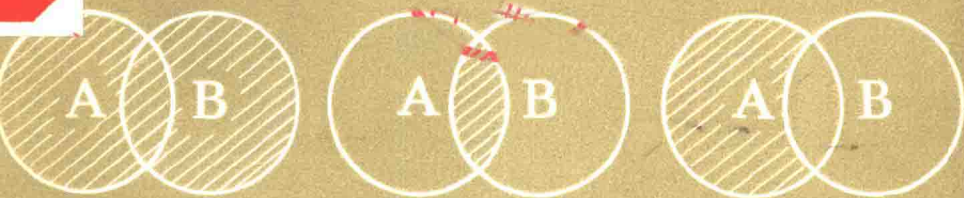


Q

QUNLUN DAOYIN

群论 导引

徐振环 编



黑龙江科学技术出版社

群 论 导 引

徐 振 环 编

黑 龙 江 科 学 技 术 出 版 社 出 版

(哈尔滨市南岗区建设街 35 号)

黑龙江新华印刷厂附属厂印刷·黑龙江省新华书店发行

开本 787×1092 毫米 1/32·印张 10.25·字数 210 千

1985 年 2 月第一版·1985 年 2 月第一次印刷

印数：1—3,740

书号：13217·122

定价：1.95 元

前 言

近些年来，群论在近代物理学的各个领域中获得日益广泛的应用。如粒子物理、固体物理和原子核物理等学科，都是应用了群的理论而得到迅速发展的。但是，群论是一门比较抽象难懂的科学，尤其是可供初学者学习的群论书籍更是罕见。鉴于这种情况，笔者把自己几年来在群论课教学过程中所写的讲义改编成这本《群论导引》出版，目的是想为那些急于学习群论而又苦于找不到一本合适书籍的同志，提供一本较通俗易懂的读物。

这本《群论导引》只编入了群论基本知识和一般理论，关于各种典型群的具体理论及其应用暂未编入。以后如有机会还想补写一本各种典型群及其应用的书，以作为这本书的续篇。笔者希望现在这本《群论导引》能对一些群论初学者起个桥梁作用。预计读者学完此书后，再去阅读一些群论专著，将不会遇到什么大的困难。

本书编写过程中，主要参考了以下书籍：

1. I.V. Schensted: A Course on the Application of Group Theory to Quantum Mechanics.
2. H. Bacry: Lectures on Group Theory and Particle Theory.
3. M. Hamermesh: Group Theory and Its Application to Physical Problems.

笔者从事群论课程教学工作时间不长，水平有限，书中错误和不妥之处是难免的。希望读者提出宝贵意见。如果能对本书提出评论性意见，则更是笔者所欢迎的。

目 录

第一章 矢量空间	1
§1 集合与映射.....	1
§2 集合中的等价关系.....	6
§3 矢量空间.....	9
§4 线性映射.....	17
§5 线性变换与线性变换矩阵.....	24
§6 线性变换的不变子空间.....	34
§7 内积空间.....	37
第二章 群的基本知识	48
§1 群的定义和例子.....	48
§2 子群和陪集.....	52
§3 共轭元素和类.....	56
§4 不变子群和商群.....	59
§5 群的同构与同态.....	63
§6 对称群.....	68
§7 凯来 (Cayley) 定理.....	74
第三章 群表示	78
§1 群表示与表示空间.....	78
§2 群表示实例.....	85
§3 一些重要群表示概念.....	89
§4 么正表示 (酉表示).....	95
§5 舒尔 (Schur) 引理.....	102
§6 正交关系.....	107

§7	群表示的特征标	111
§8	对两个定理的补充证明	117
第四章	群代数与对称群	129
§1	群代数与群的正则表示	129
§2	群代数的分解	134
§3	幂等元素	141
§4	简单矩阵代数	143
§5	群代数的双边理想的性质	147
§6	对称群的基础知识	152
§7	杨氏图和杨氏算子	155
§8	群 S_m 的不可约表示的特征标和维数	165
§9	计算 S_m 不可约表示维数和特征标的其他方法	172
§10	群 S_m 的不可约表示矩阵的计算	180
第五章	李群和李代数	191
§1	连续群和李群的定义	191
§2	李群的例子	196
§3	无穷小生成元	201
§4	结构常数	211
§5	有限大群元的指数形式	217
§6	连通李群和紧致李群	221
§7	李代数	227
§8	李代数同李群的关系	232
§9	半单纯李群和半单纯李代数 以及它们的不可约表示	235
§10	半单纯李代数的标准形式	246
§11	根矢量的性质	254

§12	根图	260
第六章	一般线性群的不可约张量表示	269
§1	一般线性群的高秩张量表示	269
§2	用对称群代数元素约化张量空间	273
§3	例子	282
§4	不可约张量表示维数的计算	288
§5	群 $GL(n, C)$ 的分支律	293
§6	对称群表示扩大积及 $GL(n, C)$ 表示内 积的约化	297
§7	$GL(n, C)$ 的子群的不可约表示	304
附录	黎曼空间与度规张量	313

第一章 矢量空间

§1 集合与映射

若干个（有限多个或无限多个）具有一定特征的对象的全称称为一个集合，或简称为集。例如下列各组对象都构成一个集合：

（1）二十六个拼音字母；

（2）一副中国象棋子；

（3）加减乘除四种运算；

（4）所有自然数；

（5）所有实数；

（6）绕一固定轴转一切角度的旋转。

前三个集合都包含有限多个对象，称为有限集合。第四个集合包含无限多个可数的对象，称为可数无限集合。后两个集合都包含无限多个不可数的对象，称为不可数无限集合。构成集合的对象称为该集合的元素。当集合 A 包含元素 a 时，记作 $a \in A$ ，读为 a 属于 A 或 a 在 A 中。若集合 A 不包含元素 b ，则记作 $b \notin A$ 或 $b \notin A$ ，读为 b 不属于 A 或 b 不在 A 中。

对各种各样的集合还可以给出更具体的记号去刻画它们的特征。对于包含有限个元素或无限个可数元素 $a, b, c, \dots$ 的集合 A ，可记为 $A = \{a, b, c, \dots\}$ 。若集合 B 的元素 x 具有某种性质 $P(x)$ ，则把它记为 $B = \{x \mid P(x)\}$ 。例如，有理数

集合可记为 $\{x | x = p/q, p, q \text{ 是整数, 且 } q \neq 0\}$ 。对于以后常用的实数集合和复数集合分别用字母 R 和 C 标记。对于不必特意指明是实数还是复数的一般数集合则用字母 K 标记。

还可以有不包含任何元素的集合，我们称它为空集，并以记号 ϕ 表示它。

若 a 属于 A 就一定也属于 B ，即集合 A 的全部元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，或称 B 是 A 的包集，记为

$$A \subseteq B \text{ 或 } B \supseteq A$$

显然由 $A \subseteq B$ 和 $B \subseteq C$ 可推出 $A \subseteq C$ 。空集 ϕ 可看作是任意集合的子集。

如果 $A \subseteq B$ 和 $B \subseteq A$ 同时成立，即 A 和 B 两个集合包含相同的元素，那么称它们相等，记为 $A = B$ 。

如果 $A \subseteq B$ ，但 A 不等于 B ，则称 A 是 B 的真子集，记为

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A$$

此时 A 的所有元素都属于 B ，但 B 中至少有一个元素不属于 A 。

由属于 A, B 二者之一的全部元素组成的集合 C 称为 A 与 B 的并集，或简称为它们的并，记为

$$C = A \cup B$$

并集的含义还可由下式给出

$$C = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\} \quad (1)$$

由同时属于两个集合 A 与 B 的所有元素组成的集合 C 称为 A 与 B 的交集，或简称为它们的交，记为

$$C = A \cap B$$

或

$$C = \{x | x \in A \text{ 和 } x \in B\} \quad (2)$$

所有属于集合 A 而不属于集合 B 的元素组成的集合 C

称为 A 与 B 的差集, 记为

$$C = A - B = \{x | x \in A \text{ 和 } x \notin B\} \quad (3)$$

并集, 交集和差集可用图 1 中的图形形象地表示出来。三个图的阴影部分依次给出 $A \cup B$, $A \cap B$ 和 $A - B$ 。

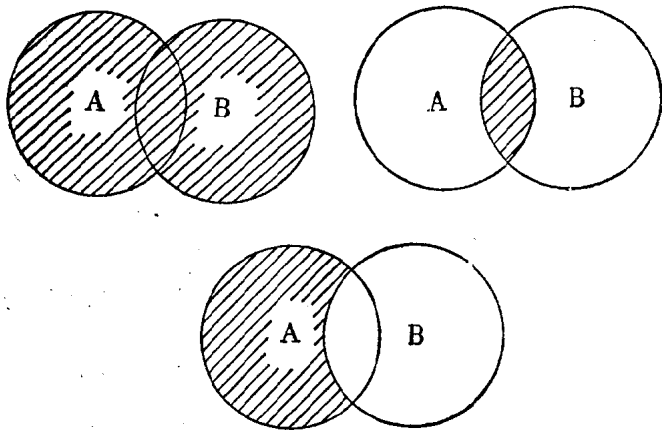


图 1

$A \cap B = \phi$ 意味着 A 和 B 没有共同元素, 这时我们说集合 A 和 B 不相交。

如果 $B \subset A$, 则 $A - B$ 称为 B 的补集。

对于两个集合 A 和 B 可作出它们的所谓直积集合。设 $a_1, a_2, a_3, \dots \in A$, $b_1, b_2, b_3, \dots \in B$, 分别从 A 和 B 中取出任意元素 a_i 和 b_j , 作成有序元素对 (a_i, b_j) 。所有这样的有序元素对构成的集合称为 A 和 B 的直积集合, 记为

$$A \otimes B = \{(a_i, b_j) | a_i \in A, b_j \in B\} \quad (4)$$

若 A 和 B 分别包含 n 和 m 个元素, 则直积集合 $A \otimes B$ 将包含 nm 个元素。若 A 和 B 中的一个为无限集合, 则它们的直积集合也是无限集合。

实数集合 R 同它自己的直积集合 $R \otimes R$ 由一切有序实数对 (x, y) 构成, 因而代表整个实平面。

下边讲集合间的映射概念。

设有两个集合 A 和 B , 如果有一个对应关系或法则, 使得对于 A 中任意一个元素 a 有 B 中唯一的元素 b 与之对应, 则称这个对应关系为由 A 到 B 的映射, 并用字母 f 标记它。可用如下的符号来刻画由集合 A 到集合 B 的一个映射 f :

$$A \xrightarrow{f} B$$

或

$$b = f(a), a \in A, b \in B$$

有时称 A 为映射 f 的定义域, 称 $f(A) = \{f(a) | a \in A\}$ 为 f 的值域。 b 称为 a 的象, a 称为 b 的一个象源。

对映射概念必须抓住两个关键点: (1) 映射具有单值性, 即象 $f(a)$ 由 a 唯一决定, 但反过来 a 并不一定由 $f(a)$ 唯一决定。(2) 映射必须穷尽 A 中元素, 但不一定穷尽 B 中元素。

若一个映射使 A 中不同元素对应着 B 中的不同元素, 则称它为一一映射。如果一个由 A 到 B 的映射使 B 中每个元素至少是 A 中一个元素的象, 则称这个映射为由 A 到 B 上的映射, 或称为由 A 到 B 的到上映射或全映射。如果一个映射使 B 中每一个元素作为 A 中元素的象恰恰出现一次, 则称它为一一到上映射。

对于一一到上映射, 存在着逆映射。因此也可以把一一到上映射称为可逆映射或双向映射。

例 1. 设有两个集合

$$A = \{a, b, c\}, B = \{a', b', c', d'\}$$

则对应关系

$$f = \begin{pmatrix} a \longrightarrow a' \\ b \longrightarrow b' \\ c \longrightarrow b' \end{pmatrix}$$

是由 A 到 B 的一个映射，但不是一一映射，也不是到上映射。

例 2. 设 $A = \{\text{自然数}\}$, $B = \{\text{正偶数}\}$, 则映射

$$f = \begin{pmatrix} 1 \longrightarrow 2 \\ 2 \longrightarrow 4 \\ 3 \longrightarrow 6 \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

是由 A 到 B 的一一到上映射。

由一个集合到它自身的映射称为该集合上的变换。例如变换关系

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (x, y \in R; 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

给出直积集合 $R \otimes R$ 上的一个变换，这个变换把有序实数对 (x, y) 变换成有序实数对 (x', y') 。把一个集合 A 的每一个元素都变换成它自己的变换称为 A 的恒等变换，通常用记号 e_A 表示它。有限集合上的一一到上变换又称为置换。例如，对于集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，使元素 1、2、3、4、5 依次对应 2、4、5、1、3 的映射

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

称为一个置换。

设有两个由集合 A 到集合 B 的映射 f 和 f' ，如果对于每个 $a \in A$ 都有 $f(a) = f'(a)$ ，则说这两个映射相等。

设有三个集合 $A, B, C, a \in A, b \in B, c \in C$, 并且有

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

其中 f 和 g 分别是由 A 到 B 和由 B 到 C 的映射, 则可以写出

$$c = g(b) = g(f(a)) = gf(a) \quad (5)$$

这里 gf 是先进进行映射 f , 接着进行映射 g 的结果映射, 称为映射 g 和 f 的乘积。(注意因子次序!)

如果有三个依次由 A 到 B , 由 B 到 C , 由 C 到 D 的映射 f, g, h , 则可以证明, 它们的乘积服从结合律:

$$h(gf) = (hg)f \quad (6)$$

前边讲过, 由 A 到 B 的任意一个一一到上映射 f 都有它的逆映射, 以后记为 f^{-1} . 容易证明, f 和 f^{-1} 满足下列关系:

$$ff^{-1} = e_B, \quad f^{-1}f = e_A \quad (7)$$

两个一一到上映射 f 和 g 的乘积的逆映射具有以下性质:

$$(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1} \quad (8)$$

§2 集合中的等价关系

人们熟知, 两个实未知数 x, y 所满足的二元关系 (由二元方程或不等式给出) 对应于实平面或直积集合 $R \otimes R$ 的一个子集 (一条曲线或一个区域). 反过来, 直积集合 $R \otimes R$ 的一个子集当然也给出实数集合 R 上的一个二元关系. 把这一思想推广可给出任一集合上的二元关系.

设有一集合 A , 作出它与自己的直积集合 $A \otimes A$. 借 $A \otimes A$ 的一个子集 C 可如下规定 A 中元素的一个二元关系:

设 $a, b \in A$,

若 $(a, b) \in C$, 称 a 与 b 有关系, 记为 $a \sim b$;

若 $(a, b) \notin C$, 称 a 与 b 无关系, 记为 $a \not\sim b$.

例 设有集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 直积集合 $A \otimes A$ 的元素可写为 (n, m) , $n, m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. 二元关系 $n = 2m$ 所对应的 $A \otimes A$ 的子集包含三个元素 $(2, 1), (4, 2), (6, 3)$. 反过来, 这三个元素构成的子集也规定了 A 的一个二元关系 $n = 2m$.

直积集合 $A \otimes A$ 可以有各种不同的子集, 因而可规定出 A 的各种不同的二元关系.

集合 A 上的二元关系 “ $\sim$ ” 如果具有下列三个性质, 则称为等价关系:

(i) 自反性: 对所有的 $a \in A$, 有 $a \sim a$;

(ii) 对称性: 若 $a \sim b$, 则 $b \sim a$;

(iii) 传递性: 若 $a \sim b, b \sim c$, 则 $a \sim c$.

例如设 A 是平面上的所有三角形构成的集合. 几何上的相似关系 “ $\sim$ ” 显然是一种等价关系. 事实上, 任一三角形 a 都跟它自己相似, 即 $a \sim a$, 故有自反性. 对于两个三角形 a 和 b , 若 $a \sim b$, 则必有 $b \sim a$, 故有对称性. 对于三个三角形 a, b, c , 若 $a \sim b, b \sim c$, 则必有 $a \sim c$, 故有传递性.

根据完全类似的推理可看出, 三角形的 “全等关系”, “面积相等关系” 也都是等价关系.

但是, 并非所有关系都是等价关系. 例如, 集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 中的大于关系 “ $>$ ” 就不是等价关系. 因为, 对于 $a \in A$, 关系 $a > a$ 是不成立的, 即没有自反性.

等价关系可用等号 “ $=$ ” 来标记.

下边来讲一个非常重要的概念: 集合上的等价类. 在集

合 A 中, 如果给定一个等价关系, 那么就可以把全部与某一元素 a 等价的元素合并成一类 A_a . 于是同一类中的元素必相互等价, 因为由 $a \sim b$ 与 $a \sim c$ 根据等价关系的对称性和传递性可得到 $b \sim c$. 同时, 所有与类中任一元素等价的元素全属于同一类, 因为由 $a \sim b$ 与 $b \sim c$ 可推出 $a \sim c$. 每一类都可由其中任一元素决定; 如果用 A_a 中另一元素 b 代替决定这一类的元素 a , 那么得到的是同一个类: $A_b = A_a$. 因此一类中的任一元素都可选作这个类的代表. 但是, 如果取一个不属于类 A_a 的元素 b , 则由它所代表的元素类 A_b 不可能和类 A_a 有共同的元素, 因为如果假设有共同元素 c , 则有 $c \sim a$, $c \sim b$, 由此可推出 $a \sim b$, 即 $b \in A_a$, 这与假设矛盾. 因此 A_a 和 A_b 不相交.

对 A 中元素这样分成的类称为 A 的等价类. 所有的等价类盖满了整个集合 A , 因为每个元素 a 都属于一类. 因此集合 A 被分成了两两不相交的等价类.

将各等价类作为元素组成的集合称为商集合.

例. 设 $Z = \{a, b, \dots\}$ 是整数集, m 是某一个特定整数. 若整数 a 与 b 的差 $a - b$ 能够用 m 整除, 则称 a 与 b 对于模 m 同余, 记作 $a \equiv b \pmod{m}$ 或 $a \equiv b(m)$. 容易证明, 关系 “ $\equiv$ ” 是等价关系. 这时的等价类就是关于模 m 的同余类. 显然, a 所在的类是所有整数 $a + km$ ($k =$ 任意整数) 构成的集合, 记为 $\bar{a}$. Z 所能分成的同余类如下:

$$\begin{aligned}\bar{0} &= \{\dots, -2m, -m, 0, m, 2m, \dots\} \\ \bar{1} &= \{\dots, -2m+1, -m+1, 1, m+1, 2m+1, \dots\} \\ &\dots\dots\dots \\ \overline{m-1} &= \{\dots, -m-1, -1, m-1, 2m-1, \dots\}\end{aligned}$$

由这 m 个同余类构成的集合就是商集合。

§3 矢量空间

一. 矢量空间的定义

满足以下条件的集合 $V = \{x, y, z, \dots\}$ 称为矢量空间：

I. 定义了加法运算：给出任意两个元素 $x, y \in V$ ，都能根据这种运算法则由它们唯一地定出一个元素 $x + y \in V$ ，而且这种运算满足下列要求：

$$1^\circ \quad x + y = y + x, \text{ 对于任意 } x, y \in V;$$

$$2^\circ \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

对于任意 $x, y, z \in V$;

$$3^\circ \quad \text{存在零元素 } \theta \in V, \text{ 对于任意元素 } x \in V, \text{ 恒有 } x + \theta = x;$$

$$4^\circ \quad \text{对每一元素 } x \in V \text{ 都存在它的负元素 } -x \in V, \text{ 使得 } x + (-x) = \theta.$$

II. 定义了数乘运算：给出任一元素 $x \in V$ 和某数域 K^+ 中的任意一个数 α ，都能根据这种运算由它们唯一地定出一个元素 $\alpha x \in V$ ，而且这种运算满足下列要求：

$$1^\circ \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y;$$

$$2^\circ \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$$

$$3^\circ \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x);$$

$$4^\circ \quad 1 \cdot x = x;$$

+ 所谓域乃是定义了加法（包括减法）、可交换乘法和除法三种运算的一种集合，实数集合 R 和复数集合 C 都是这样的集合，因此可分别称它们为实数域和复数域，数域 K 指的是不必特殊强调是实数域还是复数域的一般数域。

这里 x, y 是 V 中任意元素, α, β 是 K 中任意数, 1 是 K 中的幺数。

$K = R$ 时, V 称为实数域上的矢量空间; $K = C$ 时, V 称为复数域上的矢量空间。

值得注意的是, 不能按人们所习惯了的几何模式去理解矢量空间概念。矢量空间首先是一个集合, 它是一个符合一定要求的集合。凡是定义了上述加法和数乘运算的集合都应看作是矢量空间。矢量空间也称为线性空间。矢量空间的元素也可称为矢量。同样也要注意, 这里所说的矢量不一定就是在一般物理、数学书籍中所讲的象速度, 力, 电场, 位置矢量等等那些具体的矢量。

例 1. 解析几何学中所讲的三维空间可看作是一个实数域上的矢量空间。它的元素是以坐标原点为始点, 以空间任意点为终点的位置矢量。元素的加法就是一般矢量的平行四边形加法, 数乘就是实数和位置矢量的乘积。

例 2. 闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数的全体是实数域上的矢量空间。

例 3. 一个齐次线性微分方程的解的全体构成一个复数域上的矢量空间。

例 4. 在数域 K 中取 n 个数 $x^1, x^2, \dots, x^n$ 可构成一个列矢量

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \quad (1)$$

$x^i (i = 1, 2, \dots, n)$ 称为列矢量 X 的第 i 分量。我们用记号 K^n 表示所有这样的列矢量组成的集合。如果对于集合 K^n 中的

任意两个矢量 X, Y 和数域 K 中的任意数 α 定义

$$X + Y = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ x^2 + y^2 \\ \vdots \\ x^n + y^n \end{pmatrix}, \quad \alpha X = \begin{pmatrix} \alpha x^1 \\ \alpha x^2 \\ \vdots \\ \alpha x^n \end{pmatrix} \quad (2)$$

则集合 K^n 便成为数域 K 上的矢量空间。我们称这个矢量空间为 K 上的列矢量空间。

若在列矢量空间 K^n 中取 n 个矢量

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

则该空间中的任意矢量 X 显然都可以表为

$$X = \sum_{i=1}^n x^i e_i = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n \quad (4)$$

类似地，在数域 K 中还可以取 n 个数构成一个行矢量。若也象上边那样定义行矢量的加法和数乘运算，则所有行矢量的全体组成的集合便是一个行矢量空间，我们用记号 ${}^n K$ 表示它。

二. 矢量空间的维数与基底

设 V 为数域 K 上的矢量空间， $x_1, x_2, \dots, x_k$ 是其中的一组矢量。如果

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k &= \theta \\ \Rightarrow \alpha_i &= 0, \alpha_i \in K, i=1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

则称矢量 $x_1, x_2, \dots, x_k$ 是线性无关的或线性独立的。如果有不全为零的系数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 使得 $\sum \alpha_i x_i = \theta$ ，则称矢量