目　录

第一部分　矩阵论

第一章　线性空间和线性变换 …………………………………… (2)
§1.1　线性空间 ………………………………………………………… (2)
§1.2　线性变换及其矩阵表示 ……………………………………… (18)
§1.3　内积空间及两类特殊的线性变换 …………………………… (39)
第二章　方阵的相似化简 ……………………………………… (61)
§2.1　特征多项式和最小多项式 …………………………………… (61)
§2.2　Jordan 标准形 ………………………………………………… (75)
§2.3　酉相似与正交相似化简 ……………………………………… (92)
第三章　矩阵分析及其应用 …………………………………… (101)
§3.1　向量范数和矩阵范数 ………………………………………… (101)
§3.2　矩阵序列与矩阵级数 ………………………………………… (110)
§3.3　方阵函数及其计算 …………………………………………… (116)
§3.4　矩阵分析在微分方程中的应用 ……………………………… (124)
第四章　矩阵分解及其应用 …………………………………… (131)
§4.1　矩阵的三角分解 ……………………………………………… (131)
§4.2　矩阵的正交三角分解 ………………………………………… (138)
§4.3　矩阵的满秩分解 ……………………………………………… (146)
§4.4　矩阵的奇异值分解 …………………………………………… (155)
§4.5　矩阵的 Moore-Penrose 广义逆 ……………………………… (163)

第二部分　数值计算方法

第一章　误差的基本知识 ……………………………………… (175)
§1.1　绝对误差、相对误差与有效数字 …………………………… (176)

§1.2 数值运算的误差估计及算法稳定性 …………………… (179)
§1.3 数值运算中应注意的一些原则 …………………… (185)
第二章 线性方程组的数值解法 …………………… (190)
§2.1 Gauss 主元消去法 …………………… (190)
§2.2 矩阵分解在解线性方程组中的应用 …………………… (195)
§2.3 线性方程组解的可靠性 …………………… (202)
§2.4 解线性方程组的迭代法 …………………… (207)
§2.5 超松弛迭代法和块迭代法 …………………… (217)
第三章 矩阵特征值与特征向量的计算 …………………… (224)
§3.1 特征值的估计 …………………… (224)
§3.2 幂法与反幂法 …………………… (230)
§3.3 QR 方法 …………………… (239)
第四章 计算函数零点与极值点的迭代法 …………………… (245)
§4.1 简单迭代法及其收敛性 …………………… (246)
§4.2 Newton 法及其变形 …………………… (256)
§4.3 无约束优化问题的下降迭代法 …………………… (262)
第五章 函数的插值与最佳平方逼近 …………………… (275)
§5.1 多项式插值 …………………… (276)
§5.2 分段多项式插值及样条插值 …………………… (290)
§5.3 数据的最小二乘拟合 …………………… (302)
§5.4 函数的最佳平方逼近 …………………… (308)
§5.5 二元插值 …………………… (317)
第六章 数值积分与数值微分 …………………… (323)
§6.1 Newton-Cotes 求积公式 …………………… (325)
§6.2 复化求积公式及其误差估计 …………………… (332)
§6.3 Richardson 外推法及数值积分的 Romberg 算法 …………………… (339)
§6.4 Grauss 型求积公式 …………………… (344)
§6.5 数值微分 …………………… (354)
第七章 常微分方程数值解法 …………………… (362)
§7.1 Euler 方法及其变形 …………………… (364)
§7.2 Runge-Kutta 方法 …………………… (372)

§7.3 线性多步法……………………………………………………（378）
§7.4 预估校正公式…………………………………………………（386）
§7.5 边值问题的差分法 ……………………………………………（388）

第一部分 矩 阵 论

应用矩阵的理论和方法解决工程技术和社会经济领域中的实际问题已越来越普遍，矩阵论已成为最有实用价值的数学分支之一.它是讨论有限维线性空间的空间形式与数量关系的有力工具，其中许多思想、概念和方法对学习数学的其它分支有重要的作用.无限维线性空间的理论和方法(这是泛函分析研究的主要对象)是在矩阵论的基础上发展起来的;而计算机的广泛使用和数值计算方法的普及与发展，更为矩阵论的应用开辟了广阔的前景.许多数值计算方法的理论基础就是矩阵论，学习本书的数值计算方法后会有更深的体会.

这一部分讲述矩阵论中最主要的一些基本概念、基本理论和方法，其中也涉及一些较深的内容，但从应用的角度来说，它们是重要的、有用的.为了便于读者理解和掌握所述的内容，我们力求叙述清楚，论证详细，并多举一些例题，同时，几乎在每节末都附有习题，其中有些是基本的，也有少量是所讲内容的拓广和延伸，希望读者能多做些习题，这对于深入理解概念，提高运算能力和培养分析问题与解决问题的能力都是极有效的.

第一章 线性空间和线性变换

§1.1 线性空间

线性空间是由具体的几何平面和空间的特征经过抽象提炼出来的一个数学概念. 粗略地说,在一个非空集合上定义了线性运算,并且这种运算满足一定的规则,那么这个非空集就成为一个线性空间. 因此,一个线性空间必有由线性运算规定的代数结构,以便于用数学方法对它进行研究.

由于线性空间的定义中涉及数域,所以我们先叙述数域的含义. 设 F 是一个包含 0 和 1 的一个数集,如果 F 中任意两个数(它们可以相同)的和、差、积、商(除数不是 0)仍是 F 中的数,那么称 F 为数域. 例如,全体实数集 R;全体复数集 C;全体有理数集 Q 等都是数域. 而全体正实数集 R_+,全体整数集 Z 等都不是数域.

定义 设 V 是一非空集,F 是数域(本书仅用实数域 R 或复数域 C). 对 V 中任意两个元 α,β,定义一个加法运算,记为"+":$\alpha+\beta\in V$(元 $\alpha+\beta$ 称为 α 与 β 的和);定义一个数乘运算:$k\alpha\in V$,$k\in F$(元 $k\alpha$ 称为 k 与 α 的数积). 这两种运算(也称为 V 的线性运算)满足下列规则:

(1)对任意 $\alpha,\beta\in V$,有 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2)对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in V$,有 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3)存在 $0\in V$,使得对任意 $\alpha\in V$,都有

$$\alpha+0=\alpha,$$

这个元"0"称为 V 的零元;

(4)对任意 $\alpha\in V$,存在 $-\alpha\in V$ 使得

$$\alpha+(-\alpha)=0,$$

这个元“$-\alpha$”称为 α 的负元；

(5)对任意的 $k\in F$ 和任意 $\alpha,\beta\in V$，有

$$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta;$$

(6)对任意 $\alpha\in V$ 和任意的 $k,l\in F$，有

$$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha;$$

(7)对任意 $\alpha\in V$ 和任意的 $k,l\in F$，有

$$k(l\alpha)=(kl)\alpha;$$

(8)F 中的数 1，使得对任意 $\alpha\in V$，有 $1\alpha=\alpha$. 那么称 V 为 F 上的**线性空间**(或向量空间)，记为 $V(F)$；V 中的元称为向量. 不管 V 中的元具体是什么，当 F 为实数域 R 时称它为实线性空间，而当 F 为复数域 C 时称它为复线性空间.

下面，在不需要强调数域时，就称 V 为线性空间.

例 1 全体实 n 维向量组成的集，对于通常意义的向量加法和数乘向量运算，构成一个实线性空间，记为 R^n. 全体复 n 维向量组成的集，对于通常的向量加法和数乘向量运算也构成线性空间. 但这时既可用实数乘向量，从而构成实线性空间；又可以用复数乘向量构成复线性空间，记这个复线性空间为 C^n.

例 2 由 F 中的数形成的 $m\times n$ 矩阵全体，对于通常定义的矩阵加法和数乘矩阵，构成 F 上的线性空间，记之为 $F^{m\times n}$.

例 3 区间$[a,b]$上的连续函数的全体，对于通常意义的函数加法和数乘函数，构成线性空间，记之为 $C[a,b]$. 而 $C^1[a,b]$表示由区间$[a,b]$上连续可微函数的全体，对于通常的函数加法和数乘函数所构成的线性空间.

回顾一下多项式的概念. 设 $a_i\in F$，$0\leqslant i\leqslant m$，t 为变量，则

$$p(t)=a_0t^m+a_1t^{m-1}+\cdots+a_{m-1}t+a_m$$

称为 F 上的一个多项式. 当 $a_0\neq 0$ 时，$p(t)$称为 m 次多项式，a_0t^m 称为 $p(t)$的首项. 特别，当 $a_0=1$ 时，则称 $p(t)$为 m 次首一多项式. 系数全都是零的多项式称为零多项式，记为 o. 零多项式是唯一不定义次数的多项式，它与零次多项式是有本质区别的.

例 4 实数域 R 上的多项式全体，按通常意义的多项式加法及数与多项式乘法，构成实线性空间，记为 $P(t)$. 如果只考虑次数不大于n的多项式全体，再添加零多项式所成的集，则对于通常意义的多项式加法及数与多项式乘法也构成一个实线性空间，以 $P_n(t)$表之.

例 5 数域 F 按其本身的加法和乘法也构成 F 上的线性空间(为什么?).

下面举一个不是常规加法及数乘的例子.

例 6 在正实数集 R_+中 定义加法和数乘运算为

$$a \oplus b = ab, \quad k \circ a = a^k,$$

其中 $a,b\in R_+,k\in R$. 这里，为了区别常规的加法和数乘，我们用"$\oplus$"表示加法，"$\circ$"表示数乘. 那么，R_+是实线性空间.

事实上，不难验证 R_+对这两种运算是封闭的，即 $a\oplus b\in R_+$，$k\circ a\in R_+$，并且满足规则(1)、(2)和(5)—(8). 又 $1\in R_+$，且对任意 $a\in R_+$，有 $a\oplus 1=a$ 和 $a\oplus 1/a=1$，而 $1/a\in R_+$，因此，规则(3)、(4)也是满足的，并且 R_+中的零元是 1，a 的负元是 $1/a$.

线性空间有下列一些简单性质：

(1)零元是唯一的.

(2)对任意 $\alpha\in V$，它的负元是唯一的. 从而可以定义 V 中两个元 α,β 的减法(记为"$-$")为

$$\alpha - \beta \triangleq \alpha + (-\beta).$$

(3)对任意 $\alpha\in V$，有

$$0\alpha = 0, (-1)\alpha = -\alpha;$$

对任意的 $k\in F$，有

$$k0 = 0.$$

由线性空间的定义可知，若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in V(F)$，$k_1,k_2,\cdots,k_m\in F$，则

$$\beta \triangleq k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i$$

是 $V(F)$ 的元，称 β 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的一个线性组合，或称 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出.

定义 V 中的向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}(m\geqslant 1)$ 称为**线性相关**的，如果存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$\sum_{i=1}^{m} k_i\alpha_i = 0. \tag{1.1-1}$$

若仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时，(1.1-1)式才成立，则称此向量组**线性无关**.

根据这个定义，容易推出下列结论：

(1)当 $m\geqslant 2$ 时，向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 线性相关的充分必要条件是，其中至少有一个向量 $\alpha_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 可由组中其余向量线性表出.

(2)若某向量组线性无关，则它的任一子向量组必线性无关；而若某向量组中有一个子向量组线性相关，那么该向量组必线性相关.

(3)单个零向量组是线性相关的，但单个非零向量组是线性无关的.

定义 如果在线性空间 V 中能够找到无限多个线性无关的向量，则称 V 为**无限维的**；而若在 V 中只能够找到有限多个线性无关的向量，则称 V 为**有限维的**，并且把最大线性无关向量的个数称为 V 的**维数**，记为 $\dim V$. $\dim V=n$ 的线性空间称为 n **维线性空间**，记为 V^n.

按此定义，例 2 所述的线性空间 $F^{m\times n}$ 是 $m\times n$ 维的，因为 $F^{m\times n}$ 中的任一矩阵 $A=[a_{ij}]$ 可表示为

$$A = [a_{ij}] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij},$$

其中 E_{ij} 表示第 i 行第 j 列处的元为 1，其余元都是 0 的 $m\times n$ 矩阵，并且 $\{E_{ij}, i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n\}$ 显然是线性无关的. 例 4 中的 $P(t)$ 则是无限维的，因为对于任意的正整数 N，都有 N 个线

性无关的“向量”(多项式)$1, t, \cdots, t^N$. 但 $P_n(t)$是 $n+1$ 维线性空间,因为任一次数不大于 n 的多项式和零多项式都可由 $n+1$ 个线性无关的多项式 $1, t, \cdots, t^n$ 线性表出.

矩阵论主要讨论有限维线性空间的问题,所以下面就 n 维线性空间 V^n 进行研究.

定义 V^n 中给定顺序的 n 个线性无关向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 所成的向量组称为 V^n 的一个**基**(或**基底**),记为 $\mathscr{B}=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$. $\mathscr{B}$ 中的向量 $\alpha_i(1\leqslant i\leqslant n)$称为第 i 个**基向量**.

定理 设 $\mathscr{B}$ 是 V^n 的一个基,则 V 中任一向量 ξ 都可由 $\mathscr{B}$ 唯一地线性表出.

证 由于 V^n 中 $n+1$ 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \xi$ 必线性相关,所以存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_{n+1}$,使

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i + k_{n+1}\xi = 0.$$

如果 $k_{n+1}=0$,则上式为 $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i\alpha_i = 0$. 但$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$是基,故有 $k_i=0, 1\leqslant i\leqslant n$. 这与 $k_1, k_2, \cdots, k_{n+1}$不全为零矛盾. 因此 $k_{n+1}\neq 0$,从而有

$$\xi = -\frac{1}{k_{n+1}}\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{k_i}{k_{n+1}}\right)\alpha_i,$$

即 ξ 可由 $\mathscr{B}$ 线性表出. 再证唯一性. 设有

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i \text{ 和 } \xi = \sum_{i=1}^{n} y_i\alpha_i,$$

则得

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\alpha_i = 0,$$

从而由$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$是线性无关的,推出

$$x_i = y_i, i = 1, 2, \cdots, n.$$ ∎

这个定理表明,在 V^n 中取定一个基 $\mathscr{B}$,那么对任意 $\xi\in V^n$,存在唯一的一组数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,使

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i.$$

用矩阵记号,可把它写成

$$\xi = [\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathscr{B}\mathbf{x}, \qquad (1.1\text{-}2)$$

其中基向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 所组成的矩阵$[\alpha_1 \ \alpha_2 \cdots \ \alpha_n]$仍记为 $\mathscr{B}$. $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \cdots \ x_n]^T$(为了节省空间,常用行向量的转置表示列向量)称为 ξ 在基 $\mathscr{B}$ 下的**坐标向量**(或**坐标**),$x_i(1 \leqslant i \leqslant n)$称为 ξ 在 $\mathscr{B}$ 下的第 i 个**坐标**;

例7 在 $P_2(t)$中取基 $\mathscr{B}=\{1,t,t^2\}$,则多项式 $p(t)=2t^2-t+1$ 在 $\mathscr{B}$ 下的坐标向量是$[1 \quad -1 \quad 2]^T$,因为

$$2t^2 - t + 1 = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot t + 2 \cdot t^2 = [1 \ \ t \ \ t^2]\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

若另取一个基 $\mathscr{B}_1=\{t+1,t+2,t^2\}$,则由

$$2t^2 - t + 1 = -3 \cdot (t+1) + 2 \cdot (t+2) + 2 \cdot t^2 = \mathscr{B}_1\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

知,$p(t)$在 $\mathscr{B}_1$下的坐标向量是$[-3 \ \ 2 \ \ 2]^T$.

例8 $R^{n\times n}$中的任何可逆矩阵 P,其 n 个列向量 $P_1,P_2,\cdots,P_n \in R^n$ 构成 R^n 的基,因为它们是线性无关的,并且对任一向量 $\mathbf{y}=[y_1 \ \ y_2 \ \ \cdots \ \ y_n]^T \in R^n$,若令 $P^{-1}\mathbf{y}=\mathbf{x}\in R^n$,则有

$$\mathbf{y} = P\mathbf{x} = [P_1 \, P_2 \cdots P_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i,$$

即 R^n 中任意向量 $\mathbf{y}$ 都可由 P 的 n 个列向量线性表出.

这个例子说明，由 R^n（或 C^n）的一个基所排列成的 n 阶方阵是可逆的.

例9 将 C 看作 C 上的线性空间，则它是1维的，$\{1\}$是它的基. 但若把 C 看作 R 上的线性空间，则$\{1,i\}$是它的基，从而是2维的. 这一例子说明，线性空间的维数与所考虑的数域有关.

从上述讨论看出，在 V^n 中取定一个基 $\mathscr{B}$，则 V^n 中的元与 F^n 中的向量之间是一一对应的，并且若 α,β 在 $\mathscr{B}$ 下的坐标分别为 x,y，那么 $\alpha+\beta$ 在 $\mathscr{B}$ 下的坐标是 $x+y$，$k\alpha$ 在 $\mathscr{B}$ 下的坐标是 kx. 因此，V^n 与 F^n 有相同的代数结构，只是各自的元的名称不同而已. 由于 F^n 比 V^n 具体，又便于应用矩阵运算，所以一般总是把 V^n 上的问题通过取定一个基转化为 F^n 上的问题来讨论.

从例7可以看出，同一个元在不同基下的坐标一般是不同的，那么它们之间有何联系呢？为此需要讨论两个基之间的变换关系.

定义 设 $\mathscr{B}_\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$，$\mathscr{B}_\beta=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$是 V^n 的两个基，则每个 $\beta_j(1\leqslant j\leqslant n)$都可由 $\mathscr{B}_\alpha$ 线性表出：

$$\beta_j=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\alpha_i=[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n]\begin{bmatrix}p_{1j}\\p_{2j}\\\vdots\\p_{nj}\end{bmatrix},j=1,2,\cdots,n.$$

将 $\beta_j,1\leqslant j\leqslant n$ 按顺序排列，并使用矩阵记号，则得

$$[\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_n]=[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n]\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{bmatrix}.$$

(1.1-3)

简记为

$$\mathscr{B}_\beta=\mathscr{B}_\alpha P \qquad (1.1\text{-}3')$$

其中 n 阶方阵 $P=[p_{ij}]$称为由基 $\mathscr{B}_\alpha$ 到 $\mathscr{B}_\beta$ 的**变换矩阵**（**或过渡矩阵**）. 显然，基变换矩阵 P 中的第 j 个列向量 $P_j=[p_{1j}\ \ p_{2j}\ \ \cdots$

$p_{nj}]^T$ 就是 $\mathscr{B}_\beta$ 中第 j 个基向量 β_j 在基 $\mathscr{B}_\alpha$ 下的坐标.

基变换矩阵 P 是可逆矩阵. 事实上若 P 不可逆,则存在非零向量 x 使 $Px=0$,那么由(1.1-3′)知

$$\mathscr{B}_\beta x = \mathscr{B}_\alpha P x = 0,$$

从而 $x=0$(因为零元在基 $\mathscr{B}_\beta$ 下的坐标向量是零向量),这与 $x\neq 0$ 矛盾. 又由(1.1-3′)知

$$\mathscr{B}_\alpha = \mathscr{B}_\beta P^{-1},$$

这就是说,P^{-1}是由基 $\mathscr{B}_\beta$ 到 $\mathscr{B}_\alpha$ 的变换矩阵.

例10 已知 R^3的两个基是

$$\mathscr{B}_1 = \left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\},\quad \mathscr{B}_2 = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\},$$

求由 $\mathscr{B}_1$到 $\mathscr{B}_2$的变换矩阵 P.

解 (1.1-3)式给出

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}P,$$

故

$$P=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\-1&-1&0\\2&1&2\end{bmatrix}.$$

现设 ξ 在基 $\mathscr{B}_\alpha$,$\mathscr{B}_\beta$ 下的坐标向量分别为 x,y,即

$$\xi = \mathscr{B}_\alpha x \quad , \quad \xi = \mathscr{B}_\beta y,$$

将(1.1-3′)式代入上述第二式,并与第一式比较,得

$$\xi = \mathscr{B}_\alpha x = \mathscr{B}_\alpha P y,\text{即 } \mathscr{B}_\alpha(x - Py) = 0,$$

从而有

$$x = Py \qquad \text{或} \qquad y = P^{-1}x \tag{1.1-4}$$

(1.1-4)式表示了同一个 ξ 在不同基下坐标之间的关系,称为**坐标变换公式**.

例11 已知 R^3 的两个基

$$\mathscr{B}_1 = \{e_1 = [1\ 0\ 0]^T, e_2 = [0\ 1\ 0]^T, e_3 = [0\ 0\ 1]^T\}$$

(称之为 R^3 中的标准基)和

$$\mathscr{B}_2 = \{[-3\ \ -7\ \ 1]^T, [3\ 6\ 1]^T, [-2\ -3\ 2]^T\},$$

求在这两个基下有相同坐标的所有向量.

解 设 $x=[x_1\ x_2\ x_3]^T$ 是所求的向量,则 x 在标准基下的坐标显然就是 x,因此由题意,x 应满足关系式

$$x = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} x,$$

即
$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} x = 0,$$

解得
$$x = k[1\quad 2\quad 1]^T \quad (k \text{ 为任意实数}).$$

定义 设 W 是线性空间 V 的一个非空子集,如果 W 中的元关于 V 中的线性运算也构成线性空间,则称 W 为 V 的子空间,记为 $W\subset V$.

验证 W 是否为 V 的子空间,实际上只需要考察 W 对 V 中加法和数乘运算是否封闭就行了,因为线性空间定义中的规则(1)—(8)在 W 对线性运算是封闭的情况下必是满足的.

由于子空间不可能比整个空间有更多数目的线性无关向量,所以子空间的维数不会大于整个空间的维数.

按定义,线性空间 V 本身及由 V 的零元构成的零空间(记为 $\{0\}$,由维数定义,$\dim\{0\}=0$)都是 V 的子空间,称它们为**平凡子空间**.我们感兴趣的当然是非平凡子空间.下面举几个常见子空间的例子.

例12 给定 $A\in R^{m\times n}$,集

$\mathscr{N}(A)\triangleq\{x\in R^n \mid Ax=0\}$,

$\mathscr{R}(A)\triangleq\{y\in R^m \mid y=Ax, x\in R^n\}$

分别是 R^n 和 R^m 的子空间，依次称为 A 的零空间和列空间.

例13 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r(r\geqslant 1)$是 V 的 r 个向量，它们所有可能的线性组合所成的集

$$\mathrm{Span}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\} \triangleq \{\alpha \mid \alpha = \sum_{i=1}^{r} k_i\alpha_i\},$$

是 V 的一个子空间，称为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **张成的子空间**.

若记例12中 A 的 n 个列向量为 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n\in R^m$，则 $\mathscr{R}(A)=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n\}$.

例14 $R^{n\times n}$中所有对称矩阵组成的集

$$\mathscr{S} \triangleq \{A\in R^{n\times n} \mid A^T = A\}$$

是 $R^{n\times n}$的一个子空间.

对于 $m\times n$ 复数矩阵 A，定义 A^H(也记为 A^*)为 A 的**共轭转置矩阵**：

$$A^H \triangleq \overline{A}^T = \overline{A^T}.$$

例如，设

$$A = \begin{bmatrix} 2+\mathrm{i} & 3\mathrm{i} & -1-2\mathrm{i} \\ -5 & 2-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{bmatrix} \in C^{2\times 3},$$

则

$$A^H = \begin{bmatrix} 2-\mathrm{i} & -3\mathrm{i} & -1+2\mathrm{i} \\ -5 & 2+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2-\mathrm{i} & -5 \\ -3\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \\ -1+2\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{bmatrix} \in C^{3\times 2}.$$

当 $A\in C^{n\times n}$(即 A 为 n 阶复数方阵)，并有 $A^H=A$ 时，则称 A 为 Hermite 矩阵. 但 $C^{n\times n}$中所有 Hermite 矩阵组成的集

$$\mathscr{S}_H \triangleq \{A\in C^{n\times n} \mid A^H = A\}$$

不是 $C^{n\times n}$的子空间(为什么?).

定理 设 W 是 V^n 的一个 r 维子空间，$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$是 W 的一个基，则这 r 个向量必可扩充为 V^n 的基，即在 V^n 中一定可以找到 $n-r$ 个向量 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$，使$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r;\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n\}$是 V^n 的一个基.

证 若 $r=n$，则定理已成立. 若 $r<n$，则 V^n 中必存在一个向量 α_{r+1} 不能由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ 线性表出，从而 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}\}$ 线性无关. 如果 $r+1=n$，则定理已成立，否则继续这个过程. 由于 n 是一个确定的正整数，所以在 $n-r$ 步后必找到 $n-r$ 个向量 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$，使 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n\}$ 为 V^n 的基.

定义 设 W_1,W_2 是 V 的两个子空间，则

$$W_1\cap W_2\triangleq\{\xi\in V\,|\,\xi\in W_1\text{及 }\xi\in W_2\},$$

$$W_1+W_2\triangleq\{\xi\in V\,|\,\xi=\xi_1+\xi_2,\xi_1\in W_1,\xi_2\in W_2\}$$

分别称为 W_1 与 W_2 的**交**，W_1 与 W_2 的**和**.

(这里，子空间 W_1 与 W_2 的交与集论中两个集的交集的定义相同；但 W_1 与 W_2 的和与集论中两个集的并集是两个不同的概念.)

定理 若 W_1,W_2 是 V 的两个子空间，则 $W_1\cap W_2,W_1+W_2$ 都是 V 的子空间.

证 只证后者. 设 $\alpha,\beta\in W_1+W_2$，则存在 $\alpha_1,\beta_1\in W_1$ 和 $\alpha_2,\beta_2\in W_2$，使

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\qquad \beta=\beta_1+\beta_2.$$

那么

$$k\alpha=k(\alpha_1+\alpha_2)=k\alpha_1+k\alpha_2,$$

且 $k\alpha_1\in W_1,k\alpha_2\in W_2$；

$$\alpha+\beta=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2),$$

且 $$\alpha_1+\beta_1\in W_1,\alpha_2+\beta_2\in W_2.$$

因此，

$$k\alpha\in W_1+W_2,\alpha+\beta\in W_1+W_2.$$

于是，W_1+W_2 对 V 中的线性运算是封闭的，故 W_1+W_2 是 V 的子空间. ∎

定理 设 W_1,W_2 是 V 的两个子空间，则

$$\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)=\dim W_1+\dim W_2. \tag{1.1-5}$$

证 设 $\dim W_1=n_1,\dim W_2=n_2,\dim(W_1\cap W_2)=r$，又 $\{\alpha_1,\alpha_2,$

$\cdots,\alpha_r\}$是 $W_1\cap W_2$的一个基. 由于$(W_1\cap W_2)\subset W_i(i=1,2)$,所以$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$可扩充为 W_1的基:

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_1-r}\},\tag{1.1-6}$$

又可扩充为 W_2的基:

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r;\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{n_2-r}\}.\tag{1.1-7}$$

我们证明向量组

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_1-r};\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{n_2-r}\}\tag{1.1-8}$$

是 W_1+W_2的一个基,从而维数公式(1.1-5)成立.

据和空间 W_1+W_2的定义,其中任一向量ξ都可表示为 W_1中的向量ξ_1与 W_2中的向量ξ_2之和,而ξ_1可由基(1.1-6)线性表出,又ξ_2可由基(1.1-7)线性表出,故$\xi=\xi_1+\xi_2$可由向量组(1.1-8)线性表出.

假设有等式

$$\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i+\sum_{j=1}^{n_1-r}p_j\beta_j+\sum_{l=1}^{n_2-r}q_l\delta_l=0,$$

令

$$\xi\triangleq\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i+\sum_{j=1}^{n_1-r}p_j\beta_j=-\sum_{l=1}^{n_2-r}q_l\delta_l,\tag{1.1-9}$$

则由(1.1-9)式的第一个等号关系知$\xi\in W_1$,而第二个等号关系给出$\xi\in W_2$,从而$\xi\in W_1\cap W_2$. 于是,ξ可由$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$线性表出.

设$\xi=\sum\limits_{i=1}^{r}b_i\alpha_i$,则由(1.1-9)式得

$$\sum_{i=1}^{r}b_i\alpha_i+\sum_{l=1}^{n_2-r}q_l\delta_l=0.$$

但$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{n_2-r}\}$线性无关,故

$$b_i=0,1\leqslant i\leqslant r;q_l=0,1\leqslant l\leqslant n_2-r.$$

因此$\xi=0$,即

$$\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i+\sum_{j=1}^{n_1-r}p_j\beta_j=0.$$

又因$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_1-r}\}$线性无关,故

$$k_i=0,1\leqslant i\leqslant r;p_j=0,1\leqslant j\leqslant n_1-r.$$

这就证明了向量组(1.1-8)是线性无关的.

综合起来,便证明了向量组(1.1-8)是W_1+W_2的基. ∎

例15 R^4中的两个子空间是

$W_1=\text{span}\{\alpha_1=[1\ 1\ 0\ 0]^T,\alpha_2=[0\ 1\ 1\ 0]^T\}$,

$W_2=\text{span}\{\alpha_3=[0\ 0\ 1\ 1]^T,\alpha_4=[1\ 0\ 0\ 1]^T\}$,

求W_1+W_2及$W_1\cap W_2$的基和维数.

解 $W_1+W_2=\text{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$.但由于$\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$,且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,所以$W_1+W_2$的一个基为$\{\alpha_1=[1\ 1\ 0\ 0]^T,\alpha_2=[0\ 1\ 1\ 0]^T,\alpha_3=[0\ 0\ 1\ 1]^T\}$,$\dim(W_1+W_2)=3$.

维数公式(1.1-5)给出

$$\dim(W_1\cap W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1+W_2)=1.$$

为了求$W_1\cap W_2$的基,设$\xi\in W_1\cap W_2$,则由$\xi\in W_1$知,存在k_1,k_2使$\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$.又由$\xi\in W_2$知,存在$k_3,k_4$使$\xi=k_3\alpha_3+k_4\alpha_4$.因而,$k_1,k_2,k_3,k_4$应满足方程

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=k_3\alpha_3+k_4\alpha_4,$$

即
$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(-\alpha_3)+k_4(-\alpha_4)=0.$$

用矩阵表示则为

$$\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{bmatrix}=0,$$

解得

$$[k_1\ k_2\ k_3\ k_4]^T=c[1\ -1\ -1\ 1]^T,$$

其中c为任意实数.从而$\xi=c(\alpha_1-\alpha_2)=c[1\ 0\ -1\ 0]^T$.

因此,$W_1\cap W_2=\text{span}\{[1\ 0\ -1\ 0]^T\}$,即$[1\ 0\ -1\ 0]^T$是$W_1\cap W_2$的一个基.