

高等数学习题集

上海交通大学应用数学系 编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书是上海交通大学应用数学系编写的《高等数学》教材的习题集，编排次序与《高等数学》章次完全一致。

本书收集了一元函数与多元函数微积分、级数、微分方程、矢量代数与空间解析几何、矢量分析与场论等方面的习题1710道，并附有积分表(154个公式)、平面曲线图形(32幅)、曲面所围立体图形(40幅)以及习题答案。

本书可供高等工科院校师生、成人高校师生以及报考工科院校研究生的读者参考。

高 等 数 学 习 题 集

上海交通大学出版社出版

(淮海中路1984弄19号)

新华书店上海发行所发行

上海交通大学印刷厂印装

开本 787 × 1092 毫米 1/32 印张 13.875 字数 308000

1987年4月第1版 1987年6月第1次印刷

印数：1—24000

统一书号：13324·111

科技书目：150—318

定价：2.90 元

目 录

第一章 函数	1
第二章 极限与连续	11
一、数列的极限	11
二、无穷小与无穷大	13
三、数列极限的运算	14
四、数列极限存在准则	15
五、函数的极限	17
六、两个重要极限	23
七、无穷小的比较	25
八、极限杂题	27
九、函数的连续性	30
第三章 导数与微分	37
一、导数的概念	37
二、导数的几何意义	40
三、初等函数的导数	41
四、反函数的导数	44
五、隐函数的导数	45
六、对数求导法	46
七、参数方程所确定的函数的导数	47
八、杂题	48

九、高阶导数	51
十、微分及其应用	54
第四章 微分中值定理 导数的应用	59
一、罗尔定理 拉格朗日定理 柯西定理	59
二、罗彼塔法则	62
三、求极限杂题	63
四、泰勒公式	66
五、函数的单调性	68
六、函数的极值及其应用	70
七、曲线的凹凸性和拐点	72
八、渐近线和函数作图	74
九、平面曲线的曲率 曲率圆	75
十、方程的近似根	76
十一、杂题	77
第五章 不定积分	79
一、简单不定积分	79
二、换元积分法	80
三、分部积分法	84
四、有理函数的积分	86
五、三角函数的积分	88
六、简单无理函数的积分	90
七、利用积分表计算积分	92
八、杂题	93

第六章 定积分及其应用	96
一、定积分的概念及性质	96
二、上限为变量的定积分	98
三、牛顿-莱布尼兹公式	100
四、定积分的换元积分法	101
五、定积分的分部积分法	104
六、杂题	106
七、定积分的近似计算	110
八、广义积分	111
九、平面图形的面积	112
十、已知平行截面面积的立体体积	115
十一、平面曲线的弧长	117
十二、物理问题	119
第七章 矢量代数与空间解析几何	123
一、矢量代数	123
二、直角坐标与基本问题	124
三、矢量的坐标运算	125
四、曲面与空间曲线	130
五、平面	132
六、直线	134
七、二次曲面	139
第八章 多元函数的微分法及其应用	141
一、函数 极限 连续	141
二、偏导数	143

三、高阶偏导数·····	145
四、复合函数的微分法·····	146
五、全微分及其应用·····	151
六、隐函数的微分法·····	153
七、空间曲线的切线和法平面	
曲面的切平面和法线·····	156
八、多元函数的无条件极值·····	158
九、多元函数的条件极值·····	159
第九章 重积分及其应用 ·····	161
一、二重积分·····	161
二、二重积分的应用·····	166
三、三重积分·····	169
四、三重积分的应用·····	173
五*、杂题·····	174
第十章 曲线积分与曲面积分 ·····	176
一、第一类(对弧长的)曲线积分·····	176
二、第二类(对坐标的)曲线积分·····	178
三、格林公式 与路径无关的平面曲线积分·····	180
四、第一类(对面积的)曲面积分·····	183
五、第二类(对坐标的)曲面积分·····	185
六、高斯公式(奥斯特洛格拉德斯基公式)·····	186
七、斯托克斯公式 与路径无关的空间曲线积分	188
第十一章 级数 ·····	191
一、正项级数·····	191

二、任意项级数	195
三、函数项级数	196
四、幂级数	197
五、幂级数的应用	200
六、傅里叶级数	201
第十二章 微分方程	207
一、基本概念	207
二、一阶变量可分离微分方程	208
三、一阶齐次方程	210
四、一阶线性微分方程	211
五、全微分方程	212
六、一阶微分方程的杂题	215
七、高阶微分方程的特殊类型	216
八、高阶线性微分方程	217
九、欧拉方程	222
十、级数解法	222
十一、常系数线性微分方程组	223
第十三章 矢量分析与场论	224
一、矢量分析	224
二、场	225
三、方向导数与梯度	226
四、通量与散度	228
五、环量与旋度	230
六、几种特殊的场	232
七、哈密尔顿算子	233

附录一	积分表·····	234
附录二	参考用平面曲线图形·····	252
附录三	参考用曲面所围立体图形·····	266
参 考 答 案	·····	286

第一章 函数

1.1 证明下列不等式, 其中 n 为自然数:

(1) 若 $r > 1$, 则 $r^n > 1 + n(r-1)$, $n > 1$;

(2) 若 $r > 1$, 则当 $n \geq 3$ 时, $r^n > \frac{n^2}{4}(r-1)^2$;

(3) $\sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}}$;

(4) $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

(5) 当 $n > 1$ 时, $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$;

(6) $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ (其中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是同符号且大于 -1 的数);

(7) $2^{n-1} \geq n$ 与 $2^{n-1} \geq 2(n-1)$.

1.2 证明下列等式:

(1) $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$;

(2) $\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$;

(3) $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$;

$$(4) \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + \cdots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}.$$

1.3 若 $f(x) = x^3 + 1$, 求 $f(x^2)$ 和 $[f(x)]^2$.

1.4 设 $F(x) = c^x$, 证明:

$$(1) F(x) \cdot F(y) = F(x+y),$$

$$(2) \frac{F(x)}{F(y)} = F(x-y).$$

1.5 设 $F(x) = \lg(x+1)$,

$$\text{证明 } F(y^2-2) - F(y-2) = F(y).$$

1.6 设 $f(x) = \frac{ae^x + be^{-x}}{a+b}$, 求 $f(y) + f(-y)$, 并

$$\text{证明 } f(2x) - f(-2x) = [f(x)]^2 - [f(-x)]^2.$$

$$1.7 \text{ 设 } \varphi(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < 1, \\ x-1, & 1 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

求 $\varphi(3)$ 、 $\varphi(2)$ 、 $\varphi(0)$ 、 $\varphi(0.5)$ 、 $\varphi(-0.5)$.

$$1.8 \text{ 设 } \varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

求 $\varphi(1)$ 、 $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 、 $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 、 $\varphi(-2)$.

1.9 若已知函数 $f(x)$ 定义在区间 $[-5, 5]$ 上, 试求方程

$$f(x) = f\left(\frac{x+8}{x-1}\right) \text{ 所有的根, 其中 } f(x) = x^2 - x + 3.$$

1.10 设 $f(x)$ 具有性质: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 则必有 $f(0) = 0$, $pf(x) = f(px)$ (p 为任意正整数).

1.11 试确定下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{2x}{x^2 - 3x + 2},$$

$$(2) y = \frac{1}{2} \lg \frac{1+x}{1-x},$$

$$(3) y = \sqrt{2+x} + \frac{1}{\lg(1-x)},$$

$$(4) y = \log_2(\log_2 x),$$

$$(5) y = \frac{x}{\operatorname{tg} x},$$

$$(6) y = \lg \sin x,$$

$$(7) y = \lg(1 - 2\cos x),$$

$$(8) y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5}.$$

1.12 已知从高为 h 处落下的重物所经过的路程由公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \text{ 来确定, 问(1)此函数的定义域为何? (2)}$$

解析式 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 的定义域又如何?

1.13 下列各题中, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同?

$$(1) f(x) = \ln x^2, \quad g(x) = 2\ln x,$$

$$(2) f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}, \quad g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}},$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, \quad g(x) = x\sqrt[3]{x-1}.$$

1.14 求下列函数的反函数:

$$(1) y = x^2 - 2x,$$

$$(2) y = \sqrt[3]{x^2 + 1},$$

$$(3) y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

$$(4) y = \frac{2^x}{2^x + 1},$$

$$(5)^* y = \sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}},$$

$$(6)^* y = 1 + 2\sin \frac{x-1}{x+1},$$

$$(7) y = \sin x, \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right].$$

1.15 下列初等函数由哪些基本初等函数复合而成？

$$(1) y = \sqrt{2 - x^2}, \quad (2) y = \cos \frac{3x}{2},$$

$$(3) y = 2^{x^2}, \quad (4) y = \lg \sin x,$$

$$(5) y = \sin^3 5x, \quad (6) y = \arctg(\cos e^{-\frac{1}{x^2}}),$$

$$(7) y = \ln^2 \ln x^2, \quad (8) y = \arccos \sqrt{\log_a(x^2 - 1)}.$$

1.16 设 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求以下函数的定义域:

$$(1) f(x^2), \quad (2) f(\sin x),$$

$$(3) f(x+a) \ (a > 0), \quad (4) f(x+a) - f(x-a) \ (a > 0).$$

1.17 已知函数 $y = \frac{2x-5}{x-3}$ 的值域是 $y \leq 0, y \geq 4$, 求函数 y 的定义域.

$$1.18 \text{ 设 } f(x) = x+1, \quad \varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}, \text{ 求 } f[\varphi(x)+1].$$

$$1.19 \text{ 设 } \varphi(x) = x^2, \quad \psi(x) = 2^x, \text{ 求 } \varphi[\varphi(x)], \psi[\psi(x)], \\ \varphi[\psi(x)], \psi[\varphi(x)].$$

$$1.20 \text{ 设 } f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}, \text{ 求 } f(x).$$

1.21 设 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right)=1+\cos x$, 求 $f\left(\cos \frac{x}{2}\right)$.

1.22 设 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+a}$, $\varphi(x)=\frac{lx+m}{nx+l}$, 且 $b:c=m:n$,

证明 $f[\varphi(x)]=\varphi[f(x)]$.

1.23 设 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n \text{ 次}}$, 若 $f(x)=a+bx$, 证

$$f_n(x)=a \cdot \frac{b^n-1}{b-1} + b^n x.$$

1.24 设 $f(x)=\begin{cases} 2x, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad \varphi(x)=x^2-1$, 求 $f[\varphi(x)]$.

1.25 设 $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2, & 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad g(x)=\ln x$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

1.26 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases} \quad \varphi(x)=e^x$,

求 $f[\varphi(x)]$ 和 $\varphi[f(x)]$.

1.27 设有一边长为 a 的正方形的铁皮, 现将各角截去相等的小方块, 然后折起各边而组成一无盖的箱, 试建立此箱的体积与截去小方块边长间的函数关系.

1.28 在斜高 l 给定为 2 时, 试写出圆锥体的体积 V 作为它的高 h 的函数表达式.

1.29 设有容量为 10m^3 的无盖圆柱形桶, 底用铜制, 侧壁用铁制, 已知铜价为铁价的 5 倍, 试建立做此桶所需费用与桶的底半径 r 之间的函数关系.

- 1.30 设 M 为密度不均匀细杆 OB 上的一点, 若 OM 的质量与 OM 的长度平方成正比, 又已知 $OM=4$ 单位时其质量为 8 单位, 试求 OM 的质量与长度间的关系.
- 1.31 一物体作直线运动, 已知阻力的大小与物体运动的速度成正比, 但方向相反, 当物体以 1m/s 速度运动时阻力为 $2g$, 试建立阻力与速度间的函数关系.
- 1.32 某工厂建一蓄水池, 池长 50m , 断面尺寸如图 1-1 所示, 为了随时能知道池中水的吨数 (每立方米水重 1 吨), 可在水池的端壁上标出尺寸, 观察水的高度 x , 就可以换算成储水的吨数 T . 试列出换算用的函数关系式, 并指出函数 $T(x)$ 的定义域.
- 1.33 底 $AC=b$, 高 $BD=h$ 的三角形 ABC 中 (见图 1-2), 内接矩形 $KLMN$, 其高记为 x , 试将矩形的周长 p 和面积 S 表示为 x 的函数.

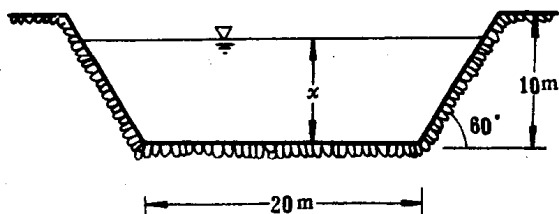


图 1-1

- 1.34 有三个矩形彼此相距 1m 放置 (见图 1-3), 其高分别等于 3m 、 2m 、 1m , 而底都为 1m . 假定 $x (-\infty < x < +\infty)$ 连续变动 (即直线 AB 连续地平移动), 试将阴影部分的面积 S 表示为距离 x 的函数.
- 1.35 试写出图 1-4~图 1-7 所示函数的分析表达式.

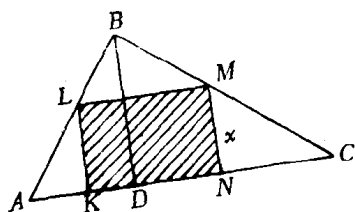


图 1-2

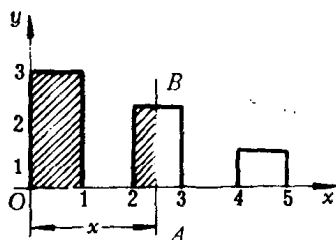


图 1-3

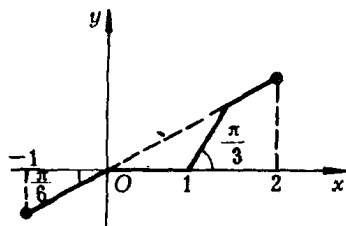


图 1-4

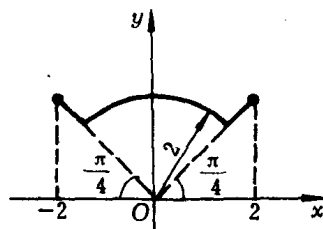


图 1-5

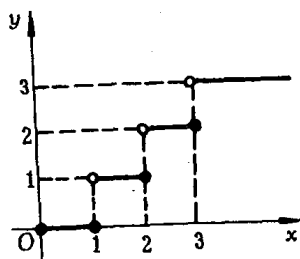


图 1-6

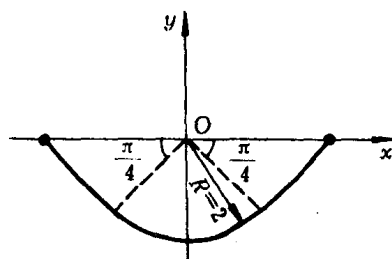


图 1-7

- 1.36 设 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 及 $f(x)$ 为单调增函数，证明若 $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ ，则 $\varphi[\varphi(x)] \leq f[f(x)] \leq \psi[\psi(x)]$ 。
- 1.37 指出下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

- (1) $y = x^2 \cos x$, (2) $y = \lg \frac{1-x}{1+x}$,
 (3) $y = x - x^2$, (4) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$,

$$(5) y = \frac{x}{a^x + 1}.$$

1.38 设函数 $f(x)$ 满足 $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a}{x}$, a 为常数,

证明: $f(x)$ 是奇函数.

1.39 证明: 不论 $f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 内的什么样的函数, $f(x) + f(-x)$ 是偶函数, $f(x) - f(-x)$ 是奇函数.

1.40 证明:

(1) 两个偶函数的和、差、积、商为偶函数;

(2) 两个奇函数的和为奇函数;

(3) 两个奇函数的积为偶函数;

(4) 奇函数与偶函数的积为奇函数;

(5) 在区间 $[-1, 1]$ 上的任意函数可表达为一个偶函数与一个奇函数的和.

1.41 设 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 试考察下列复合函数的奇偶性:

$$f[g(x)], g[f(x)], f[f(x)].$$

1.42 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数指出其最小周期:

(1) $y = \sin^2 x,$

(2) $y = 1 + \operatorname{tg} x,$

(3) $y = \cos(\omega t + \theta)$ (ω, θ 为常数),

(4) $y = x \cos x,$

(5) $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x.$

1.43 验证下列关系式:

$$(1) \operatorname{sh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{sh} \beta,$$

$$(2) \operatorname{ch}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta \pm \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{sh} \beta,$$

$$(3) \operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y},$$

$$(4) \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{1}{2}(x+y) \operatorname{sh} \frac{1}{2}(x-y).$$

1.44 作出下列函数的图形:

$$(1) y = -|x-2|;$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} -x-1, & x < -1, \\ 0, & -1 \leq x \leq 1, \\ x-1, & x > 1; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x+1, & -3 \leq x \leq -1, \\ x^2-2x-3, & -1 < x \leq 3. \end{cases}$$

1.45 已知 $f(x)$ 以 2 为周期, 并且

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < 1, \end{cases}$$

试在 $(-\infty, +\infty)$ 上绘出 $y=f(x)$ 的图形.

1.46 利用 $y=f(x)$ 的图形, 由作出 $y=f(x+a)+b$ 的图形的方法, 作出下列函数的图形.

$$(1) y = x^2 - 4x + 4;$$

$$(2) y = \log_a(x+2) + 1 \quad (a > 1);$$

$$(3) y = a^{x+1} + 3 \quad (a > 0, a \neq 1).$$

1.47 利用 $y=f(x)$ 的图形, 由作出 $y=f(ax)$ 的图形的方法, 作出下列函数的图形:

$$(1) y = \sin 2x, \quad (2) y = \cos \frac{1}{2}x,$$

$$(3) y = e^{2x}.$$