

温度场 的数值模拟

刘高琰 编著



重庆大学出版社

内 容 简 介

本书介绍了用有限差分法和有限单元法对温度场进行数值模拟所需要的基本理论和一些有效的数值方法。内容精练,简单明了,实用性强。全书共分四章,包括导热定解问题及其泛函,用有限差分法和有限单元法计算温度场,以及温度场方程组的解法。书中有典型温度场的计算实例和适量的程序框图,附有三个BASIC语言源程序。

本书可作高等工业院校冶金、铸造、热处理、压力加工、动力机械和机械制造等专业本科生的选修课教材,亦可供上述专业的研究生、教师和工程技术人员参考。

温度场的数值模拟

刘高瑛 编著

责任编辑 贾肇武

*

重庆大学出版社出版

新华书店重庆发行所经销

重庆印制一厂印刷

*

开本: 787×1092 1/16 印张: 10.125 字数: 253 千

1990年1月第1版 1990年1月第1次印刷

印数: 1—2500

标准书号: ISBN 7-5624-0282-5 定价: 2.07元
TG·15

前言

温度场的数值解法,是传热学在计算技术上实现现代化的一个主要标志,是研究传热过程的一种重要工具。本书叙述用有限差分法和有限单元法计算温度场的基本理论和方法。全书共分四章。第一章介绍基本理论,第二章和第三章分别介绍怎样建立温度场的有限差分方程和有限单元方程,第四章介绍温度场线性代数方程组的解法。

本书是根据作者使用了多年的讲义写成的。目的是使读者能在温度场的数值计算方面获得坚实的入门知识。

本书具有下述特点:

- 1.简单明了,起点较低。本书只讲述温度场数值模拟的关键内容,重点是基本概念、基本理论和具体的算法。对重要的公式,只是从满足工程应用的角度作了简明易懂的推导,摒弃了繁琐难懂的证明。书中以典型的温度场为例,通过详细的计算,着重讲解怎样建立温度场的线性代数方程组,并且结合算例介绍程序框图。这样,条理清楚、具体,使读者容易接受和学会计算方法,举一反三,学了能用;

- 2.在有限差分法中采用了总热阻系数计算热流,这样,不但物理概念明确,而且统一地处理了内部节点和边界节点,使方程规格化,简单通用;

- 3.在有限单元法中提出了用界面单元计算界面上的热流,将单元按泛函归结为两大类:一类是内部单元,泛函只有面积分;另一类是界面单元,泛函只有线积分。这样,便于组织原始数据,减少运算量,简化程序,扩大程序的通用性;

- 4.对合金凝固温度场提出了用固相增量计算结晶潜热对温度场的影响,并且用了一种改进的迭代法计算固相增量。当用每次迭代得到的固相增量计算结晶潜热,再修改温度时,只需要修改本次迭代结晶潜热增量的列矩阵,而不必再计算方程组的系数矩阵。这样,运算量很少,受空间和时间步长的限制较少,精度较高。这是一种崭新的计算合金凝固温度场的方法;

- 5.着重介绍了一些有效的算法。

书中附录了三个BASIC语言源程序。

本书全部采用国际单位制作为基本量纲。

读者应具有高等数学、线性代数、算法语言和传热学的基础知识。对于阅读第一章的数学推导有困难的读者,可以不读这一章。第二章和第三章是彼此独立的,可以只读其中一章。

本书可作为高等工业院校热工类(冶金、铸造、热处理、金属压力加工、焊接、热能等)和机械类(动力机械、机械制造等)专业本科生的选修课教材,亦可供这些专业的研究生、教师和工程技术人员参考。

贵州工学院何伟保副教授认真地审阅了原稿,提出了一些宝贵的意见,作者在此表示衷心的感谢。

编 者

1988.12

目 录

第一章 导热定解问题及其泛函	(1)
§ 1.1 导热偏微分方程	(1)
§ 1.2 定解条件	(4)
§ 1.3 泛函与泛函的极值条件	(12)
§ 1.4 两类泛函的极值条件	(14)
§ 1.5 平面温度场的泛函	(17)
§ 1.6 轴对称温度场的泛函	(20)
§ 1.7 温度场的数值算法概述	(22)
§ 1.8 合金凝固温度场的四个重要问题	(23)
第二章 用有限差分法计算温度场	(41)
§ 2.1 概述	(41)
§ 2.2 差分方程通式	(43)
§ 2.3 几种常用的差分方程	(47)
§ 2.4 三角形单元的差分方程	(50)
§ 2.5 用有限差分法计算温度场的例题	(52)
§ 2.6 系数矩阵的一维压缩存贮	(67)
第三章 用有限单元法计算温度场	(70)
§ 3.1 概述	(70)
§ 3.2 温度插值函数	(76)
§ 3.3 第二类界面单元的单元矩阵	(81)
§ 3.4 第三类界面单元的单元矩阵	(83)
§ 3.5 第四类界面单元的单元矩阵	(84)
§ 3.6 平面温度场三角形单元的单元矩阵	(87)
§ 3.7 平面温度场矩形单元的单元矩阵	(90)
§ 3.8 轴对称体楔形圆环单元的单元矩阵	(94)
§ 3.9 轴对称体矩形圆环单元的单元矩阵	(98)
§ 3.10 温度场的有限单元方程组	(102)
§ 3.11 第一类边界条件的引入	(105)
§ 3.12 用有限单元法计算温度场的实例	(107)
第四章 导热问题线性代数方程组的解法	(116)
§ 4.1 概述	(116)
§ 4.2 因子分解法 因子分解——改进迭代法	(117)
§ 4.3 追赶法 追赶法——改进迭代法	(125)
附录 合金凝固平面温度场的三个计算机程序	(132)
参考文献	(147)

第一章 导热定解问题及其泛函

实际的导热问题，多数是复杂的不稳定的导热问题。温度场是按固体的导热规律，用导热偏微分方程及其定解条件，或者用它的泛函来描述的。温度场的几何形状和边界条件往往比较复杂，很难求出实用的解析解，因此，常用数值解法。

本章研究推导温度场的有限差分方程和有限单元方程的理论基础，包括导热偏微分方程及其定解条件，导热问题的泛函及其变分公式，平面导热温度场和轴对称导热温度场的泛函，合金相变温度场的四个重要问题。

§ 1.1 导热偏微分方程

下面推导等压过程固体的导热偏微分方程。方程中的符号：

- $T[^\circ\text{C}]$ ——物体的温度；
- $k[\text{W}/\text{m}\cdot^\circ\text{C}]$ ——材料的导热系数；
- $C[\text{J}/\text{kg}\cdot^\circ\text{C}]$ ——材料的定压比热；
- $\rho[\text{kg}/\text{m}^3]$ ——材料的密度；
- $H[\text{J}/\text{kg}]$ ——材料的热焓；
- $Q[\text{J}/\text{kg}]$ ——材料的结晶潜热；
- $q_v[\text{W}/\text{m}^3]$ ——温度场的内热源强度，作常数处理。它是化学反应或电流等产生的热能；
- $t[\text{s}]$ ——过程进行的时间；
- $x[\text{m}]$ 和 $y[\text{m}]$ ——直角坐标；
- $r[\text{m}]$ 和 $z[\text{m}]$ ——分别为半径和对称轴；
- $\varphi[\text{rad}]$ ——圆柱坐标的方位角。

一、直角坐标系

现在研究直角坐标系中，导热固体内部任一微元体（图1.1）的瞬态热平衡。

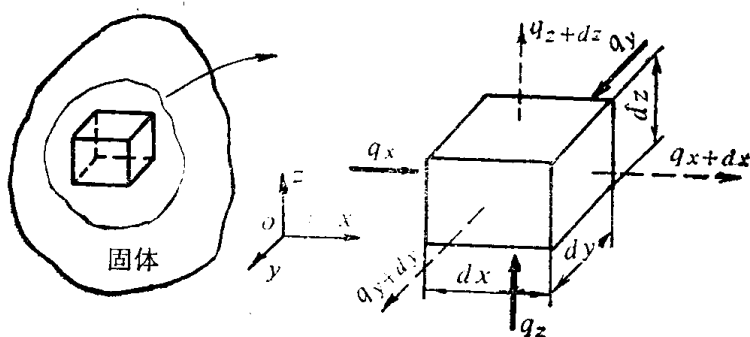


图 1.1

根据傅里叶导热定律, 在一个单位时间内:

x 方向由于导热输入微元体的净热量

= 左侧面输入的热量 q_x ——右侧面输出的热量 q_{x+dx}

$$= -k \frac{\partial T}{\partial x} dydz - \left[-k \frac{\partial T}{\partial x} dydz - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dydz dx \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz \quad (a)$$

同理, y 方向输入微元体的净热量

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dz \quad (b)$$

z 方向输入微元体的净热量

$$= \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (c)$$

$$\text{微元体产生的热量} = q_v dx dy dz \quad (d)$$

$$\text{微元体由于温度和物质状态改变所积蓄或放出的热量} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho H) dx dy dz \quad (e)$$

液体和固体在恒压过程中, 体积变化很小, 它们对外界作的功可以忽略不计。因此, 根据能量守恒原理, 微元体的热量平衡为

$$\left[\begin{array}{c} \text{由表面输入} \\ \text{的净热量} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{本身产生} \\ \text{的热量} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{温度和状态改变} \\ \text{所积蓄的热量} \end{array} \right]$$

将a, b, c, d, e式代入上式, 整理后得到

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v = \frac{\partial}{\partial t} (\rho H) \quad (1.1)$$

对于结晶期间的合金

$$H = Q + CT \quad (1.2)$$

严格地说, k 、 C 和 ρ 这三个热物性参数都是温度的函数。对液体金属和固体材料来说, 温度对 k 的影响最大, 其次是 C , 再次是 ρ 。一般情况下, 有

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial k}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\text{同理,} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \approx k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \approx k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho H) = H \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial H}{\partial t} = H \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \frac{\partial H}{\partial t} \approx \rho \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho CT) &= CT \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T \frac{\partial C}{\partial t} + \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \\ &= CT \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho T \frac{\partial C}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \approx \rho C \frac{\partial T}{\partial t}\end{aligned}$$

因此, 可以将 k 、 C 和 ρ 视为常数, 把(1.1)式写成

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + q_v = \rho \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.3)$$

在数值计算中, 常常把温度范围分成几段, 用分段的线性插值公式计算 k 、 C 、 ρ , 或者在每一段温度内将 k 、 C 、 ρ 取成定值。

(1.1)式和(1.3)式描述的温度场, 温度 T 是三个空间坐标 x 、 y 、 z 和时间 t 的函数, $T = f(x, y, z, t)$ 。这种温度场称为三维非稳定温度场。如果某一空间坐标(例如 z)方向的温度梯度为零, 则该方向的热流必等于零, 于是 $T = f(x, y, t)$ 。这种温度场称为二维非稳定温度场。它的导热偏微分方程, 可由(1.1)式得到

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q_v = \rho \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.4)$$

温度不随时间变化, 即 $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ 的温度场, 称为稳定温度场。稳定温度场的计算, 可以

引用非稳定温度场的方法和公式, 只要稍作修改就行了。因此, 本书推导方程和举例都讲非稳定温度场。

限于篇幅, 本书只研究二维温度场。因为二维是三维的基础, 将研究二维温度场的方法推广用于三维温度场, 是不困难的。有些三维问题, 热流只在同一平面内, 可以化成二维问题求解。二维问题可以用微型电子计算机计算。当然, 三维温度场往往能真实地代表实际的温度场, 这是目前研究的课题之一。

二、圆柱面坐标系

对于轴对称温度场, 用圆柱面坐标系比较方便。现在研究在圆柱面坐标系中, 固体内任一微元体的瞬态热平衡(图1.2)。

根据傅里叶导热定律, 在一单位时间内:

径向由导热输入微元体的净热量

= 内圆柱面输入的热量 q_r - 外圆柱面输出的热量 q_{r+dr}

$$= -k \frac{\partial T}{\partial r} r d\varphi dz - \left[-k \frac{\partial T}{\partial r} r d\varphi dz - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) r d\varphi dz dr \right]$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) r d\varphi dz dr \quad (a)$$

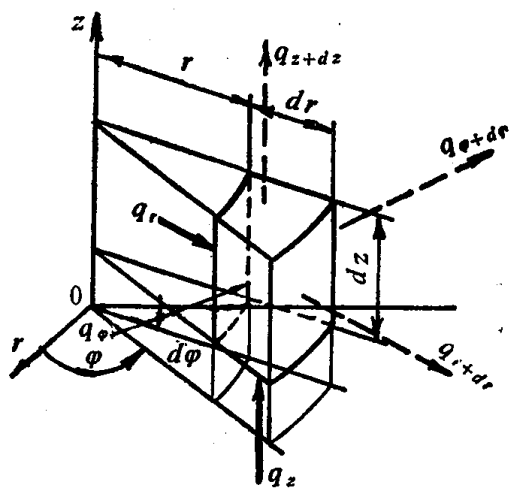


图 1.2

圆周方向由导热输入微元体的净热量

=前面输入的热量 q_φ -后面输出的热量 $q_{\varphi+d\varphi}$

$$\begin{aligned}
 &= -k \frac{\partial T}{r \partial \varphi} dr dz - \left[-\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} dr dz - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) r d\varphi dz dr \right] \\
 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) r d\varphi dz dr
 \end{aligned} \tag{b}$$

同理, 轴向由导热输入微元体的净热量

$$= -\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) r d\varphi dz dr \tag{c}$$

因此, 在圆柱面坐标系中, 三维非稳定温度场的导热偏微分方程

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v \\
 &= \rho \frac{\partial H}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

轴对称 $\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \right)$ 的二维温度场

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v = \rho \frac{\partial H}{\partial t} \tag{1.6}$$

轴向无热流 $\left(\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \right)$ 的二维温度场

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + q_v = \rho \frac{\partial H}{\partial t} \tag{1.7}$$

由推导过程可知, 上述导热偏微分方程只适用于各向同性的均质固体内部, 即温度分布连续的温度场, 不适用于固体、液体、气体交界面处的过渡区。

在数理方程中, 将非稳定温度场的导热偏微分方程称为抛物型微分方程。将稳定温度场的导热偏微分方程称为椭圆型微分方程。

§ 1.2 定解条件

导热微分方程描述的是固体内部导热的一般规律, 没有包括导热问题的具体条件, 因此, 它的解不是唯一的。

在物体的几何形状、尺寸和热物性参数已给定的情况下, 固体内部的温度分布及温度随时间的变化, 决定于边界条件和初始条件, 即定解条件。

一、边界条件

温度场四周表面的换热条件称为温度场的边界条件。常见的边界条件有四种, 即对~~流~~换

热，辐射换热，已知边界温度和已知热流密度。

(一) 对流换热边界

具有温度差的流体内部或者流体与固体的交界处，存在着对流换热。这是由宏观运动的流体分子微团传递能量引起的。

根据实验，在一单位时间内，从一单位面积的固体表面流入流体的热量

$$q = h(T_w - T_A) \quad (1.8)$$

这就是牛顿冷却定律。它说明对流换热的热流密度 q ，是由换热系数 h ，固体表面温度 T_w 与流体主流温度 T_A 之差决定的。

计算对流换热系数，多数采用由实验数据确定的无量纲方程或计算线图。具体计算，请参考传热学。

常见的对流换热边界有两种。

1. 固体与流体的边界

如图1.3所示，从固体内部流到表面的热流密度

$$q_- = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (a)$$

从固体表面流入流体的热流密度

$$q_+ = h(T_w - T_A) \quad (b)$$

式中 $\frac{\partial T}{\partial n}$ —— 固体内部温度 T 沿外法线方向 n 的方向导数。

当边界区域处于准稳定状态时，热流连续 $q_- = q_+$ ，则得到

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T_w - T_A) \quad (1.9)$$

该式表明，在温度和热流都连续的对流换热边界，固体表面的温度 T_w 与温度沿外法线方向的导数 $\frac{\partial T}{\partial n}$ 成线性关系。这是常见的一种固体流体边界。在数理方程中，将这类边界条件称为第三类边界条件。计算时， h 和 T_A 是已知的。

2. 固体与固体接触面的换热边界

如图1.4所示，从微观上看，两固体接触时，接触的只是表面上某些凸出的点，两表面

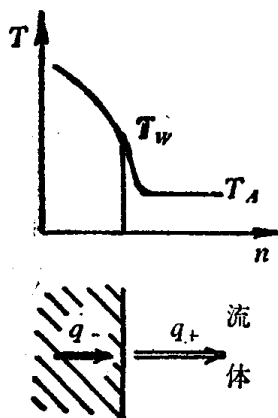


图 1.3

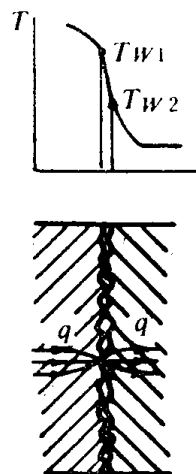


图 1.4

之间的空隙里是气体。因此，相互接触的两固体间的传热包括三部分，即接触处的导热，空隙里气体的导热和高温下空隙两表面间的热辐射。通过接触界面的热流密度

$$q = [\text{接触部分的导热}] + [\text{空隙里气体的导热}] + [\text{空隙两表面间的热辐射}]$$

$$= \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\frac{L_g}{2k_1 A_c} + \frac{L_g}{2k_2 A_c}} + \frac{T_{w1} - T_{w2}}{\frac{L_g}{k_g A_v}} + \frac{\sigma(T_{w1}^4 - T_{w2}^4)}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right) \frac{A}{A_v}}$$

$$= \left[\frac{1}{L_g} \left(\frac{A_c}{A} \cdot \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2} + \frac{A_v}{A} k_g \right) + \frac{A_v}{A} \cdot \frac{\sigma(T_{w1}^2 + T_{w2}^2)(T_{w1} + T_{w2})}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \right] (T_{w1} - T_{w2})$$

$$= h_c (T_{w1} - T_{w2}) \quad (1.10a)$$

$$h_c = \frac{1}{L_g} \left(\frac{A_c}{A} \cdot \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2} + \frac{A_v}{A} k_g \right) + \frac{A_v}{A} \sigma (T_{w1}^2 + T_{w2}^2) (T_{w1} + T_{w2}) / \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \quad (1.10b)$$

$\frac{A_v}{A}$ ——在辐射情况下 $\frac{A_v}{A} \approx 1$;

h_c ——接触界面的总换热系数;

T_{w1}, T_{w2} ——分别为固体两接触表面的温度，待求;

L_g ——空隙厚度的平均值，无宏观气隙时可取为表面的平均粗糙度;

A_c, A_v ——分别为实际的接触面积和空隙面积;

$A = A_c + A_v$ ——总面积;

k_1, k_2 ——分别为两固体的导热系数;

k_g ——空隙里气体的导热系数;

$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} (\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ ——斯蒂芬-波尔兹曼常数;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ——分别为固体1和固体2的辐射率。

可见，总换热系数 h_c 决定于两固体材料的导热系数，表面粗糙度和辐射率以及界面上的温度和压强。同 k_1 和 k_2 相比，气体的导热系数 k_g 小得多。在 (1.10) 式中，如果 $A_c \approx A$ ，则总换热系数由第一项决定；如果 $A_c \ll A$ ，甚至产生气隙层，则总换热系数由第二项和第三项决定，而第三项的值主要决定于两表面的温度，温度低，第三项的值就小。目前尚无实用的公式计算 L_g 和 A_c 。

固体与固体接触面上的换热条件，也称为第四类边界条件。

典型表面的接触热导可参考表1.1。

(二) 辐射换热边界

大多数工程材料，表面的辐射率 ε = 表面的吸收率 α ，属于灰体材料。辐射换热边界主要研究两类问题：一是已知表面温度，求辐射损失的热量；二是已知辐射损失的热量，求表面温度。求解辐射问题，都必须先求出有效辐射。定义：

有效辐射 J = 单位时间单位表面积辐射出去的能量 = 表面辐射的能量 + 表面反射的能量

投射辐射 G = 单位时间内投射在单位表面积上的总辐射能

下面分两种情况进行研究。

1. 有效辐射均匀的情况

对于第 i 个表面，有效辐射

表1.1 典型表面的接触热阻^[2]

	粗 糙 度 (μm)	温 度 ($^{\circ}\text{C}$)	压 力 (N/m^2) $\times 10^5$	$1/h_c$ ($\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}/\text{W}$) $\times 10^{-4}$
416不锈钢, 研磨, 空气	2.54	90~200	3.04~25.33	2.64
304不锈钢, 研磨, 空气	1.14	20	40.53~70.92	5.28
416不锈钢, 研磨, 带有 $2.54 \times 10^{-5}\text{m}$ 厚的黄铜填隙片、空气	2.54	30~200	7.09	3.52
铝, 研磨, 空气	2.54	150	12.16~25.33	0.88
	0.254	150	12.16~25.33	0.18
带有 $2.54 \times 10^{-5}\text{m}$ 厚的填隙片、空气	2.54	150	12.16~202.65	1.23
铜, 研磨, 空气	1.27	20	12.16~202.65	0.07
磨平, 空气	3.81	20	10.13~50.66	0.18
真空	0.25	30	7.09~70.92	0.88

$$J_i = \varepsilon_i E_{bi} + \rho_i G_i$$

式中 ε_i ——辐射率;

ρ_i ——反射率;

$E_{bi} = \sigma T_i^4$ ——与灰体具有同样温度的黑体的辐射能。

假设不透射, 即透射率为零, 则反射率 ρ_i +吸收率 $\alpha_i=1$, 于是

$$\rho_i = 1 - \alpha_i = 1 - \varepsilon_i$$

$$J_i = \varepsilon_i E_{bi} + (1 - \varepsilon_i) G_i$$

$$G_i = (J_i - \varepsilon_i E_{bi}) / (1 - \varepsilon_i)$$

由于 [离开表面的净能量]=[有效辐射-投射辐射] $\times$ 表面积, 所以

$$\begin{aligned} q_i &= (J_i - G_i) A_i = [J_i - (J_i - \varepsilon_i E_{bi}) / (1 - \varepsilon_i)] A_i \\ &= (E_{bi} - J_i) \varepsilon_i A_i / (1 - \varepsilon_i) = (E_{bi} - J_i) / (1 - \varepsilon_i) / \varepsilon_i A_i \\ &= (E_{bi} - J_i) / R_{ii} \end{aligned}$$

(1.11)

式中 $R_{ii} = (1 - \varepsilon_i) / (\varepsilon_i A_i)$, 称为辐射换热的“表面热阻”。

再研究表面 i 与表面 j 之间的辐射换热量。

表面 i 一个单位面积辐射出去的总能量中到达表面 j 的份数, 称为辐射角系数, 以 F_{ij} 表示。关于角系数的计算, 请参考[2]

因此, 离开表面 i 的总能量中到达表面 j 的那一部分能量 $= J_i A_i F_{ij}$

离开表面 j 的总能量中到达表面 i 的那一部分能量 $= J_j A_j F_{ji}$

结果, 表面 i 给表面 j 的净辐射能量

$$q_{ij} = J_i A_i F_{ij} - J_j A_j F_{ji}$$

根据辐射互换性原理, $A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$, 所以

$$q_{ij} = (J_i - J_j) A_i F_{ij} = \frac{J_i - J_j}{1/A_i F_{ij}} = \frac{J_i - J_j}{R_{ij}} \quad (1.12)$$

式中 $R_{ij} = \frac{1}{A_i F_{ij}}$, 称为辐射换热的“空间热阻”。

计算多个表面之间的有效辐射, 采用奥本海姆辐射网络分析法是比较方便的。该法的实

质是，将(1.11)式等号右边的分子看成“热势差”，将分母看成辐射换热的“表面热阻”画出“表面热阻”单元(图1.5a)；同样，按式(1.12)画出“空间热阻”单元(图1.5b)。因

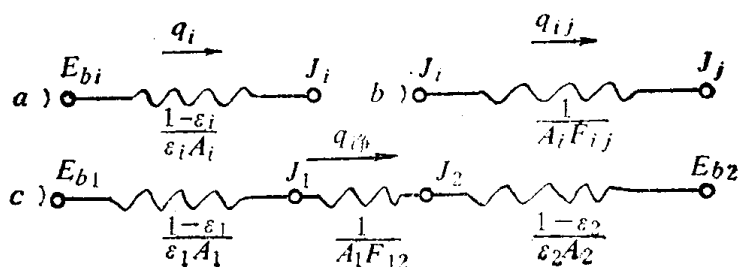


图 1.5

此，对于两个彼此可见的表面1和表面2，只要确定两个表面的表面热阻 $(1-\epsilon_1)/\epsilon_1 A_1$ 、 $(1-\epsilon_2)/\epsilon_2 A_2$ 和有效辐射“热势差”之间的“空间热阻” $1/A_1 F_{12}$ ，就可以画出两表面间的辐射网络图(图1.5c)。

由图1.5c可以写出两表面间净辐射热流量

$$U_{\text{净}} = \frac{\text{总热势差}}{\text{总热阻}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{(1-\epsilon_1)/\epsilon_1 A_1 + 1/A_1 F_{12} + (1-\epsilon_2)/\epsilon_2 A_2} \quad (1.13)$$

对于空气中的凸表面物体1，可将空气视为空心体2，则 $A_2 \gg A_1$ ， $F_{12} \approx 1$ 。当物体表面的有效辐射系数可以近似地取为同一值时，由式(1.13)得到物体由辐射损失的热流流量

$$U_{\text{净}} = \frac{E_{b1} - E_{b2}}{(1-\epsilon_1)/\epsilon_1 A_1 + 1/A_1 + 0} \quad (1.14)$$

若只考虑固体表面的热辐射，则辐射换热的边界条件是

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \epsilon_1 \sigma (T_{w1}^4 - T_A^4) \quad (1.15)$$

可见，辐射换热的边界条件是关于物体表面温度 T_w 的非线性方程，这使导热问题的求解更加困难。因此，常常采取线性化。

实际上，同空气接触的固体表面，同时存在着对流和辐射两种换热。为了统一用对流换热公式计算总换热量，常常用“辐射换热系数”将辐射换热折算成对流换热。

辐射换热系数 h_r 的定义是

$$q_{\text{辐射}} = h_r (T_1 - T_2) \quad (1.16)$$

式中 T_1 和 T_2 是进行辐射换热的两个物体表面的温度。

假定第二个表面是一个包壳，即 $A_1/A_2 \rightarrow 0$ ， $F_{12} \approx 1$ ，而且它的温度 T_2 与流体温度 T_A 相同，则由(1.15)、(1.16)式得辐射热流密度

$$q_{\text{辐射}} = \epsilon_1 \sigma (T_{w1}^4 - T_A^4) = h_r (T_{w1} - T_A)$$

$$\text{式中 } h_r = \epsilon_1 \sigma (T_{w1}^3 + T_A^3) (T_{w1} + T_A) \quad (1.17)$$

可见，辐射换热系数 h_r 是随温度急剧变化的函数， T_{w1} 和 T_A 愈高， h_r 值就愈大。注意，在多数情况下，对流换热系数变化不大。这是两者的差别。

总热流密度等于对流和辐射两个热流密度之和，即

$$q = (h + h_r) (T_w - T_A) \quad (1.18)$$

因此,同时存在着对流和辐射两种换热的表面,其边界条件是

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = (h + h_r)(T_w - T_A) \quad (1.19)$$

2. 有效辐射不均匀的情况

有效辐射不均匀的情况,必须用数值解法。为此,首先建立有效辐射的节点方程,求出各个单元表面的有效辐射值。

建立有效辐射的节点方程,比较方便的方法是对辐射网络图的每个节点应用克希荷夫电流定律,即流进每一节点的热流之代数和为零。

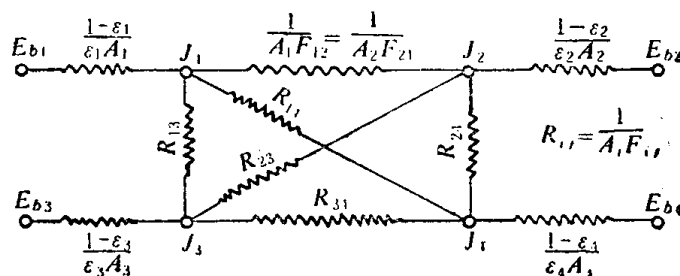


图 1.6

例如在图1.6中,四个节点代表四个表面,根据克希荷夫电流定律可以列出 J_1, J_2, J_3, J_4 四个节点的有效辐射方程

$$J_1 \text{ 节点} \quad \frac{E_{b1} - J_1}{(1 - \epsilon_1)/\epsilon_1 A_1} + \frac{J_2 - J_1}{1/A_1 F_{12}} + \frac{J_3 - J_1}{1/A_1 F_{13}} + \frac{J_4 - J_1}{1/A_1 F_{14}} = 0$$

$$\text{即} \quad \frac{\epsilon_1(E_{b1} - J_1)}{1 - \epsilon_1} + F_{12}(J_2 - J_1) + F_{13}(J_3 - J_1) + F_{14}(J_4 - J_1) = 0$$

$$J_2 \text{ 节点} \quad \frac{\epsilon_2(E_{b2} - J_2)}{1 - \epsilon_2} + F_{21}(J_1 - J_2) + F_{23}(J_3 - J_2) + F_{24}(J_4 - J_2) = 0$$

$$J_3 \text{ 节点} \quad \frac{\epsilon_3(E_{b3} - J_3)}{1 - \epsilon_3} + F_{31}(J_1 - J_3) + F_{32}(J_2 - J_3) + F_{34}(J_4 - J_3) = 0$$

$$J_4 \text{ 节点} \quad \frac{\epsilon_4(E_{b4} - J_4)}{1 - \epsilon_4} + F_{41}(J_1 - J_4) + F_{42}(J_2 - J_4) + F_{43}(J_3 - J_4) = 0$$

一般情况下, J_i 节点的方程

$$\frac{\epsilon_i}{1 - \epsilon_i} (E_{bi} - J_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F_{ij}(J_j - J_i) = 0 \quad (1.20)$$

这样,对于 n 个表面可以得到 n 个节点方程,即 n 阶线性方程组。解之,便得到 n 个表面的有效辐射。

求解 J_i 方程组常用的方法是高斯-赛德尔迭代法。为此,将 J_i 化成显函数的形式,由(1.20)式得到

$$e_i E_{bi} - e_i J_i + (1 - e_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F_{ij} J_j - (1 - e_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F_{ji} J_i = 0$$

即

$$e_i E_{bi} - e_i J_i + (1 - e_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F_{ij} J_j - (1 - e_i) \left[\sum_{j=1}^n F_{ji} - F_{ii} \right] J_i = 0$$

由于

$$\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1$$

所以

$$J_i = \frac{1}{1 - F_{ii}(1 - e_i)} \left[(1 - e_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F_{ij} J_j + e_i E_{bi} \right] \quad (1.21)$$

当已知表面温度 T_i 时, 由上式可以求出有效辐射 J_i 。如果已知表面损失的热流密度 U_i/A_i , 则将(1.11)式代入(1.20)式, 得到

$$J_i = \frac{1}{1 - F_{ii}} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F_{ij} J_j + U_i/A_i \right) \quad (1.22)$$

灰体表面间辐射换热数值解法的基本程序框图如图1.7。

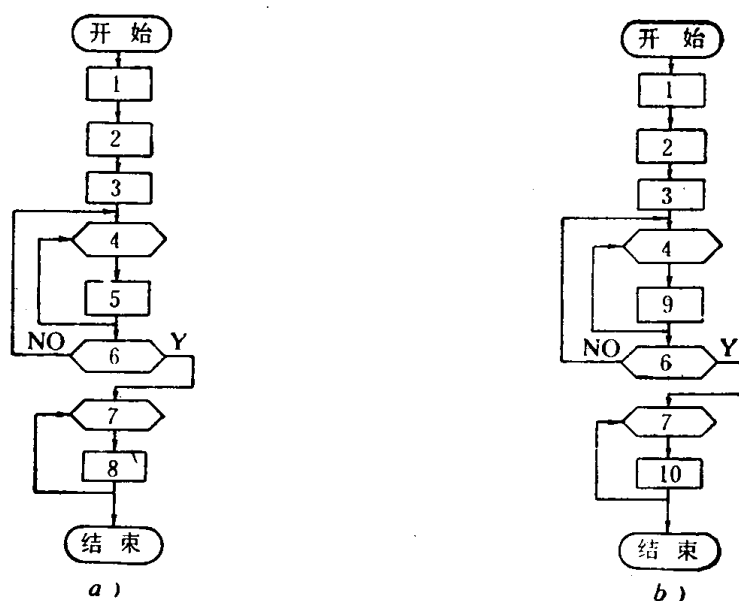


图 1.7

a) 已知 T_i , 求 U_i b) 已知 $\frac{U_i}{A_i}$, 求 T_i

图1.7 各框的说明

框 号	说 明
1	输入已知数据
2	$J_i^0 = 0$ (或估计值)
3	计算 F_{ij}, ε_i
4, 7	i 从1到 n 循环
5	$J_i^1 = \left((1 - \varepsilon_i) \left(\sum_{j=1}^{i-1} F_{ij} T_j^1 + \sum_{j=i+1}^n F_{ij} T_j^0 \right) + \varepsilon_i E_{bi} \right) / (1 - F_{ii}(1 - \varepsilon_i))$
6	$\max J_i^1 - J_i^0 \leq \delta?$
8	$U_i = \varepsilon_i A_i (E_{bi} - J_i^1) / (1 - \varepsilon_i)$
9	$J_i^1 = \left(\sum_{j=1}^{i-1} F_{ij} T_j^1 + \sum_{j=i+1}^n F_{ij} T_j^0 + U_i / A_i \right) / (1 - F_{ii})$
10	$E_{bi} = J_i^1 + (1 - \varepsilon_i) U_i / (\varepsilon_i A_i), T_i = (E_{bi} / \sigma)^{1/4}$

(三) 已知温度的边界

温度场边界表面上各点的温度随时间变化的规律, 如果通过对测试数据的处理, 用显函数 $T_w = f(x, y, t)$ 表示出来, 则计算这种温度场时, 边界上节点的温度是已知的, 另外, 当对流换热系数 h 很大, 而固体的导热系数 k 相对来说很小, 即 $k/h \rightarrow 0$ 时, 由(1.9)式可知, $T_w \approx T_A$, 这样, 已知对流换热条件等于已知边界温度。同样, 辐射换热边界, 如果 $k/\varepsilon \rightarrow 0$, 则由(1.15)式, 得到 $T_w = T_A$, 这样已知辐射换热边界等于已知边界温度。

在数理方程中, 将已知边界值的条件称为第一类边界条件。

(四) 已知热流密度的边界

已知热流密度是已知对流换热或已知辐射换热的一种特殊情况。

在对流换热中, 如果边界表面的温度与环境温度之差 $T_w - T_A$ 是一个已知函数, 或者在辐射换热中, $T_w^4 - T_A^4$ 是一个已知函数, 则边界条件就成为已知热流密度。根据边界上热流连续, 得到

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = q_s \quad (1.23)$$

式中 $q_s [W/m^2]$ 是在一单位时间内, 一单位面积的固体表面散失的热量。

在数学物理方程中, 将已知热流密度的边界条件称为第二类边界条件。

绝热的边界, $q_s = 0$

二、初始条件

在过程开始的时刻, 即 $t=0$ 时整个温度场内部的温度分布, 即

$$T = f(x, y, t) |_{t=0} = \varphi(x, y) \quad (1.24)$$

对于以后的温度分布有重要影响。因此, 求解非稳定温度场时, 除了给定边界条件, 还必须给定这个“初始条件”。这是初边值问题。

稳定温度场的温度分布与初始条件无关, 它是只有边界条件而没有初始条件的导热问题, 是一个边值问题。

§ 1.3 泛函与泛函的极值条件

一、泛 函

例 1 求质点 M 在重力作用下(不计摩擦),沿曲线 $y(x)$ 由 o 点下滑至 B 点(图1.8a)所需的时间。

解 取 o 点为坐标原点,根据能量守恒定律,质点在曲线 $y(x)$ 上任一点 A 时的速率

$$v = \sqrt{2gy}$$

因此,质点从 o 点滑至 B 点所经历的时间

$$t = \int_o^B dt = \int_o^B \frac{ds}{v} = \int_o^B \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{\sqrt{2gy}} = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gy}} dx$$

例 2 求曲线 $y(x)$ 上 A 、 B 两点间的曲线长度。

解 在图1.8b中,曲线 AB 的长度

$$l = \int_A^B dS = \int_A^B \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

例 3 求张在封闭的平面曲线 W 上方的曲面 $Z = Z(x, y)$ 的面积。

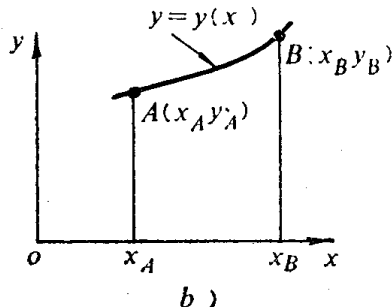
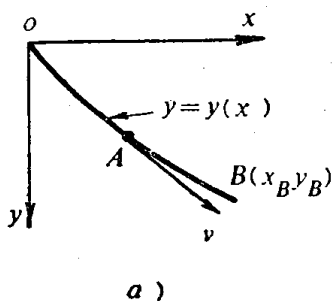


图 1.8

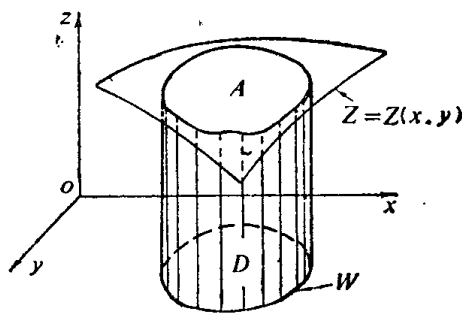


图 1.9

解 在图1.9中,所求面积

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

式中积分域 D 是 $Z(x, y)$ 在 xoy 平面上的投影,域 D 的边界是曲线 W 。

可见,在例1和例2中,定积分值取决于在域内连续的函数 $y(x)$,在例3中,定积分值取决于曲面函数 $Z(x, y)$ 。

一般情况下,定积分 $I[y(x)] = \int_0^l F[x, y(x), y'(x)] dx$ 中,定积分 $I[y(x)]$ 与连续函数 $y(x)$ 是一一对应的。有一个函数 $y(x)$,定积分 $I[y(x)]$ 就有一个确定的数值。 $I[y(x)]$ 是函数 $y(x)$ 的函数。这种依赖于函数 $y(x)$ 的函数 $I[y(x)]$,称之为泛函,用 I 表示。泛函的自变量是函数。这里,泛函也是连续函数。

在二维稳定温度场中,温度 T 是平面坐标 x 和 y 的连续函数。二重积分

$$I[T(x, y)] = \iint_D F[x, y, T(x, y), T'_x(x, y), T'_y(x, y)] dx dy \quad (1.25)$$

$$\text{或 } I[T(x, y)] = \iint_D F[x, y, T(x, y), T'_x(x, y), T'_y(x, y)] dx dy + \oint_w G(T) dS \quad (1.26)$$

的值, 与温度函数 $T(x, y)$ 是一一对应的。积分 $I[T(x, y)]$ 是温度 $T(x, y)$ 的连续函数, 称为温度函数的泛函。记作 $I \equiv I[T(x, y)]$ 。式中 D 是温度函数的定义域。

(1.25) 和 (1.26) 式是二维导热温度场两类泛函的一般形式。在泛函中, 被积函数里温度对空间坐标的偏导数只有一阶的, 没有高阶的, 所以, 只要 $T(x, y)$ 连续且在各子域内连续可微, 则 $I[T(x, y)]$ 总是有意义的。请注意, 这里温度函数的自变量是 x 和 y , 泛函 $I[T(x, y)]$ 的自变量不是 x 和 y , 而是函数 $T(x, y)$ 。泛函的定义域是满足一定条件的函数的集合。

二、泛函的极值条件

泛函的值取决于泛函中的函数。若某一函数使泛函 $I[T(x, y)]$ 取极值, 则称该函数为泛函 $I[T(x, y)]$ 的极值函数。求泛函的极值函数的方法, 与求函数的极值的方法十分相似。但在温度场的数值计算中, 研究泛函的极值问题, 目的不是求出极值函数的具体表达式, 而是借助这一数学手段推导温度场的线性代数方程组。

在数学上, 求泛函的极值函数称为变分。

为了简化书写, 记 $T \equiv T(x, y)$, $I[T] \equiv I[T(x, y)]$, $T_x \equiv \frac{\partial T}{\partial x} \equiv T_x(x, y)$, $T_y \equiv \frac{\partial T}{\partial y} \equiv T_y(x, y)$

$$\text{设泛函 } I[T] = \iint_D F(x, y, T, T_x, T_y) dx dy$$

则泛函 $I[T]$ 取极值的必要条件是泛函 $I[T]$ 对函数 $T(x, y)$ 的偏导数为零, 即

$$\frac{\delta I}{\delta T} = 0 \quad (1.27)$$

按该定义式直接求极值函数, 往往是很麻烦的, 它只能用于被积分函数 F 很简单的情况。比较实用的方法, 是将它化为隐函数对参变量求偏导数。具体步骤如下:

1. 设待求的极值函数为 $T(x, y)$;
2. 任取一具有适当阶连续导数的函数 $\eta(x, y)$ 作为比较函数。关于 $\eta(x, y)$ 的具体表达式, 我们不必追究, 这只是一种数学手段而已;
3. 任取一绝对值很小的参变量 ε , 且设 ε 与自变量 x 和 y 无关。于是, 若 $T(x, y)$ 是极值函数, 则包括 $T(x, y)$ 在内的邻近函数族是

$$T(x, y, \varepsilon) = T(x, y) + \varepsilon \eta(x, y) \equiv T + \varepsilon \eta \quad (1.28)$$

这就是说, 极值函数是函数族 $T(x, y, \varepsilon)$ 中 $\varepsilon = 0$ 的那个函数。

同样, $T_x(x, y, \varepsilon) = T_x(x, y) + \varepsilon \eta_x(x, y) \equiv T_x + \varepsilon \eta_x$

$$T_y(x, y, \varepsilon) = T_y(x, y) + \varepsilon \eta_y(x, y) \equiv T_y + \varepsilon \eta_y$$

因此, 函数族 $T(x, y, \varepsilon)$ 的泛函为

$$I[T(x, y, \varepsilon)] \equiv I[\varepsilon] = \iint_D F(x, y, T + \varepsilon \eta, T_x + \varepsilon \eta_x, T_y + \varepsilon \eta_y) dx dy \quad (1.29)$$

① δ 是变分的专用符号, 代表增量, 读 “delta”