代数三

遵循新大纲 配合新教材

新编精解本

初中数学万题选

（第三版）

初三适用

中国人民大学附属中学
北京大学附属中学
北京市第四中学 合编
北京师范大学附属实验中学
清华大学附属中学

北京大学出版社

遵循新大纲　配合新教材

初中数学万题选

（新编精解本）

代数（三）

（初三适用）

中国人民大学附属中学
北京大学附属中学
北京市第四中学　合编
北京师范大学附属实验中学
清华大学附属中学

袁　鑫　刘连璞　方振寰　改编

北京大学出版社
·北　京·

书　　名：初中数学万题选（新编精解本）·代数（三）
著作责任者：中国人民大学附属中学等五校　合编
责 任 编 辑：刘　勇
标 准 书 号：ISBN 7-301-03359-1/G·402
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话：出版部 62752015　发行部 62559712　编辑室 62752021
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者：高新特公司激光照排中心
印　刷　者：中国科学院印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787×1092　32 开本　13.25 印张　297 千字
2000 年 6 月第 3 版　2000 年 7 月第 2 次印刷
定　　价：14.00 元

第三版说明

《初中数学万题选》(第二版)自 1997 年再版以来,多次重印,深受广大中学数学教师、学生及学生家长的喜爱。许多中学生来信谈到使用这套题选后,激发了学习数学的兴趣,基础扎实了,数学成绩有了很大提高,这使我们深感欣慰。但在读者来信中也反映了这套题选题量偏大,某些同类型题目数量偏多;有些练习题偏难,同学做题有困难;个别题超纲等。我们仔细研究了读者的来信,并根据教育部减轻中学生课业负担的精神,我们聘请具有丰富教学经验的有关的代数、几何专家对第二版内容作了较大的修改。

现在的第三版是新编精解本,它是根据最新教学大纲要求,并与现行初中数学统编教材同步,突出了每章按知识要点、基本要求给出典型例题,总结出解题规律;精题精解,重新把练习题进行了归纳、分类、整理,精简同类型题、删去超纲题,对难题、综合题加"*"号并给出详细解答。本书注重启发思维,强调基础训练、解题思路、数学的思想方法及应用。它更适合当前的初中数学的教学要求,是一本优秀的中学数学教学参考书。

这次新编精解本的改编工作是在北京大学数学科学学院姚孟臣先生的组织和指导下进行的,刘连璞、方振寰、袁鑫三位老师承担了具体、精细的改编工作,他们为此付

出了辛勤的劳动。在此,我们向他们表示衷心地感谢。

为使这套题选不断完善,并在初中数学教学中作为一本优秀数学参考书更好地发挥作用,我们热忱希望中学数学教师、学生及学生家长提出宝贵意见。

北京大学出版社
2000年5月20日

第二版说明

《初中数学万题选》(共五册)自 1994 年问世以来，多次印行，深受广大中学数学教师、学生及学生家长喜爱，并以优良的品质在第三届全国教育图书订货会被评选为优秀图书。

《初中数学万题选》面世后，众多读者来信表示非常喜爱此套题选，这使我们深感欣慰。尤其让我们感动的是，一些细心的读者在使用这套题选时，将他们的体会告诉我们，指出了其中的差错和不足之处，并提出了修改意见。这也是促使我们进行第二版工作的原因之一。原因之二，则是为了适应国家教委新颁初级中学数学教学大纲及新编统编教材。第二版保留了第一版的精要和框架，对一些内容进行了适当的增删和调整，对第一版中的谬误进行了订正，并根据读者的建议，对书中较难的计算题与证明题给出关键步骤的提示。第二版的目的，一是为了与现行统编的教材同步，便于教师选题、学生自测、家长辅导，二是为了更加方便校外读者使用本题选，特别是家长检查、辅导。

这次再版工作是在北京大学数学系姚孟臣先生的组织和指导下进行的。刘连璞、王秋芳两位老师承担了具体的、精细的修订工作。在此，我们向他们表示衷心地感谢！

为了使这套题选不断完善，并在数学普及教育中更好地发挥作用，我们热忱希望读者朋友和社会各界人士提出

改进意见。

北京大学出版社将一如既往地为中国的教育事业服务，为进一步提高我国的数学教育水平作出我们的努力。

北京大学出版社数理编辑室
1996年12月

前　言

著名数学大师苏步青教授在论述数学学习方法时曾经说过："学数学，我一向提倡学生多演算一些习题，通过自己独立思考，在演算过程中弄清基本概念和定义，这是一项非常重要的基本功。"本着加强初中数学基本功训练之目的，同时也为了更好地向教师和学生家长提供有代表性的训练习题，以辅导学生真正学好并灵活运用数学知识，提高解决问题的能力，我们组织力量精心编选了这套《初中数学万题选》系列图书。

本套书由中国人民大学附属中学、北京大学附属中学、北京市第四中学、北京师范大学附属实验中学、清华大学附属中学等五所重点学校的特、高级数学教师，集多年执教积累的丰富经验编写而成。全书共编选 15000 余道题，其中自命题占了相当大的比例。这些自命题是上述五校特、高级数学教师及有关专家多年的智力精华，是我国中学数学教学的宝贵财富。

全书共分五册，其中代数三册，收入约 11000 题；几何两册，收入约 4000 题。

本套书与一般习题集的根本区别在于：其总体结构由北京大学等有关方面的专家根据教育学、心理学原理先行设计，形成命题要求，然后五校特、高级教师和有关方面的专家按要求严格命题，最后经命题教师自检、互检，再经专家检验、总体检验等多种校验审定。这种命题过程在我国课外教学读物的编写中尚不多见，也使得本套书中题目的各项指标，如认知层次，难度、区分度等更趋合理。

与一般习题集相比，本套书还具有如下特色，即题量大，覆盖面广，初中数学的内容已基本囊括其中。

题型配备齐全，也是本套书的一个突出特点。给同样的考核内容赋予新颖多样的考核方式，有助于拓展学生的思维，帮助学生提高分析问题、解决问题的能力。本书尤其注重对选择、填空和判断是非等标准化题型的训练，使学生基础知识和基本技能的掌握达到事半功倍的效果。章、节后均配备了适量的综合题和竞赛练习题，旨在启迪学生智力的自我开发与提高。每册最后附有参考答案与提示，有助于学生自查或家长家庭辅导与检查。

由于本套书中题目的难度及认知层次分布合理，使本书具有难易得当、适应性广的特点，而不是难题、怪题的集汇，各级各类学校均可根据自身的情况选择使用，是教师测试学生的标准化样本。

感谢北京市教育局教研部的有关数学专家，他们对本套书的设计和编写提出了很多指导性意见，使本书大为增色。

囿于编者水平，书中疏漏、错误之处在所难免，热忱希望读者斧正。

编选组
1994 年 1 月

目 录

第十二章　一元二次方程

一、知识要点

1. 一元二次方程的概念.
2. 一元二次方程的解法.
3. 一元二次方程的根的判别式.
4. 一元二次方程的根与系数的关系.
5. 用一元二次方程求根公式分解二次三项式.
6. 分式方程的解法.
7. 无理方程的解法.
8. 列方程解应用题.
9. 简单的二元二次方程组的解法.
10. 列方程组解应用题.

二、基本要求

1. 了解一元二次方程的概念，会用直接开平方法解形如 $(x-a)^2=b(b\geqslant 0)$ 的方程，会用配方法解数字系数的一元二次方程；掌握一元二次方程求根公式的推导，会用求根公式解一元二次方程；会用因式分解法解一元二次方程. 会根据方程的特征，灵活运用一元二次方程的各种解法求方程的根，能够列出一元二次方程解应用题.

2. 理解一元二次方程的根的判别式，会根据根的判别式判断数字系数的一元二次方程的根的情况；了解二次三项式的因式分解与解方程的关系，会利用一元二次方程的求根公

式在实数范围内将二次三项式分解因式.

3. 掌握一元二次方程根与系数的关系式，会用它们由已知一元二次方程的一个根求出另一个根与未知系数，会求一元二次方程两个根的倒数和与平方和.

4. 掌握可化为一元二次方程的分式方程的解法，会用去分母或换元法求方程的解，并会验根；能够列出可化为一元二次方程的分式方程解应用题.

5. 掌握可化为一元一次、一元二次方程的无理方程的解法，会用两边平方或换元法求方程的解，并会验根.

6. 了解二元二次方程、二元二次方程组的概念，掌握由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组的解法，会用代入法求方程组的解.

7. 通过解简单的二元二次方程组，进一步理解“消元”、“降次”的数学方法.

§1 一元二次方程

例1 解方程 $3x(a^2x-a^{3n+1})+a^n(ax-a^{3n})=0$ ($a>0$ 且 $a\neq1$).

解 由原方程得：$3a^2x^2+(a^{n+1}-3a^{3n+1})x-a^{4n}=0$. 利用十字相乘因式分解得

$$(3ax+a^n)(ax-a^{3n})=0 \ (a>0 \text{ 且 } a\neq1).$$

所以原方程的解为 $x_1=-\frac{a^{n-1}}{3}$, $x_2=a^{3n-1}$.

点评 首先要把原方程化成标准形式. 再根据题目具体情况采用一元二次方程求根的四种基本方法：①直接开平方法；②因式分解法；③配方法；④公式法中的某一种方法求解，

而用因式分解法求解是最常用的方法，比其他方法计算量小.

例 2 如果关于 x 的方程 $mx^2-2(m+2)x+m+5=0$ 没有实数根，那么关于 x 的方程 $(m-5)x^2-2(m+2)x+m=0$ 的实根有几个？

解 当 $m=0$ 时，原方程变为 $-4x+5=0$ 有实根. 当 $m\neq 0$ 时，依题意要求 $\Delta=[-2(m+2)]^2-4m(m+5)=4(m^2+4m+4-m^2-5m)=4(4-m)<0$，即 $mx^2-2(m+2)x+m+5=0$ 无实根，故要求 $m>4$.

当 $m=5$ 时，方程 $(m-5)x^2-2(m+2)x+m=0$ 变为：

$$-2(5+2)x+5=0.$$

解出 $x=\frac{5}{14}$. 该方程只有一个实根.

当 $m>4$ 且 $m\neq 5$ 时，

$$\begin{aligned}\Delta'&=[-2(m+2)]^2-4(m-5)m\\&=4(m^2+4m+4-m^2+5m)\\&=4(9m+4)>0.\end{aligned}$$

此时该二次方程有两个不相等的实数根.

点评 关于 x 的方程 $(m-5)x^2-2(m+2)x+m=0$ 并不一定是一元二次方程，要分 $m=5$ 和 $m\neq 5$ 两种情况来讨论，不可混为一谈.

例 3 设方程 $(m+3)x^2-4mx+2m-1=0$ 的两个实数根异号，且负根的绝对值较大，求实数 m 的取值范围.

解 $\begin{cases}\Delta=(-4m)^2-4(m+3)(2m-1)>0,\\ x_1+x_2=\dfrac{4m}{m+3}<0\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}(m-1)(2m-3)>0,\\ m(m+3)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>\dfrac{3}{2}\text{或 }m<1,\\ -3<m<0.\end{cases}$$

所以 m 的取值范围为 $-3<m<0$.

点评 要善于把文字语言转化为不等式，再解不等式组即可得出结果

例 4 解某一元二次方程，甲抄错一次项，得根为 -2 和 -3，乙抄错常数项，得根为 6 和 -1，那么正确的方程应是______.

解 设正确的方程为 $x^2+px+q=0$. 根据题意知：

$$(-2)\times(-3)=q \text{ 且 } 6+(-1)=-p.$$

所以正确的方程应是 $x^2-5x+6=0$.

点评 解题思路要灵活，要理解题意的本质，甲抄错一次项，那么常数项没抄错，韦达定理仍然成立，对于乙来讲，也同样如此.

例 5 已知方程 $x^2+kx+6=0$ 的两实数根为 x_1,x_2，同时方程 $x^2-kx+6=0$ 的两实数根为 x_1+5,x_2+5，求 k 的值.

解 根据题意知 $x_1+x_2=-k$ 且$(x_1+5)+(x_2+5)=k$. 所以 $-k+10=k$，解得 $k=5$.

点评 解题要抓住问题的主要矛盾，找出 x_1,x_2 与 k 的关系，再用等量代换求解.

例 6 求当 m 为何整数时，关于 x 的一元二次方程 $mx^2-6x+9=0$ 与 $x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$ 的根都是整数.

解 由 $\Delta_1=(-6)^2-4\times m\times 9\geqslant 0$，可解得 $m\leqslant 1$；

由 $\Delta_2=(-4m)^2-4\times 1\times(4m^2-4m-5)\geqslant 0$，可解得 $m\geqslant -\frac{5}{4}$.

所以当 $-\frac{5}{4}\leqslant m\leqslant 1$ 时，两个方程均有实数根. 因为 m 为整数，故 m 只能取 $-1,0,1$. 但当 $m=0$ 或 -1 时不合题意，所以当 $m=1$ 时，两个方程的根都是整数.

点评 一元二次方程有整数根的条件首先应该在判别式大于(或等于零)的前提下再缩小范围来考虑，不能从假设有实数根，然后如何如何，那样是没法做出来的.

例 7 已知关于 x 的方程 $x^2-2x+k=0$ 有实数根 x_1，x_2，且 $y=x_1^3+x_2^3$，试问：y 值是否有最大值或最小值，若有试求出其值，若没有请说明理由.

解 因为 $x^2-2x+k=0$ 有实数根，所以

$$\Delta=(-2)^2-4\times1\times k=4(1-k)\geqslant0,$$

即 $k\leqslant1$. 因为 $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=k$，所以

$$\begin{aligned}y&=x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]\\&=2(4-3k)=8-6k.\end{aligned}$$

因为 $k\leqslant1$，所以 $-6k\geqslant-6$，$8-6k\geqslant8-6=2$，即 y 有最小值为 2.

点评 已知一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 两根为 x_1 和 x_2，那么不解方程读者一定要会求 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$，$x_1^2+x_2^2$，$(x_1-x_2)^2$，$\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$，$x_1^3+x_2^3$，$|x_1-x_2|$，$x_1x_2^2+x_1^2x_2$ 等的解. 这是学习一元二次方程的基本要求.

另外上题后半部分也可利用一次函数的增减性来解.

例 8 已知 x_1，x_2 是关于 x 的方程 $x^2+m^2x+n=0$ 的两个实数根，y_1，y_2 是关于 y 的方程 $y^2+5my+7=0$ 的两个实数根，且 $x_1-y_1=2$，$x_2-y_2=2$，求 m，n 的值.

解 由题意知 $x_1+x_2=-m^2$ 且 $y_1+y_2=-5m$. 又因为 $x_1-y_1=2$，$x_2-y_2=2$，两式相加得 $(x_1+x_2)-(y_1+y_2)=4$，所以 $(-m^2)-(-5m)=4$，$m^2-5m+4=0$. $m=4$ 或 $m=1$.

当 $m=1$ 时，关于 y 的方程 $y^2+5y+7=0$ 无实根，所以