(沪)新登字 108 号

责任编辑　周玉刚
　　　　　苏德敏

高等数学知识网络

洪继科　曹助我　编著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所经销　江苏如东印刷厂印刷

开本 850×1168　1/32　印张 5.375　字数 198,000

1993 年 2 月第 1 版　1993 年 2 月第 1 次印刷

印数　1—3,400

ISBN 7-5323-2766-3/O·159

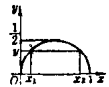
定价：3.30 元

目　录

1.函数及其图形

函数概念

对 $x\in X$(定义域)，按对应法则 f，有 $y\in Y$(值域)，称函数 $y=f(x)$.



$y=\sqrt{x-x^2}$，$X=[0,\ 1]$，$Y=\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$

反函数

由 $y=f(x)$ 确定的 $y=f^{-1}(x)$ 称为反函数；如 $y=\operatorname{sh}x\to y=f^{-1}(x)=\operatorname{arcsh}x$

隐函数

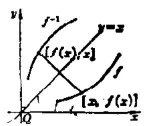
由方程 $F(x,\ y)=0$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 称为隐函数，如由 $y-x-\varepsilon e^{y}=0$ 确定的 $y=f(x)$

反函数与直接函数之间关系

设 f 是一一对应函数，则

① $f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x,\ x\in D_f$;

② $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象对称于直线 $y=x$.

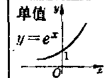
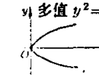
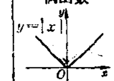
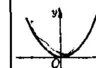
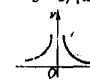
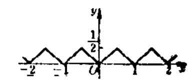


基本初等函数

幂函数	$y=x^{\alpha}$
指数函数	$y=a^{x}$
对数函数	$y=\log_a x$
三角函数	$y=\sin x$
反三角函数	$y=\operatorname{arctg}x$

复合函数

$y=f(u),\ u\in D_f$; $u=\varphi(x),\ x\in D_{\varphi}$，值域 R_u. 当 $R_u\subseteq D_f$ 时，有 $y=f[\varphi(x)]$.

函数的性质	定义	举例
单值性与多值性	若对于每一个 $x\in X$，仅有一个值 $y=f(x)$ 与之对应，则称 $f(x)$ 为单值函数，否则就是多值函数.	单值 $y=e^{x}$  多值 $y^2=x$ 
奇偶性	若对任一 $x\in X$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数，图象对称于 y 轴 若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数，图象对称于原点.	偶函数 $y=\|x\|$  奇函数 $y=\operatorname{arcsh}x$ 
单调性	若对任意 $x_1,x_2\in I$(区间)，且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 内为单增函数. 若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 内为单减函数.	 $y=x^2$，$x\leqslant0$ 时为减函数，$x\geqslant0$ 时为增函数.
有界性	若存在正数 M，对于任一 $x\in X$，都有 $\|f(x)\|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 内为有界函数. 若这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 内无界.	$y=1/\|x\|$  在 $(-\infty,\ 0)$ 及 $(0,\ +\infty)$ 上无界，在 $[1,\ \infty)$、$(-\infty,-1]$ 上有界.
周期性	若存在常数 $T\neq0$，对于任一 $x\in X$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数. 最小的 $T(>0)$ 称为函数的周期.	函数 $y=x-[x]$，$T=1$ 
其他	连续性、极值、凹性见第3、6章.	

初等函数的构成

初等函数是能用一个分析式子表示的函数，而它是由常数和基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次的函数复合步骤所形成的. 如

$$y=\lg(1+\sqrt{1+x^2}).$$

分段函数 $y=\begin{cases}x+1, & x\geqslant0;\\ \operatorname{ch}x, & x<0\end{cases}$

在 $x\geqslant0$ 和 $x<0$ 各段上是初等函数，但就整体来看，y 为非初等函数.

1.1 典型例题分析

例 1 求函数 $y=(x-|x|)\sqrt{-\sin^2\pi x}$ 的定义域和值域。

解 欲使 $-\sin^2\pi x\geqslant 0$，只有 $\sin\pi x=0$，即 $x=k$(整数)。又当 $x-|x|=0$ 时，即 $x\geqslant 0$ 时，函数 y 也有定义，综合得 y 的定义域为 $x\geqslant 0$ 及 $x=-1,-2,\cdots$，其值域 $y=0$。

例 2 已知狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数时};\\ 0, & x\text{ 为无理数时}.\end{cases}$

求 $D\left(-\frac{7}{5}\right)$，$D(1-\sqrt{2})$；并讨论 $D(D(x))$ 的各种性质。

解 因 $-\frac{7}{5}\in Q$（有理数），故

$$D\left(-\frac{7}{5}\right)=1;$$

而 $1-\sqrt{2}\overline{\in}Q$，故得 $D(1-\sqrt{2})=0$。

复合函数 $D(D(x))\equiv 1$，故 $D(D(x))$ 是单值、有界的偶函数；且又为周期函数，因对任何实数 T 都有 $D(D(x+T))=D(D(x))=1$，但无最小周期，显然它不是单调函数。

例 3 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x+1}, & x\geqslant 2;\\[2mm] \dfrac{2-x}{x+1}, & x<2,\ x\neq -1.\end{cases}$$

求 f 的定义域及 $f(a)$。

解 f 是定义在 $(-\infty,-1)$ 及 $(-1,+\infty)$ 上的一个函数，在各段上用不同的表达式计算函数值。

计算 $f(a)$：当 $a\geqslant 2$ 时，$f(a)=\dfrac{a-2}{a+1}$，当 $a<2$ 但 $a\neq -1$ 时，$f(a)=\dfrac{2-a}{a+1}$。

例 4 作函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+x^n}\ (x\geqslant 0)$ 的图象。

解 若 $0\leqslant x\leqslant 1$，则 $1\leqslant\sqrt[n]{1+x^n}\leqslant\sqrt[n]{2}$，因 $\sqrt[n]{2}\to 1(n\to+\infty)$，故 $\sqrt[n]{1+x^n}\to 1(n\to+\infty)$；

若 $x>1$，则 $\sqrt[n]{1+x^n}=x\sqrt[n]{\dfrac{1}{x^n}+1}\to x(n\to+\infty)$。

于是

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x, & x>1.\end{cases}$$

作法如图 1-1 所示。

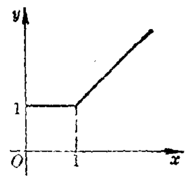


图 1-1

例 5 证明定义于区间 $(-l,l)$ 内的任何函数 $f(x)$ 可以表示为偶函

数与奇函数之和。

证明 令 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$,

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],$$

则由 $\varphi(x)=\varphi(-x)$ 及 $\psi(-x)=-\psi(x)$, 知 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 分别为定义在 $(-l,\ l)$ 内的偶函数及奇函数,且

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x).$$

例 6 设 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 及 $f(x)$ 为单调增函数,且

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x).$$

求证: $\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$.

证明 由于 φ,ψ 及 f 均为单增函数,且

$$\varphi(u)\leqslant f(u)\leqslant\psi(u),$$

故 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant\varphi[f(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant f[\psi(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$.

例 7 求双曲正切函数 $y=\operatorname{th}x$ 的反函数及其定义域。

解 由 $\operatorname{th}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\ (-\infty<x<+\infty)$, 得

$$y=\operatorname{th}x=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1},$$

解得 $e^{2x}=\dfrac{1+y}{1-y}\ (-1<y<1)$。取对数得

$$x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y},\quad -1<y<1.$$

习惯上常写成 $y=\operatorname{arcth}x$, 它称为反双曲正切函数。

例 8 求函数 $f(t)=\sin(\omega t+\theta)$ 的周期(常数 θ、$\omega>0$)。

解
$$\begin{aligned}f(t+T)-f(t)&=\sin[\omega(t+T)+\theta]-\sin(\omega t+\theta)\\&=2\sin\frac{\omega T}{2}\cdot\cos\left(\omega t+\theta+\frac{\omega T}{2}\right).\end{aligned}$$

若 T 是 $f(t)$ 的周期,则应有 $f(t+T)-f(t)=0$, 从而有

$$\sin\frac{\omega T}{2}=0, \tag{1}$$

或

$$\cos\left(\omega t+\theta+\frac{\omega T}{2}\right)=0. \tag{2}$$

(1) 的非零最小正数解为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

(2) 的非零最小正数解为

$$\omega t+\theta+\frac{\omega T}{2}=\frac{\pi}{2},$$

即

$$T=\frac{2\left[\frac{\pi}{2}-(\omega t+\theta)\right]}{\omega}.$$

显然(2)的解 T 是依赖于 t 的,可见这个解不能作为周期,所以函数 $f(t)=\sin(\omega t+\theta)$ 的周期只能是 $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

例 9 函数

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}$$

是否为周期函数？

解 $f(x+T)-f(x)=\sin\dfrac{1}{x+T}-\sin\dfrac{1}{x}$

$$=-2\sin\frac{T}{2x(x+T)}\cos\frac{2x+T}{2x(x+T)}.$$

若 T 为周期，则应有

$$\sin\frac{T}{2x(x+T)}=0, \text{或} \cos\frac{2x+T}{2x(x+T)}=0,$$

由此得

$$\frac{T}{2x(x+T)}=\pi \text{ 或 } \frac{2x+T}{2x(x+T)}=\frac{\pi}{2}.$$

由此两式找不到不依赖于 x 的非零常数 T，所以

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}$$

不是周期函数。

小结 由上述两例可以看出，若 $y=f(x)$ 是三角函数，讨论其周期性时，通常可利用和差化积公式，将 $f(x+T)-f(x)=0$ 的左端分成几个简单三角函数的积，然后研究关于 T 的三角方程是否有非零常数解，以确定函数的周期性。

例 10 画出 $y=\arcsin\dfrac{1-x}{4}$ 的图形。

解 因 y 可以改写成 $y=-\arcsin\dfrac{x-1}{4}$。作图步骤如下：

1° 作 $y_1=\arcsin x$ 的图形(图 1-2 中①)；

2° 将第 1° 步作的图形①上点 (x, y)，变成点 $(4x, y)$，得 $y_2=\arcsin\dfrac{x}{4}$ 的图形(图 1-2 中②)；

3° 将 2° 中所得图形②向右平移一个单位，得

$$y_3=\arcsin\frac{x-1}{4}$$

的图形(图 1-2 中③)；

4° 将图形③上的点 (x, y)，变成 $(x, -y)$ 得

$$y=-\arcsin\frac{x-1}{4}$$

的图形。

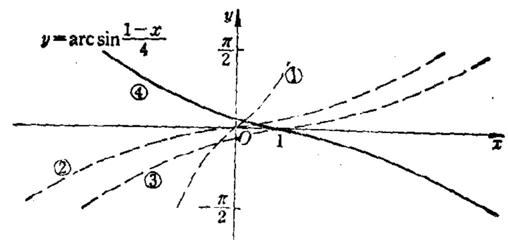


图 1-2

则图 1-2 中的④即为所求图形。

例 11 证明 $f(x)=\frac{\lg x}{x}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 与 $[1, +\infty)$ 上有界。

证明 因 $y=\lg x$ 与 $y=x$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单增，当 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时，有 $1\leqslant\frac{1}{x}\leqslant 2$, $\lg\frac{1}{2}\leqslant\lg x\leqslant\lg 1=0$, 注意到 $\lg x\leqslant 0$, 于是

$$2\lg\frac{1}{2}\leqslant 2\lg x\leqslant\frac{\lg x}{x}\leqslant\lg x\leqslant 0,$$

这就证明了 $f(x)=\frac{\lg x}{x}$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上有界， $-2\lg 2$ 与 0 分别是它的下界与上界。

对于 $x\in[1, +\infty)$, 必存在自然数 n, 使 $n<x<n+1$, 且有

$$10^x\geqslant 10^n=(1+9)^n>1+9n$$
$$>1+n>x$$

取对数得 $\lg x<x$, 即

$$\frac{\lg x}{x}<1.$$

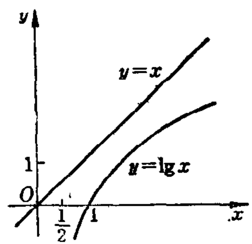


图 1-3

这又证明了 $f(x)=\frac{\lg x}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上有界，0 与 1 分别是其下界与上界。

从图 1-3 也容易看出上述结果是正确的。

例 12 某物质的质量如下分布在 x 轴上：在区间 $[0, 1]$ 上均匀分布 2 g，在点 $x=2$ 和 $x=3$ 上各集中分布 1 g，求质量分布函数 $m(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的解析表示式，并作其图形。

解 设 $m(x)$ 是开区间 $(-\infty, x)$ 上的质量，故当 $-\infty<x<0$ 时，$m(x)=0$; 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$m(x)=2x$; 当 $1<x\leqslant 2$ 时，$m(x)=2$; 当 $2<x\leqslant 3$ 时，$m(x)=3$; 当 $3<x<+\infty$ 时，$m(x)=4$。即

$$m(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x\leqslant 0;\\ 2x, & 0<x\leqslant 1;\\ 2, & 1<x\leqslant 2;\\ 3, & 2<x\leqslant 3;\\ 4, & 3<x<+\infty.\end{cases}$$

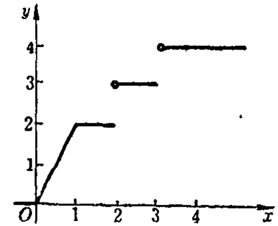


图 1-4

1.2 思考与操练题

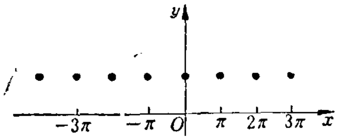
1. 用分析表达式给出的函数，其图形一定是连续曲线吗？试考察

(1) $y=\sqrt{\cos x-1}+4$;

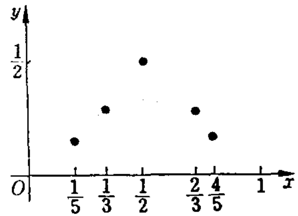
(2) 黎曼(Riemann)函数，定义域是 $[0, 1]$，f 是如下对应关系：

其实，函数(1)的图形是一串孤立的点$(2k\pi,4)$，$k\in Z$。

而函数(2)的图形，是一些不连贯的点，上边给出的是黎曼函数的示意图。



（第 1(1) 题）



（第 1(2) 题）

2. 下列各组中的函数是否相同？说明其理由。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q},\ p\text{ 与 }q\text{ 互质};\\ 0, & x\text{ 为无理数。}\end{cases}$$

A 组：$y=\dfrac{1}{2}x$，$s=\dfrac{1}{2}t$，$u=\dfrac{1}{2}v$，$x=\dfrac{1}{2}y$；

B 组：$y=\varphi(x)$，$s=\varphi(t)$，$u=\varphi(v)$，$x=\varphi(y)$。

3. 设当 $0<u<1$ 时函数 $f(u)$ 有意义，求下列函数的定义域：(1) $f(\sin x)$；(2) $f(\ln x)$；(3) $f\left(\dfrac{[x]}{x}\right)$。

4. 设 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n\text{ 次}}$，若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)$。

5. 试证两个偶(奇)函数的乘积是偶函数，一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数。

6. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 内的任何函数，证明 $F_1(x)\equiv f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$F_2(x)\equiv f(x)-f(-x)$ 是奇函数。写出对应于下列函数的 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$：

(1) $y=a^x$；　　(2) $y=(1+x)^n$。

7. 任何周期函数都有最小正周期吗？试以 $f(x)=3$ 及狄利克雷函数 $D(x)$ 为例，作出回答。

8. 试证两个有界函数之积为有界函数。二者之商是否有界？

9. 试求 $y=\sin^2 x$ 的反函数，並作图。若要求 x 与 y 一一对应，试把反函数分成单值支以满足该要求。

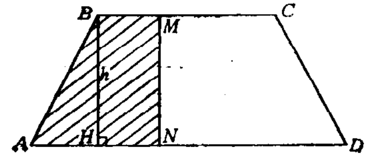
10. 求函数 $y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1;\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4;\\ 2^x, & 4<x<\infty\end{cases}$ 的反函数及定义域。

11. 试求函数 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x}{n^{x+1}-(n-1)^{x+1}}$（$x$ 取正整数）。

12. 作函数 $y=|1-x|-|1+x|$ 的图形。

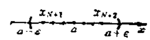
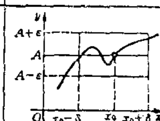
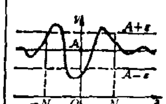
13. 在如图的等腰梯形 $ABCD$ 中，设底 $AD=a$，$BC=b$

$(a>b)$，高 $BH=h$，引直线 $MN \parallel BH$，N 与顶点 A 的距离 $AN=x$。试把图形 $ABMNA$ 的面积 S 表为变量 x 的函数，并作 $S=S(x)$ 的图形。



（第 13 题）

2. 极限

	定义	剖析	几何解释
数列极限	若 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N$(正整数), 使得当 $n>N$ 时, 有不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立, 则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或说 $\{x_n\}$ 收敛于 a. 记为 $x_n\to a$.	ε 是给的, N 是找的, 两个不等式的关系是: $\boxed{|x_n-a|<\varepsilon}$ 是上式成立的条件 是找 N 的根据 $\boxed{n>N}$	 x_N 后面的所有点 x_{N+1}, x_{N+2}, …都落在以 a 为中心、ε 为半径的开区间 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 之内.
函数极限	$x\to x_0$ 情形: 若 $\forall \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立, 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限, 记为 $f(x)\to A(x\to x_0)$.	ε 是给的, δ 是找的, 两个不等式的关系是: $\boxed{|f(x)-A|<\varepsilon}$ 是上式成立的条件 是找 δ 的根据 $\boxed{0<|x-x_0|<\delta}$	 当 $x(\neq x_0)$ 落在 x_0 点的 δ 邻域时, 曲线 $f(x)$ 夹在两直线 $y=A\pm\varepsilon$ 间.
	$x\to\infty$ 情形: 若 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N>0$, 使当 $|x|>N$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立, 则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.	ε 是给的, N 是找的, 两个不等式的关系是: $\boxed{|f(x)-A|<\varepsilon}$ 是上式成立的条件 是找 N 的根据 $\boxed{|x|>N}$ $\Updownarrow$ $x<-N$ 或 $x>N$	 当 $|x|>N$ 时, 曲线 $f(x)$ 夹在两直线 $y=A\pm\varepsilon$ 之间.

左右极限	若 $\forall \varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使当 $0<x-a<\delta$ (或 $-\delta<x-a<0$) 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立, 则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0+0$ (或 $x\to x_0-0$) 时有右(左)极限, 记为 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$ (或 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$) 简记为 $f(x_0+0)=A$ (或 $f(x_0-0)=A$)

极限存在的充要条件	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0+0)=f(x_0-0)=A$

无穷大	若 $\forall M>0$, $\exists\delta$(或 N)>0, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ (或 $|x|>N$) 时, 有 $|f(x)|>M$, 则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$) 时的无穷大.

无穷小	当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$) 时, $\lim f(x)=0$, 则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ (或 $x\to\infty$) 时的无穷小.

无穷小性质(x 变化过程相同)	简例
1. 若 $f(x)(\neq 0)$ 为无穷小(大), 则 $1/f(x)$ 为无穷大(小)。	$x\to 0$ 时, $\operatorname{tg} x\to 0$, $\operatorname{ctg} x\to\infty$.
2. $\lim f(x)=A \Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha$ (α 为无穷小).	$\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)=2 \Leftrightarrow 3x-1=2+(3x-3)$.
3. 有限个无穷小的和是无穷小.	当 $x\to 0$ 时, 有 $x+\sin x\to 0$;
4. 有界函数与无穷小的积是无穷小; 推论: 常数与无穷小的积是无穷小; 有限个无穷小的积是无穷小.	$x\sin x\to 0$.
5. 以极限不为零的函数除无穷小所得的商是无穷小.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^{x}}=0$.

判定极限存在的准则

	判定极限存在的准则
Ⅰ	设 1° 对于点 x_0 的某邻域内的一切 x $(\neq x_0)$ 或绝对值大于某一正数的 x，有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 成立；2° $\lim g(x)=A$，$\lim h(x)=A$，则 $\lim f(x)=A$，称为两边夹法则。
Ⅱ	设单调函数（单增或单减）是有界的，则必趋向一个极限。

注：上述二个准则对数列也成立。

两个重要极限公式

	两个重要极限公式	说明
(1)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，或 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$.	公式的模式是：$\sin(\cdots)/(\cdots)$，只要括弧内式子相同且趋于零，则它必趋于极限 1.
(2)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$，或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.	公式的模式是：$[1+(\cdots)]^{1/(\cdots)}$ 型，当括弧内式子相同且 $\to 0$，则它必 $\to e$.

唯一性	若数列（或函数）有极限，则极限是唯一的。

求极限的常用方法

1. 在函数定义域内求极限，代入法。例 $\lim\limits_{x\to 0}(e^{-x}+\sin\frac{x}{4}+2)=3$.
2. 消去零因子法。例 $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x^2+p^2}-p)/(\sqrt{x^2+q}-q)$ $=q/p\ (p>0,\ q>0)$.
3. 用两个重要极限公式。
4. 用左右极限求极限，或用左右极限证明极限不存在。
5. 用等价无穷小求极限。例 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{tg}\,x/(e^x-1)=\lim\limits_{x\to 0}x/x=1$.
6. 用两边夹法则求极限。
7. 用单调有界函数必有极限准则。
8. 先将有限项和相加，而后求极限。
9. 用变量代换法求极限。
10. 用洛必达法则、泰勒公式、定积分概念求极限，见第 5、8 章。

无穷小的比较

无穷小的比较	简例
设 α 和 β 为 x 的函数且都为无穷小，并设 $\lim\alpha/\beta=k$.	下设 $x\to 0$.
1. 若 $k=0$，则称 α 是比 β 较高阶的无穷小，记为 $\alpha=o(\beta)$. 此时也可称 β 是比 α 较低阶的无穷小。	1. 因 $3x^2/x\to 0$，故 $3x^2=o(x)$；
2. 若 $k\neq 0$，则称 α 与 β 是同阶无穷小。	2. 因 $\sin x/x\to 1$ 故 $\sin x\sim x$，且 $\sin x$ 与 $3x$ 同阶；
3. 若 $k=1$，则称 α 与 β 是等价无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.	3. $(1-\cos x)/x^2\to 1/2$，故 $1-\cos x$ 是 x 的二阶无穷小。
4. 若 β 与 α^n 是同阶无穷小，则称 β 是 α 的 n 阶无穷小。	4. x 是 $\sin x$ 的主部。
5. 若 $\beta=\alpha+o(\alpha)$，则称 α 是 β 的主部。	

等价无穷小及其性质

下设 $x\to 0$，有

1. $\sin x\sim x$；
2. $\mathrm{tg}\,x\sim x$；
3. $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$；
4. $\sqrt[n]{1+x}\sim 1+\dfrac{x}{n}$；
5. $\ln(1+x)\sim x$；
6. 若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，则 $\lim\alpha/\beta=\lim\alpha'/\beta'$

极限的性质

设 $f(x)\to A$，$g(x)\to B\neq 0$，则 1° $f(x)\pm g(x)\to A\pm B$；2° $f(x)\cdot g(x)\to AB$；3° $f(x)/g(x)\to A/B$；4° 若 $A>0$，则必 $\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$；5° 若 $f(x)\geqslant 0$，则 $A\geqslant 0$.

2.1 典型例题分析

2.1.1 根据极限定义证明极限的存在

例 1 证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{5n+2}=\frac{2}{5}$；

(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$。

(1) **分析** 因 $\left|\frac{2n-1}{5n+2}-\frac{2}{5}\right|=\left|\frac{-9}{5(5n+2)}\right|<\frac{9}{25n}$，$\forall\varepsilon>0$，要使 $\frac{9}{25n}<\varepsilon$，只需 $n>\frac{9}{25\varepsilon}$. 故取 $N=\left[\frac{9}{25\varepsilon}\right]$ 即可.

证明 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{9}{25\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，总有

$$\left|\frac{2n-1}{5n+2}-\frac{2}{5}\right|<\frac{9}{25n}<\frac{9}{25\cdot\frac{9}{25\varepsilon}}=\varepsilon \text{ 成立,}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{5n+2}=\frac{2}{5}$.

(2) **分析** 因 $\left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right|=|x^2+x+1-3|$

$=|x-1||x+2|$ ($x\neq1$ 时),

又因 $x\to1$，故设 $0<|x-1|<1$，取 $\delta_1=1$，有

$$|x-1||x+2|<4|x-1|.$$

故欲使 $|x-1||x+2|<\varepsilon$，只需 $4|x-1|<\varepsilon$，$|x-1|<\frac{\varepsilon}{4}$ 即可.取

$$\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{4},1\right).$$

证明 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{4},1\right)$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right|=|x-1||x+2|<4|x-1|<\varepsilon$$

成立，即 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$.

2.1.2 利用重要极限公式求极限

例 2 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]$.

解 因

$$\operatorname{tg}2x=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\operatorname{ctg}2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)},$$

故

$$\text{原式}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\operatorname{tg}2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{2\operatorname{tg}2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\cdot\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$。

解 ∵ $\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$，令 $y=\frac{x-1}{2}$，则当 $x\to\infty$ 时，有 $y\to\infty$。

∴ 原式 $=\lim\limits_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^2\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right)=e^2\cdot 1=e^2$。

注 常用的已知极限有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k;\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0.$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$。

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}}{\cos 2x}\right)^{\frac{\cos 2x}{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}}\cdot\frac{2\sin\frac{x}{2}}{x}\cdot\frac{\sin\frac{3x}{2}}{x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}}$$

$$=e^{1\cdot\frac{3}{2}\cdot 1}=e^{\frac{3}{2}}.$$

2.1.3 利用左右极限证明极限的存在性

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & \text{当 } x<0;\\ a+x, & \text{当 } x\geqslant 0.\end{cases}$

问 a 为何值时 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，又 a 为哪些值时此极限不存在。

解 因 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^x=1$,

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

故当左右极限相等，即 $a=1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$。

当 $a\neq 1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在，因此时左右极限不相等。

2·1·4 利用等价无穷小求极限

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\ln(1+x)}$。

解 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$，$\ln(1+x)\sim x$。

所以 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{x}=\frac{1}{2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}$。

注 当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时，分子分母都是无穷小，可考虑用各自的等价无穷小代换后求极限，必须注意是商的形式才可以相互

代替。

2.1.5 利用"两边夹"法则求极限

例 7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$，$a_i\geqslant 0$。

解 令 $\max[a_1, a_2, \cdots a_k]=A$，则

$$A\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}\leqslant\sqrt[n]{k}\,A$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}[a_i]$。

作为特例，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+100^n}=100;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^{-n}+\cdots+10^{-n}}=1.$$

例 8 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[\dfrac{1}{(n^2+1)^2}+\dfrac{2}{(n^2+2)^2}+\cdots+\dfrac{n}{(n^2+n)^2}\right]$。

解 $\because$

$$\frac{n^2(1+2+\cdots+n)}{(n^2+n)^2}<n^2\left[\frac{1}{(n^2+1)^2}+\frac{2}{(n^2+1)^2}+\cdots+\frac{n}{(n^2+n)^2}\right]<\frac{n^2(1+2+\cdots+n)}{(n^2+1)^2},$$

将 $1+2+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ 代入上式，可得

$$\frac{n^2\cdot n(n+1)/2}{n^2(n+1)^2}<n^2\left[\frac{1}{(n^2+1)^2}+\frac{2}{(n^2+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n^2+n)^2}\right]<\frac{n^2\cdot n(n+1)^2}{(n^2+1)^2}.$$

不等式左边的极限为 $\dfrac{1}{2}$，不等式右边的极限也为 $\dfrac{1}{2}$。

$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}n^2\left[\frac{1}{(n^2+1)^2}+\frac{2}{(n^2+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n^2+n)^2}\right]=\frac{1}{2}.$$

小结 欲用"两边夹"法则求极限，需对要求极限的数列的一般项 x_n，同时适当放大与缩小，得数列 z_n 与 y_n，使 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 y_n 与 z_n 有相同的极限。

2.1.6 利用单调有界数列的性质求极限

单调有界数列必有极限，这既是极限存在的判别法，又是求极限的一个方法。

例 9 设 $\{x_n\}=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}}_{n\text{个根式}}$ $(a>0)$

试证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值。

证明 1° 单调性 $\because$ $x_1=\sqrt{a}>0$,

$$x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\quad\because\quad x_2>x_1,$$

若 $x_k>x_{k-1}$ 成立，则 $x_k+a>x_{k-1}+a$，且

$$\sqrt{x_k+a}>\sqrt{x_{k-1}+a},$$

即 $x_{k+1}>x_k$，可知数列 $\{x_n\}$ 单增。

2° 有界性　$\because$　x_n单增，$\therefore$　$\dfrac{x_{n-1}}{x_n}<1$。又

$\because$　$x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$，$x_n^2=a+x_{n-1}$，

$\therefore$　$x_n=\dfrac{a}{x_n}+\dfrac{x_{n-1}}{x_n}<\dfrac{a}{\sqrt{a}}+1=\sqrt{a}+1$，

即　数列$\{x_n\}$有界。

综上所述，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$。

由 $x_n^2=a+x_{n-1}$，取 $n\to\infty$ 时的极限，得

$$\lim_{n\to\infty}x_n^2=a+\lim_{n\to\infty}x_{n-1},$$

$$A^2=a+A，\text{即 } A^2-A-a=0。$$

解得
$$A_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a}),$$

$$A_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4a})\text{（不合题意，舍去。）}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}+\cdots}}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a}).$$

注　这里所求的极限值是某方程的根，有人称此为“解方程法”求极限.

例 10　设 $\{x_n\}=\{\dfrac{2^n}{n!}\}$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值。

证明　1° 单调性　因

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}=\frac{2}{n+1}\leqslant 1,$$

故 $x_{n+1}\leqslant x_n(n=1,2,\cdots)$，即数列 x_n 单调减少。

2° 有界性　因 $\dfrac{2^n}{n!}>0$，故数列 x_n 有下界。

由上知，数列 x_n 单调减少有下界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在。

设　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=A$，由 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{2}{n+1}$，得

$$x_{n+1}=\frac{2}{n+1}\cdot x_n.$$

令 $n\to\infty$，上式两边取极限，便有

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}x_n,$$

即
$$A=0\cdot A,$$

于是　$A=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

2.1.7　有限项之和求极限

有些函数本身是有限项数项级数，必须先求其和，而后再求极限。

例 11　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{2+4+\cdots+2n}$.

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}(1+2n-1)n}{\frac{1}{2}(2+2n)n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}=1.$$

例 12 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

解 设 $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

例 13 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

解 设 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$ (1)

则 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$ (2)

(1) - (2)得

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

故 $$S_n=1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}$$

$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n}{2^n}-\frac{1}{2^n}.$$

当 $n\to\infty$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1+2-0-0=3$.

例 14 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2})$.

解 设

$$S_n=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}\cdot\cdots\cdot 2^{\frac{1}{2^n}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}},$$

故

$$原式=\lim_{n\to\infty}S_n=2^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}=2^1=2.$$

2.1.8 作变量代换求极限

例 15 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{q}{p}}-1\right]$ (p, q为正整数).

解 令 $\sqrt[p]{1+\frac{1}{n}}-1=x$，即 $n=\frac{1}{(1+x)^p-1}$，且当 $n\to\infty$ 时，$x\to 0$. 故

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{q}{p}}-1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^q-1}{(1+x)^p-1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{qx + \frac{q(q-1)}{2!}x^2 + \cdots + x^q}{px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots + x^p} = \frac{q}{p}.$$

例 16 求 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}$.

解 1 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\beta x}[e^{(\alpha-\beta)x} - 1)}{x}$

$$= \lim_{z\to 0} e^{\frac{\beta z}{\alpha-\beta}} \cdot (\alpha-\beta) \cdot \frac{e^z - 1}{z}$$

$(令(\alpha-\beta)x = z)$

$$= (\alpha-\beta) \cdot \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z}$$

$$= (\alpha-\beta) \cdot \lim_{z\to 0} \frac{z}{z} = \alpha - \beta.$$

解 2 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^{\alpha x} - 1) - (e^{\beta x} - 1)}{x}$

因当 $x\to 0$ 时，$e^{\alpha x} - 1 \sim \alpha x$，$e^{\beta x} - 1 \sim \beta x$，故有

$$原式 = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - 1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{e^{\beta x} \quad 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{\beta x}{x} = \alpha - \beta.$$

例 17 求 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

解 原式 $= \lim\limits_{t\to 1} \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1}$ $(令\sqrt[6]{x} = t)$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{(t+1)(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{2}{3}.$$

2.1.9 杂题

例 18 试求函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$ $(x\geqslant 0)$，并求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$1 \leqslant \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \leqslant \sqrt[n]{3},$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$，由两边夹法则，得

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = 1.$$

当 $1 < x \leqslant 2$ 时，得

$$f(x) = x \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^n + 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n} = x.$$

当 $x > 2$ 时，得

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n + \left(\frac{2}{x}\right)^n + 1}$$

$$= \frac{x^2}{2}.$$