現代數學

下册

鄭肇楨 著

商務印書館

現代數學（下）
著　者——鄭肇楨
出版者——商務印書館香港分館
香港皇后大道中35號
印刷者——中華商務聯合印刷(香港)有限公司
香港九龍炮仗街75號
版　次——1976年9月初版
1982年3月重印

ISBN 962 07 2034 2

序

數學是由於生活上的實際需要而產生的。它隨着人類文明進步與生產發展而逐步積累與豐富起來，至今已發展成爲一門極爲龐大而包含衆多分支的學問。它一如其他科學一般是由觀察與理解自然的規律總結而來，故此，它一方面是具有抽象的特質，而另方面却又反映了具體的現實。這是因爲自然的規律，並不僅是偶然而個別地獨立出現，它往往存在於許多不同的事象中，卽管它們在表面上顯得毫無關係。因此要從不同的事物中抽取了相同的規律，這就是一般數學產生的歷程。這一種抽取是包括了捨棄只屬於個別事物的特殊性，而提煉出屬於整羣所研究的事物的共有性質。故此數學性質便是概括了的某一類對象的性質。這亦說明了數學爲什麽具有高度的抽象性，因爲如非抽象就不能從個別性質昇華達於羣體的一般性。

例如我們知道 3 個蘋果再加 4 個蘋果便是 7 個蘋果；3 隻狗再來 4 隻狗便是 7 隻狗。這兩件原是不同的事象，但是它們却有相同的結果 $3+4=7$。當我們用 $3+4=7$ 來表達這種關係的時候，這個別的獨立事象便被提升到抽象的層面上去了。在這個層面上“狗”和“蘋果”都不再是考慮的對象，因爲我們關心的只是“3”，“4”，“7”這三個純量彼此的關係，而這一個關係却不局限於對何種實物而言，因它是普遍地存在於千千萬萬的現實事象中。由此可見數學本身的抽象性，並不是使它脫離了現實而浮於虛幻。事實上，它的抽象性反而使它更具現實的意義，這是由於這種性質原是從現實概括而來。

在初等數學裏，數學所作出的抽象化是旣有限而又初步的。故在此範圍內所涉及的數學性質，幾乎直接地與熟知的生活具體地聯系起來。如算術運算，幾何特性，它們雖

則捨棄了若干現實對象的性質，但量的關係，空間的形式，大小都直接給保留了下來，故此學習這些性質，並不會使人覺得抽象難懂，因爲它們和現實只是相隔一線而已，是容易走回現實的物理世界中尋得驗證。然而，在步入二十世紀後，隨着其他科學突飛猛進，數學更以較高的速度着着領前。配合着科技應用與理論探求，它相應地在各方面作出了更深入與廣泛的探討。這一個結果就是使數學提升到一個更高的理論層面上去。如複數，泛函，n 維空間等，好像是一層比一層高，一層比一層抽象。由此而來的高度抽象，使它們在表面上與現實生活好像完全脫節。也是由於這種程度的抽象，使學習產生了困難。

要克服這種困難及正確地了解抽象數學的本質，是應該把它們從像是神聖不可攀及的壇上取下來，放在現實的物理世界中，在這一個範疇下來審視它。當我們面對面地和這些“還原”了及“還俗”了的事理摸觸過之後，我們才去剝掉它們的表皮，再慢慢來端詳它的抽象結構不遲。這樣的一個步驟，是可以加深我們對數學的認識，認識它如何從現實中來，經過概念化與理論化後，又回復到生活實踐中去。

這就是作者所相信，相信經過若干程度的實踐，才可了解抽象的理論，由此信念而產生的本書，自然是朝着這一路徑而走的。在透過了具體事例的考察，嘗試，實驗性的探討從而作出概括與結論。雖然這一方法可能使本書犯上不夠“嚴謹”甚或至於“非數學化”的毛病，不過在初步介紹一門學科時，實在是不必急於求其完美。因爲無瑕的完美，總是出現在徹底的頓悟之後。

一九七五年夏　　鄭肇楨

目 錄

7 關係

關係

給出兩集 A 和 B ，並指定它們的元有如下的配對：

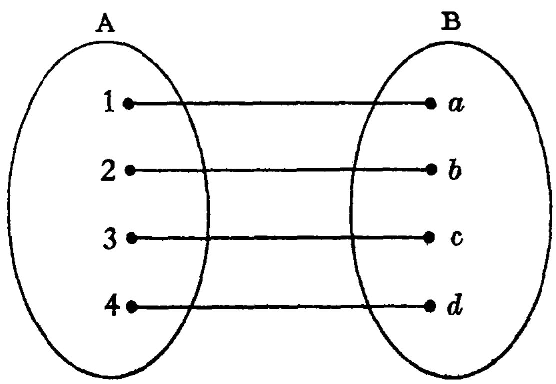

圖 7・1

對於兩集 A, B 所指定的配對，稱爲由 A 集到 B 集的**關係** (Relation)。

這裏 A 的 1 和 B 的 a 建立起關係，記爲 $1\ \mathbf{R}\ a$ ；

A 的 2 和 B 的 b 建立起關係，記爲 $2\ \mathbf{R}\ b$ ，

同樣有　$3\ \mathbf{R}\ c$ ，$4\ \mathbf{R}\ d$ 。

兩個沒有關係的元，可用 $\not\mathbf{R}$ 表示。

如　$1\ \not\mathbf{R}\ b$, $2\ \not\mathbf{R}\ a$, $3\ \not\mathbf{R}\ d$　等等。

若 $\mathbf{R}$ 爲由集 X 到集 Y 的一關係，則對於任意 $x \in X$, $y \in Y$ 都只能有下列情況之一：

(1)“x 與 y 有關係”，即 $x\,\mathbf{R}\,y$ 。

(2)“x 與 y 無關係”，即 $x\,\not\mathbf{R}\,y$ 。

設有下列的關係：

“甲是A的老師也是B的老師 ，但不是C的老師 ；乙只是B的老師 ；丙只是B，C的老師”

這一個關係“x 是 y 的老師”可寫爲 $x\,\mathbf{R}\,y$ 。

老師集和學生集分別是：

$$T = \{\,甲, 乙, 丙\,\}$$

$$S = \{\,A, B, C\,\}$$

所以有　甲$\mathbf{R}$A，甲$\mathbf{R}$B，甲$\not\mathbf{R}$C，

乙$\not\mathbf{R}$A，乙$\mathbf{R}$B，乙$\not\mathbf{R}$C，

丙$\not\mathbf{R}$A，丙$\mathbf{R}$B，丙$\mathbf{R}$C。

用溫氏圖表示出來便有：

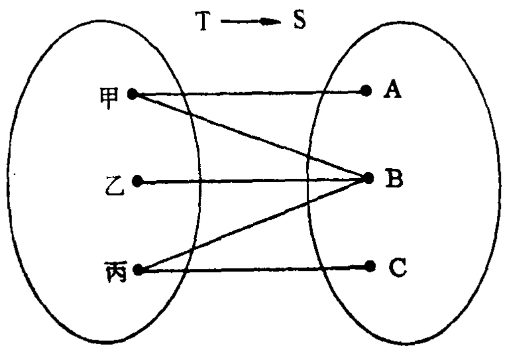

圖 7・2

例 1. 這裏有一個關係 $\mathbf{R}$

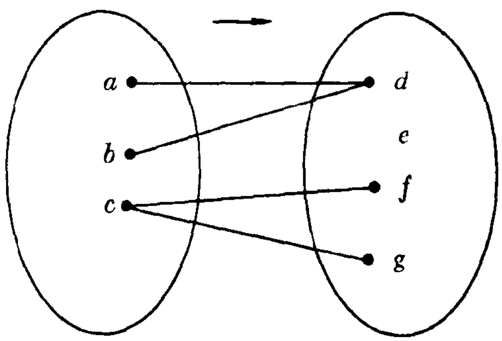

圖 7・3

$\mathbf{R}$所建立的關係是　$a\,\mathbf{R}\,d$，$b\,\mathbf{R}\,d$，$c\,\mathbf{R}\,f$　和　$c\,\mathbf{R}\,g$。

由X到Y的關係$\mathbf{R}$，亦可用序偶$(x,\ y)$，$x \in X$，$y \in Y$ 來表示。以$\mathbf{R}$集代表有關係的序偶，則$\mathbf{R}$集顯然是X，Y集的積集的一個子集，所以　$\mathbf{R} \subset X \times Y$。

$$\mathbf{R} = \{(x, y),\ x\,\mathbf{R}\,y,\ x \in X,\ y \in Y\}$$

如例 1 的 $a\mathbf{R}d$, $b\mathbf{R}d$, $c\mathbf{R}f$, $c\mathbf{R}g$ 便可寫作 $(a, d), (b, d), (c, f), (c, g)$。老師和學生的集的關係可寫作

$$\mathbf{R}=\{(甲, A), (甲, B), (乙, B), (丙, B), (丙, C)\}$$

本章開始的第一個例的關係便可寫作

$$\mathbf{R}=\{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$$

例 2. 以 $x\mathbf{R}y$ 代表"x 大於 y"

$$A=\{1, 2, 3, 4\}$$

$$B=\{1, 3, 5\}$$

則由 A 至 B 的關係有

$$\{(2,1), (3,1), (4,1), (4,3)\}$$

而由 B 至 A 的關係有

$$\{(3,1), (3,2), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\}$$

一般來說由 A 至 B 的關係是有別於由 B 至 A 的關係的。

若 $\mathbf{R}$ 爲由 A 至 B 的關係，而 B 集又與 A 集相等，則 $\mathbf{R}$ 便可說是 A 集中的關係，卽

$$\mathbf{R}: A \to A。$$

例 3. 若 $\mathbf{R}$："小於"是在下列 A 集中的關係。

且 $A=\{0,1,2,3\}$，

則 $\mathbf{R}=\{(0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,3)\}$

關係的圖像

由 A 集到 B 集的關係 $\mathbf{R}$ 是可以用圖像表示出來的。以橫軸上某些點代表 A 的元，縱軸上某些點代表 B 的元，分別過這些點作兩組平行線，則它們的交點代表了 $A\times B$ 的元。在 $A\times B$ 中記出所有點 (a, b)，此處 $a\mathbf{R}b$，則點集

$$\mathbf{R}=\{(a, b), a\mathbf{R}b\}$$

便是關係 $\mathbf{R}$ 的圖像。

例如：

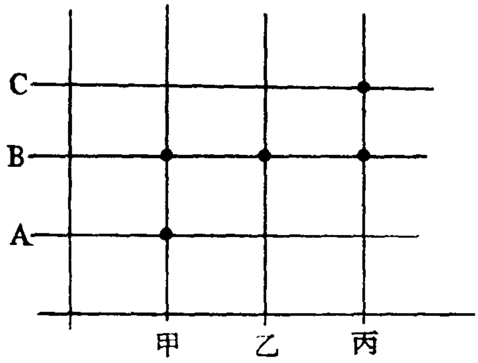

圖 7・4

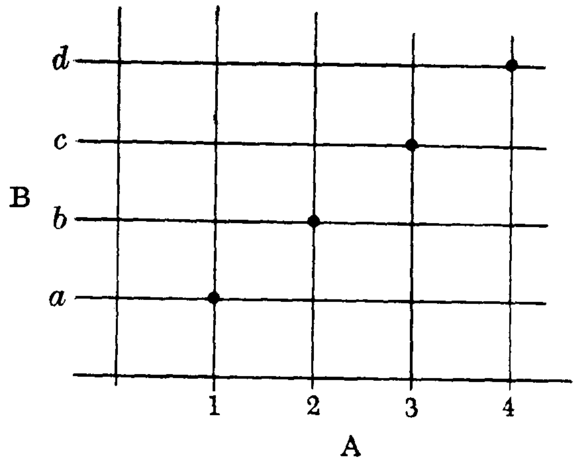

圖 7・5

例 2 的圖像如下：

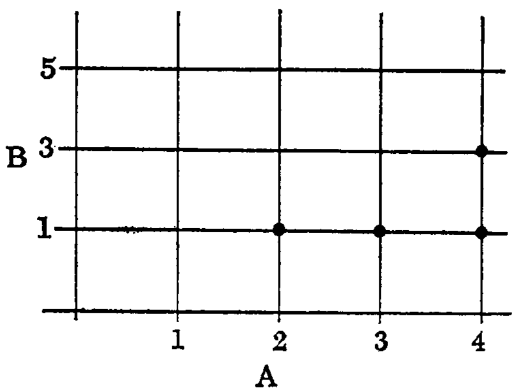

圖 7・6

R： A→B

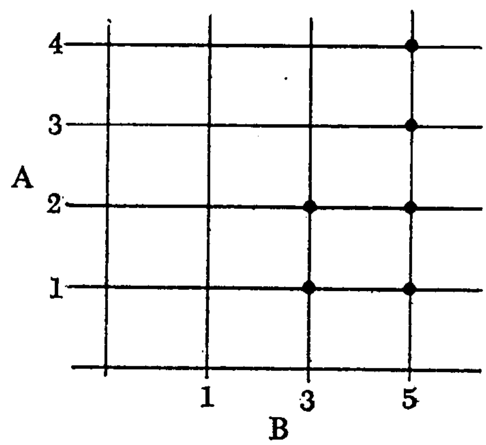

圖 7・7

R： B→A

例 3 的圖像是：

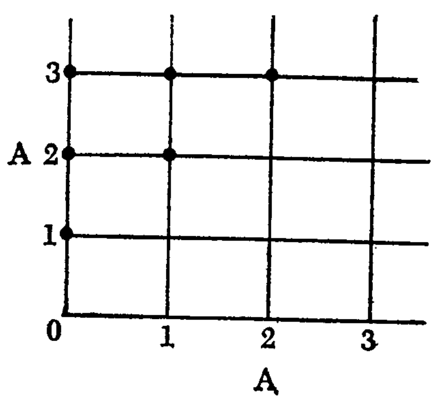

圖 7・8

例 4. E＝{1,2,3,4,5,6}，
R 爲在 E 中的關係
且 a **R** b 爲“a 與 b 之和爲偶數”。
R 的圖像便是：

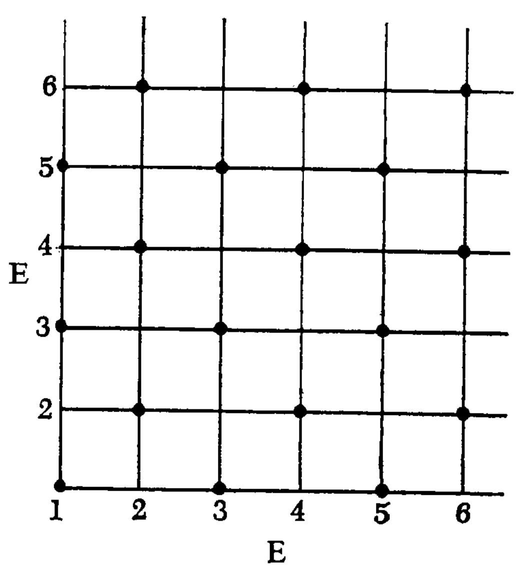

圖 7・9

例 5. E＝{ x ： x 爲整數， $|x|\leqq 10$}

R爲在 E 中的關係：“ $|x|+|y|\leqq 10$ 爲 5 的倍數”。

則**R**的圖像爲

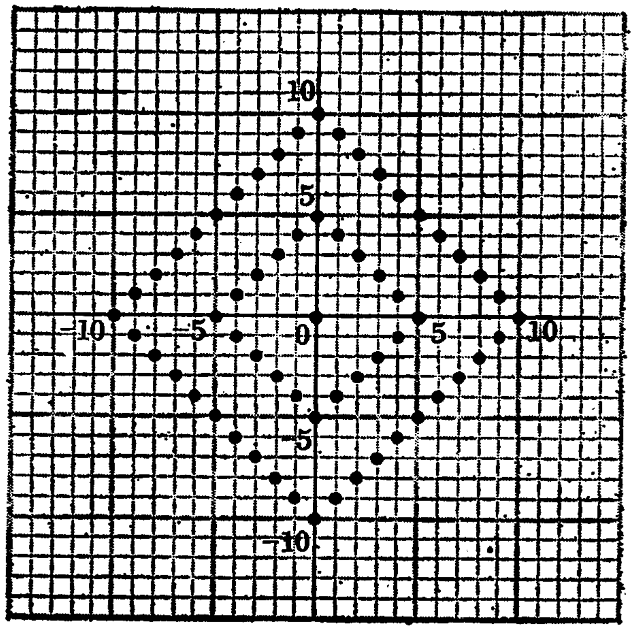

圖 7・10

逆關係

若**R**爲由 A 到 B 的關係，則 $\mathbf{R}^{-1}$ 便是由 B 到 A 的關係，且 $\mathbf{R}^{-1}$ 包含所有**R**中序偶的逆序序偶。

即 $\mathbf{R}^{-1}=\{(y,x),\ x\mathbf{R}y\}$

$\mathbf{R}^{-1}$ 稱爲**R**的**逆關係** (Inverse relation)。

例如 $\mathbf{R}=\{(a,1),(b,3),(c,4)\}$

$\mathbf{R}^{-1}=\{(1,a),(3,b),(4,c)\}$

例 3 中的 $\mathbf{R}=\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,3)\}$

則 $\mathbf{R}^{-1}=\{(1,0),(2,0),(3,0),(2,1),(3,1),(3,2)\}$

R是“ x 小於 y ”，故 $\mathbf{R}^{-1}$ 便是“ x 大於 y ”。

如**R**是關係：“ x 是 y 的父親”

則 $\mathbf{R}^{-1}$ 便是關係：“ x 是 y 的子女”

如**R**是關係：“ $x\geqq y$ ”

則 $\mathbf{R}^{-1}$ 便是關係：“ $x\leqq y$ ”

等價關係

考慮下列三個關係

"相等"

"同學"

"大於"

若以**R**代表"相等"，並且**R**是在集 A＝{1,2,3,4,5} 中的關係，則因 1＝1,2＝2,3＝3,4＝4,5＝5 便有

$1 \mathbf{R} 1$

$2 \mathbf{R} 2$

$3 \mathbf{R} 3$

$4 \mathbf{R} 4$

$5 \mathbf{R} 5$

這裏在 A 中的每一個元 a 都和自身有關係，可寫作

$$\forall a \in A,\ a \mathbf{R} a$$

Ⅰ. 一個在 A 中的關係**R**，若 $\forall a \in A$ 都有 $a \mathbf{R} a$，則**R**便稱爲**自反性**（Reflexivity）的關係。

若以**R**爲"大於"的關係，在這A集中是不可能有"a 大於 a"的關係的。故此"大於"在A中不具有自反性。

現在我們考慮第二個關係"同學"。譬如說：

"甲是乙的同學"	寫作	甲**R**乙
"小明是志華的同學"	寫作	小明**R**志華
"a 是 b 的同學"	寫作	$a \mathbf{R} b$

同樣也可以說：

"乙是甲的同學"	乙**R**甲
"志華是小明的同學"	志華**R**小明
"b 是 a 的同學"	$b \mathbf{R} a$

這裏可以看見滿足這關係的兩元的地位是可以互調的。即當 $a \mathbf{R} b$ 爲眞時即有 $b \mathbf{R} a$ 爲眞。

由這事實我們得出一個關係的性質：

Ⅱ. 若**R**爲在 A 中的關係，且 $a \mathbf{R} b \Longrightarrow b \mathbf{R} a$，則**R**便稱爲一個**對稱性**（Symmetry）的關係。

"同學"的關係是一個對稱性的關係，但是"父親"的關係却不是對稱性的。因爲如果"甲是乙的父親"，則不可能"乙是甲的父親"。同樣"大於"也不是對稱性的關係，因爲 $a > b$ 不能引出 $b > a$。

不過“大於”這一個關係，却有另外的一種性質。先看一個數集E，設 a，b，$c \in E$，且知 $a>b$，及 $b>c$ 則我們可決定 $a>c$。以**R**代表“$>$”以上可寫作 $a\mathbf{R}b$ 及 $b\mathbf{R}c$，由此導出 $a\mathbf{R}c$。故此

Ⅲ. 當**R**是在集E中的關係，而

$$a\mathbf{R}b \text{ 及 } b\mathbf{R}c \Longrightarrow a\mathbf{R}c$$

則**R**便稱爲在E中的一個**傳遞性** (Transitive) 關係。

容易看出“相似”，“相等”，“小於”都是傳遞性的關係。

例 1. 甲是乙的朋友。

2. △ABC相似於△DEF。

3. 點C在點D的旁邊。

4. x 和 y 是姊妹。

5. 甲和乙握手。

以上的關係都是具有對稱性的。

6. x 和 y 的高度相等。

7. x 不大於 y。

8. x 整除 y 的平方。

以上的關係都具有自反性的，因爲“x 和 x 的高度相等”，“x 不大於 x”和“x 整除 x^2”都是對的。

9. x 比 y 重，y 比 z 重，所以 x 比 z 重。

10. 牛肉比豬肉貴，豬肉比菜貴，所以牛肉比菜貴。

11. A是B的子集，B是C的子集，所以A是C的子集。

12. 3可以整除12，12可以整除60，所以3可以整除60。

以上的關係都具有傳遞性。

一個關係若同時爲自反，對稱及傳遞，則它便是一個**等價關係** (Equivalence relation)。

上面所舉的例，其中有些同時滿足兩種性質，亦有些同時滿足三種性質。滿足三種性質的都是等價關係。例如三角形的相似便是一個等價關係。因爲每一個三角形都與本身相似，故它具有自反性。又若△ABC相似於△DEF，則△DEF亦相似於△ABC，故相似必具有對稱性。最後若△1相似於△2，△2相似於△3，則△1必相似於△3。故“相似”是一個具有傳遞性的關係，由此可知“相似”是一個等價關係。

上面的例6的關係“高度相等”也由於同時滿足自反，對稱及傳遞性而構成一等價關係。

下面各例的關係都具有自反性，試觀察它們的圖像。

1. **R**：E → E，E ＝{1,2,3,4}

x **R** y 是"$x = y$"

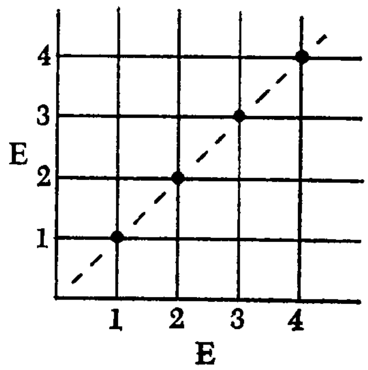

圖 7・11

2. **R**：E → E，E ＝{1,2,3,4,5,6,7,8}

x **R** y 是"x 整除 y"

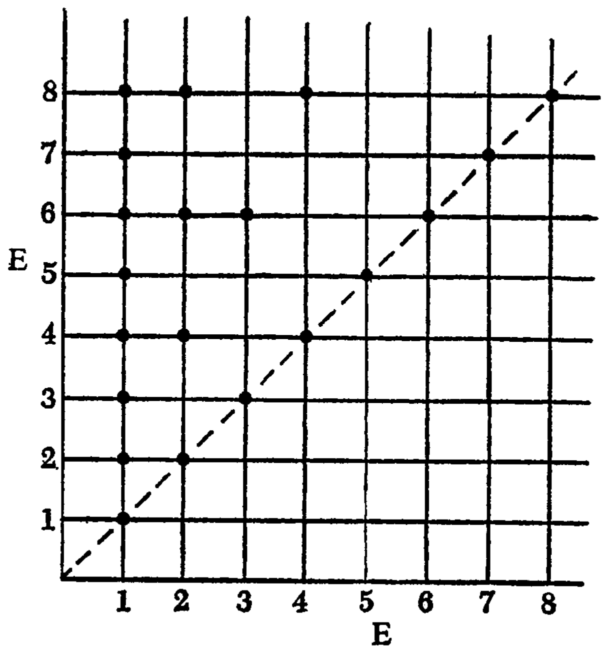

圖 7・12

從以上二圖可見具有自反性的圖像，都是包含了全部主對角線上的格點的。

一個具有對稱性的關係的圖像，必然是對稱於主對角線 $x = y$ 的。因爲如果**R**包含了點（a，b），則**R**亦包含了點（b，a）。

以下是一個具有對稱性關係的圖像。

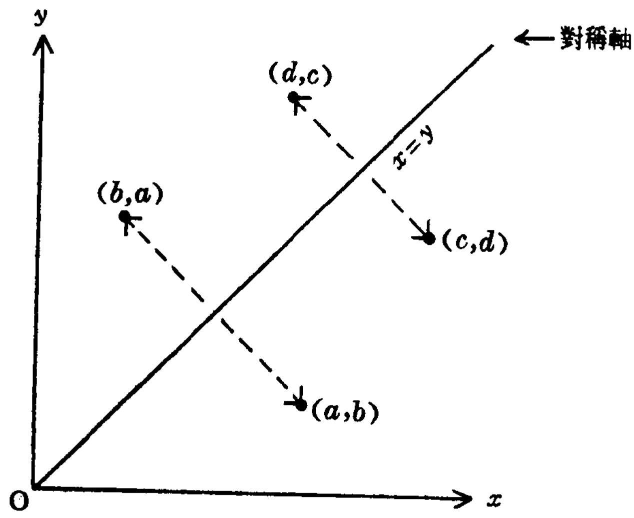

圖 7・13

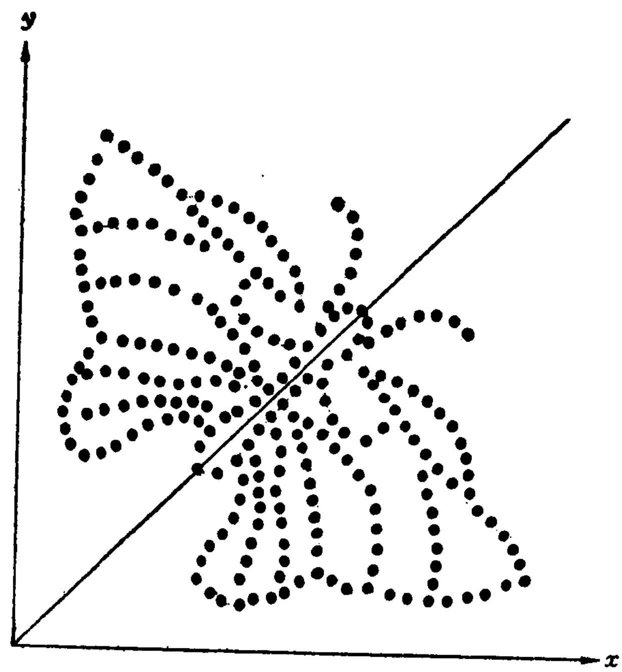

圖 7・14

習 題 7・1

1. 以世界上所有人爲一集，考慮在此集中的關係。

$x\,\mathbf{R}_1\,y$："x是y的後代"。

$x\,\mathbf{R}_2\,y$："x比y年青"。

$x\,\mathbf{R}_3\,y$："x與y住在同一大廈"。

$x\,\mathbf{R}_4\,y$："x是y的表親"。

$x\,\mathbf{R}_5\,y$："x與y有相同的膚色"。

$x\,\mathbf{R}_6\,y$："x比y爲高"。

$x\,\mathbf{R}_7\,y$："x是y的鄰居"。

$x\,\mathbf{R}_8\,y$："x與y住在同一城市"。

$x\,\mathbf{R}_9\,y$："x是y的朋友"。

$x\,\mathbf{R}_{10}\,y$："x不比y窮"。

把以上各關係的性質塡在下表。

性　質	$\mathbf{R}_1$	$\mathbf{R}_2$	$\mathbf{R}_3$	$\mathbf{R}_4$	$\mathbf{R}_5$	$\mathbf{R}_6$	$\mathbf{R}_7$	$\mathbf{R}_8$	$\mathbf{R}_9$	$\mathbf{R}_{10}$
自　反										
對　稱										
傳　遞										
等　價										

2. 設集 $E=\{0,1,2,3,4,5\}$，$(a,b)\in E\times E$，指出下列各關係的性質。

   $\mathbf{R}_1$：$a>b$

   $\mathbf{R}_2$：$a-b\geqq 0$

   $\mathbf{R}_3$：$a-b>1$

   $\mathbf{R}_4$：$(a-b)(a-1)(b-1)=0$

   $\mathbf{R}_5$：$|a-b|<3$

   $\mathbf{R}_6$：$ab=4$

3. 設集 $E=\{1,2,3,4,5,6\}$，E中的關係 $a\,\mathbf{R}\,b$ 爲：
   "a和b的積是6的倍數"。作出$\mathbf{R}$的圖像。

4. 作出下列各關係的圖像，並指出各關係的性質。

   i） $E=\{1,2,3,4\}$

   $a\,\mathbf{R}\,b$：$a>b$

   ii） $E=\{1,2,3,4\}$

   $a\,\mathbf{R}\,b$：$a\geqq b$

   iii） $E=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

   $a\,\mathbf{R}\,b$：a，b的積爲奇數

   iv） $E=\{1,2,3,4,5,6\}$

   $a\,\mathbf{R}\,b$：a，b的積爲3的倍數。

單值與多值

考慮下列兩關係：

$\mathbf{R}_1$：“x 的父親是 y”。

$\mathbf{R}_2$：“x 的學生是 y”。

在 $\mathbf{R}_1$ 中，每一個 x 最多只能有一個 y 和他對應，因爲人只能有一個父親。但在 $\mathbf{R}_2$ 中，和 x 對應的 y 可能不只一個，通常 x 老師的學生是一個羣體，是一個衆數的數目。由此可見關係可以區分爲兩種：

(1) 若 $\mathbf{R}$ 爲由集 X 到集 Y 的關係，而任何一個 $x \in X$ 都只和一個 $y \in Y$ 對應，則 $\mathbf{R}$ 便說是**單值** (Single valued) 的。

(2) 凡不是單值的關係，都稱作**多值** (Many valued)。

以下的圖表示單值的關係。

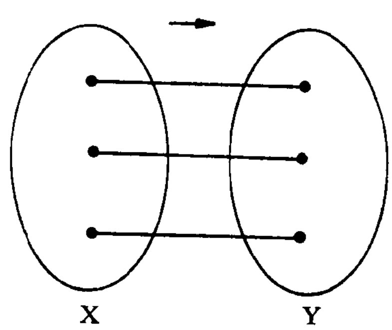

圖 7・15

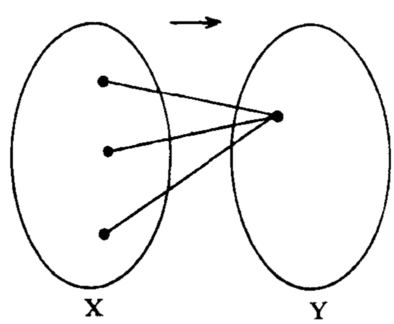

圖 7・16

以下的圖代表多值的關係。

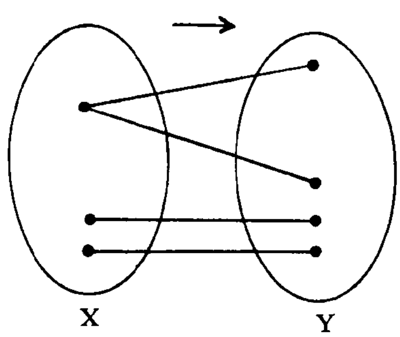

圖 7・17

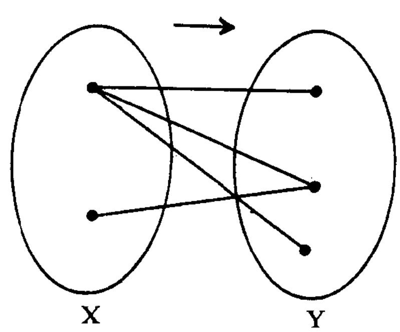

圖 7・18

要注意的是在 $\mathbf{R}$：$X \to Y$ 的關係中的單值，是指 X 中的 x 元而言。只要每一 x 都只有一值便是單值。至於 Y 中的元，是否只和一個 x 對應，是不在考慮之列的。例如以下的三個關係中，不管 Y 中的元是否只和一個 x 元對應（如 $\mathbf{R}_1$），還是和多於一個 x 元對應（如 $\mathbf{R}_2$ 及 $\mathbf{R}_3$），也都是單值的關係。