x)+f(-x)$是偶函数, $f(x)-f(-x)$是奇函数.

1.40 证明：

(1) 两个偶函数的和、差、积、商为偶函数；

(2) 两个奇函数的和为奇函数；

(3) 两个奇函数的积为偶函数；

(4) 奇函数与偶函数的积为奇函数；

(5) 在区间$[-l, l]$上的任意函数可表达为一个偶函数与一个奇函数的和。

1.41 设 $f(x)$为奇函数, $g(x)$为偶函数, 试考察下列复合函数的奇偶性：

$f[g(x)]$, $g[f(x)]$, $f[f(x)]$.

1.42 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数指出其最小周期：

(1) $y=\sin^2 x$;

(2) $y=1+\operatorname{tg} x$;

(3) $y=\cos(\omega t+\theta)$ (ω、θ 为常数);

(4) $y=x\cos x$;

(5) $y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$.

1.43 验证下列关系式：

(1) $\operatorname{sh}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sh}\alpha\cdot\operatorname{ch}\beta\pm\operatorname{ch}\alpha\cdot\operatorname{sh}\beta$,

(2) $\mathrm{ch}(\alpha\pm\beta)=\mathrm{ch}\alpha\cdot\mathrm{ch}\beta\pm\mathrm{sh}\alpha\cdot\mathrm{sh}\beta$;

(3) $\mathrm{th}\,x\pm\mathrm{th}\,y=\dfrac{\mathrm{sh}(x\pm y)}{\mathrm{ch}\,x\cdot\mathrm{ch}\,y}$;

(4) $\mathrm{ch}\,x-\mathrm{ch}\,y=2\mathrm{sh}\,\dfrac{1}{2}(x+y)\mathrm{sh}\,\dfrac{1}{2}(x-y)$.

1.44 作出下列函数的图形：

(1) $y=-|x-2|$;

(2) $f(x)=\begin{cases}-x-1, & x<-1,\\ 0, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & x>1;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}x+1, & -3\leqslant x\leqslant -1,\\ x^2-2x-3, & -1<x\leqslant 3.\end{cases}$

1.45 已知 $f(x)$ 以 2 为周期，并且

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & -1<x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\end{cases}$$

试在 $(-\infty, +\infty)$ 上绘出 $y=f(x)$ 的图形.

1.46 利用 $y=f(x)$ 的图形，由作出 $y=f(x+a)+b$ 的图形的方法，作出下列函数的图形.

(1) $y=x^2-4x+4$;

(2) $y=\log_a(x+2)+1 \quad (a>1)$;

(3) $y=a^{x+1}+3 \quad (a>0,\ a\neq 1)$.

1.47 利用 $y=f(x)$ 的图形，由作出 $y=f(ax)$ 的图形的方法，作出下列函数的图形：

(1) $y=\sin 2x$; (2) $y=\cos\dfrac{1}{2}x$;

(3) $y=\mathrm{e}^{2x}$.