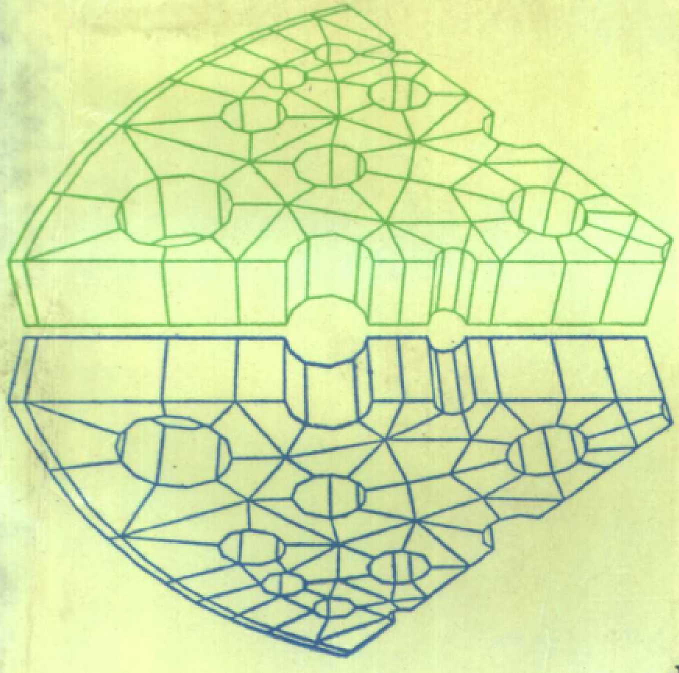
殷家驹　张元冲

JISUANLIXUE JIAOCHENG
计算力学教程



西安交通大学出版社

封面设计　杨玫云

ISBN7-5605-0462-0/O·80
定价：7.90 元

计算力学教程

（有限单元法 边界单元法 加权残数法）

殷家驹 张元冲

西安交通大学出版社

内 容 提 要

本书主要介绍有限单元法的基本原理、数值方法及其在工程中的应用。除讨论一维、二维、三维弹性力学问题，动力学问题，材料非线性和几何非线性问题的有限单元法外，并设专章介绍二维弹性力学边界单元法和加权残数法的基本原理。书末附有两个教学程序。

本书可作为高等工科院校力学、机械、土木等专业本科生或研究生的计算力学或有限单元法课程的教材，也可供从事计算力学的工程技术人员参考。

(陕)新登字 007 号

计 算 力 学 教 程

殷家驹 张元冲

责任编辑 路

*

西安交通大学出版社出版

邮政编码 710049

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店经销

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.375 字数:289 千字

1992 年 6 月第 1 版 1992 年 6 月第 1 次印刷

印数:1—2000

ISBN 7-5605-0462-0/O·80 定价:7.90 元

前　言

近30年来，随着计算机的飞速发展和广泛使用，各种行之有效的数值计算方法得到了巨大的进展。当今，在固体力学和结构分析的领域中，许多有重大意义的实际问题的解决都与计算力学的发展和应用密切相关。

目前，国内有限单元法已在各工程领域中得到广泛应用，不少大型和专用的计算程序已经被编制或引入。10多年来，一种新的数值方法——边界单元法的研究也已在我国蓬勃地展开。与此同时，国内在加权残数法的基本理论和应用方面也取得了可喜的成绩。这就要求科技工作者能迅速掌握计算力学的基本原理和方法，以便更有效地推进这门学科的发展，并使其更广泛地应用于工程实际。

10年前，作者曾写过一本《有限单元法》讲义，经过多年的教学、科研实践，几经修改和补充，撰写成本书，目的是为工科院校力学、机械、土木等专业的本科生或硕士生提供一本适用的计算力学教材，也为从事结构分析的教师和工程技术人员提供一本实用的参考读物。

编写本书时，注意到了各种数值方法之间的联系，力求由浅入深，联系工程实际。并在附录中提供教学使用程序，以便读者了解计算程序的结构，从而具有编制和改进计算程序的能力。

计算力学的范畴很广，作为一本教材，只能介绍它在固体力学中的一些应用。其中绝大部分篇幅用于讨论有限单元法，此外各用一章介绍边界单元法和加权残数法的原理和应用。在此基础上读者将有能力去研究和探索更为广泛的问题。

本书共有十三章。其中第一章概述各种数值方法的理论基础以及其相互关系。第二章至第八章讨论有限单元法在平面问题、空间问题、平面杆系和板、壳问题中的应用。第九章讨论动力学问题的有限单无法。第十、第十一章阐述材料非线性和几何非线性问题的有限单

元法。第十二章详细介绍边界单元法在二维弹性力学问题中的应用。第十三章概述加权残数法在固体力学中的应用。

由于本书只侧重讨论固体力学领域中各类问题的数值计算方法，不能过多地阐述那些问题的理论基础，因此选用本书作为教材时，应将有关的力学课程、线性代数和算法语言作为预修课程。

在教学内容安排上，可以将第一章中的后两节放在学完各种近似解法后再去学习，以便加深理解各种近似解法之间的联系。附录中的两个程序，可与有关章节穿插教学，并可进行计算机实习，这对加深基本内容的理解和提高编制程序的能力将是有帮助的。

本书适用于作 50 至 70 学时工科力学专业的计算力学教材，也可供一般工科专业本科生或研究生开设有限单元法课程使用。除了前六章有限元方法的基本内容外，它更广泛和深入的专题以及边界单元法和加权残数法等内容，工科各类专业可根据各自的需要和教学时数适当选学。

本书第十三章和部分教学程序由张元冲编写，其余各章由殷家驹编写。在编写过程中得到了西安交大工程力学系许多同事的热情支持和鼓励。乐美峰教授认真审阅了文稿，并提出了许多宝贵的意见，嵇醒教授在百忙中阅看了部分书稿，与作者作了多方有益的讨论，在此一并表示衷心的感谢。

限于水平，书中难免有错误和不妥之处，恳切希望读者给予批评指正。

作　者

1989 年 12 月于西安交通大学

目　　录

第一章 绪 论

§1-1 引 言

在工程技术领域中有许多力学问题和场问题，尽管人们已建立了它们的基本方程和边界条件，但是只有少数简单的问题才能求出其解析解. 对于那些数学方程比较复杂，物体边界形状又不规则的问题，采用解析法求解在数学上会遇到难以克服的困难，通常需藉助各种行之有效的数值计算方法.

在固体力学范畴中，常用的数值求解方法有：有限差分法、有限单元法、边界单元法和加权残数法等.

有限差分法是依据有限差分技术，将问题的基本微分方程和边界条件化为差分方程，从而将求解微分方程的问题变换成求解代数方程组的问题. 解算后能在一系列的离散点上给出问题的近似解. 虽然有限差分法能处理某些相当困难的问题，但当求解域的几何形状复杂时，应用该法求解精度会受到限制，甚至数学处理上会发生困难.

有限单元法是近 30 年来随着电子计算机的飞速发展而被广泛采用的一种有效的数值计算方法. 该方法的基本思想是将连续的结构离散成有限个单元，并在每一单元中设定有限个结点，将连续体看作只在结点处相连结的一组单元的集合体；同时选定场函数的结点值作为基本未知量，并在每一单元中假设一近似插值函数以表示单元中场函数的分布规律；进而利用力学中的某种变分原理去建立用

以求解结点未知量的有限单元法方程,从而将一个连续域中的无限自由度问题化为离散域中的有限自由度问题.一经求解就可利用解得的结点值和设定的插值函数确定单元上以至整个集合体上的场函数.由于单元可设计成不同的几何形状,因而可灵活地模拟和逼近复杂的求解域.显然,如果插值函数满足一定要求,随着单元数目的增加,解的精度会不断提高且最终收敛于问题的精确解.

需要指出的是:有限单元法实质上是基于变分原理求近似解的里兹(Ritz)法的某种变体.其差别仅在于给定插值函数的方式不同.在传统的里兹法中,插值函数是在整个求解域上给出的解析函数,而在有限单元法中则是分片给出插值函数,因此后者给问题的求解增添了许多灵活性.另一方面,有限单元法中的待定参数通常是结点的未知量,例如结点的位移或应力等,物理概念清晰,易为人们理解和接受,所得计算结果也便于工程应用.

边界单元法是70年代才兴盛起来的一种新的数值计算方法.可以说它是早期的边界积分方程方法和有限单元法的结合.它依据问题的边界积分方程,将物体边界离散化,以边界结点的广义位移和广义力为未知变量,选择插值函数,然后建立线性代数方程组而被求解.在获得离散的边界点上的近似解后,可按解析公式求出物体内部任一点的解.因此在某些特定的问题中,它比有限单元法具有更多的优点.例如,它只需在比有限单元法减低一维的边界上划分边界单元,因而对不少问题可以减少方程组数目,达到节省机时的目地;容易处理无限域问题;由于由边界上的解去求域内的解采用的是精确的解析式,因而通常解的精度较高.

由于有限单元法能与计算机辅助设计很好的结合,目前它已成为结构分析的强有力的工具,因此本书将以大部分篇幅介绍它在固体力学中的应用.有限单元法依据所取结点未知量的不同,有所谓位移法、力法、杂交法和混合法等.本书将介绍最普遍采用的位移法,它取结点位移为未知量,导出的关系式比较简单,编制程序也易于规范

化.我们将结合二维弹性力学问题对边界单元法作详尽介绍.本书最后一章将对加权残数法在固体力学中的应用作一概述.至于大家熟悉的有限差分法就不在本书中再作介绍.

§1-2 有限单元法的解题过程

为了阐述有限单元法的一般解题过程,先举一个简单的例题.

1.2.1 简例——直杆受自重作用的简单拉伸问题

如图 1-1 所示的直杆受自重作用的简单拉伸问题,很容易用材料力学的方法求解.在此仅用这一简例来说明有限单元法的解题思路和方法.

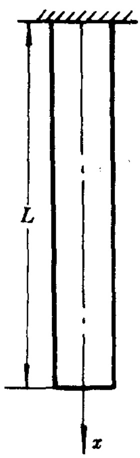


图 1-1 受自重作用的直杆

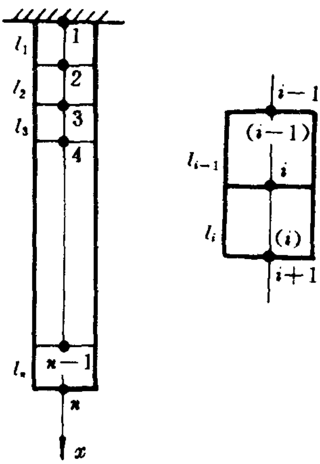


图 1-2 结构的离散

有限单元法的分析步骤如下:

1. 结构离散化

将图 1-1 所示的直杆沿长度方向离散成 n 段，每一段都称为单元、相邻单元间仅在结点处相连，因此直杆共离散成 n 个单元和 $n+1$ 个结点. 分别将单元和结点依次编号，如图 1-2 所示.

2. 选择位移插值函数

就整个直杆来说，位移函数 u(x)是未知的，但对每一单元可以近似地假设一位移函数，这种近似位移函数可以是线性的、二次的等等，且在结点上应等于结点位移. 在这一简例中，假定单元内的位移按线性分布规律，即

$$u = u_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{l_i}(x - x_i) \tag{1-1}$$

或写成矩阵表达式

$$u = [N]\{\delta\}^e$$

而

$$[N] = \begin{bmatrix} \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \end{bmatrix}$$

$$\{\delta\}^e = [u_i \quad u_{i+1}]^T$$

有了位移插值函数，就可按材料力学公式求出单元内应变和应力用结点位移表示的公式

$$\varepsilon_x^i = \frac{du}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_i}{l_i} \tag{1-2}$$

$$\sigma_x^i = E\varepsilon_{xi} = \frac{E(u_{i+1} - u_i)}{l_i} \tag{1-3}$$

其中 E 为材料的弹性模量.

3. 外载荷向结点移置

可以按照静力等效的原理(原载荷和结点载荷在任何虚位移上的虚功相等的原理)将单元上受到的重力移置到结点上去. 在采用线性位移插值函数时，第 i 单元的重力向结点的移置相当于将单元的重力平均分配给两端的结点. 由此，第 i 结点上承受的外载荷为

$$\frac{q(l_{i-1}+l_i)}{2}$$

其中 q 为单位杆长所受重力的大小.

4. 建立结点的平衡方程

以 i 结点为例,其 x 方向的平衡条件为

$$N_i - N_{i-1} + q(l_{i-1}+l_i)/2 = 0$$

或代入式(1-3),将上式写成

$$\frac{EA(u_i - u_{i-1})}{l_{i-1}} - \frac{EA(u_{i+1}-u_i)}{l_i} = \frac{q(l_{i-1}+l_i)}{2} \tag{1-4}$$

式中 A 是杆的截面积.

注意到 $u_1=0$,对结点 $i(i=2\sim n+1)$引出上述 n 个结点平衡方程,联立求解可求出 n 个未知的结点位移 $u_i(i=2\sim n+1)$.

现假定将直杆分割成 3 个单元,每个单元长为 $a=L/3$,则对结点 2,3,4 列出的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{EA}{a}(2u_2 - u_3) = qa \\
&\frac{EA}{a}(-u_2 + 2u_3 - u_4) = qa \\
&\frac{EA}{2}(-u_3 + u_4) = \frac{qa}{2}
\end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

如果将上式写成矩阵形式

$$[k][\delta] = [p]$$

其中

$\{\delta\} = [u_2 \quad u_3 \quad u_4]^T$ 为结点位移向量;

$\{p\} = [qa \quad qa \quad qa/2]^T$ 为结点载荷向量;

$$[k] = \frac{EA}{a}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ 称为结构的总刚度矩阵.

5. 解线性代数方程组

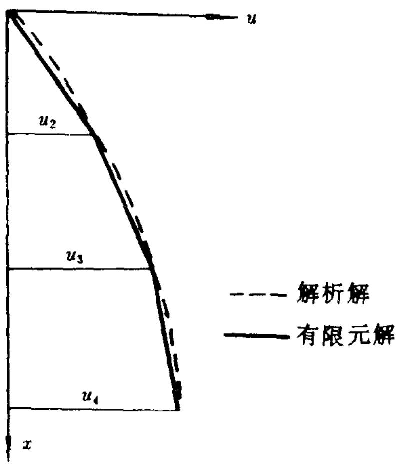


图 1-3 解析解与有限元解比较

联立求解方程组(1-5),得

$$u_2 = \frac{5}{2}\frac{qa^2}{EA}$$

$$u_3 = \frac{8}{2}\frac{qa^2}{EA} \quad u_4 = \frac{9}{2}\frac{qa^2}{EA} \tag{1-6}$$

可以发现,在结点 2,3,4 处上述解和材料力学解完全一致(这种一致仅是巧合),而其他各点有限元法的结果和材料力学解略有差别,见图 1-3. 但随着单元数的增加,这种差别将缩小.

6. 求杆中各单元的应变和应力

利用式(1-2)和式(1-3)可求出各单元中的应变 ε_x^i 和应力 σ_x^i.

1.2.2 有限单元法解题的一般步骤

上面的简例,显示了用有限单元法解题的大体过程. 现将该法的一般步骤总结如下:

1. 结构的离散化

结构的离散化是有限单元法分析的基础. 所谓离散化,是将分析的结构物分割成有限个单元体,使相邻单元体仅在结点处相连接,而以如此单元的结合体去代替原来的结构. 如果分析对象是桁架或刚架,无疑可取每一根杆作为单元,因这类结构就是由杆件相互连接而成. 如果分析对象是二维或三维的连续体,那么就得根据实际物体的形状和对计算精度的要求去确定单元的形状和剖分方式.

2. 选择位移模式

选定离散结构所用的单元后，需对典型单元进行特性分析，分析时必须首先对单元假设一个位移插值函数，或称之为**位移模式**，导出用结点位移表示单元体内任一点位移的关系式

$$\{f\} = [N]\{\delta\}^e \tag{1-7}$$

式中，$\{f\}$是单元内任一点的位移向量；$\{\delta\}^e$是单元的结点位移向量；而$[N]$为**形函数矩阵**，其元素是位置坐标的函数.

有了位移模式，就可用几何关系和应力-应变关系导出用单元结点位移表示单元中应变和应力的表达式

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}^e \qquad \{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}^e \tag{1-8}$$

其中$\{\varepsilon\}$和$\{\sigma\}$为单元内任一点的应变和应力列向量；$[B]$是**应变矩阵**；而$[D]$是与材料常数有关的**弹性矩阵**.

3. 建立平衡方程

对有限单元位移法，可利用最小势能原理建立结构的结点载荷和结点位移之间的关系式，即结构的平衡方程

$$[k][\delta] = [p] \tag{1-9}$$

在一般情况，有限单元法的结点平衡方程，并不是像上面的简例那样能直接地列出，而需要用变分原理进行推导. 众所周知，最小势能原理是一个静力平衡的原理，在有限元位移法中用它能导出结构各结点的平衡方程，并也能相应地推出单元上的外载荷向结点移置的计算公式.

4. 求解结点位移

线性代数方程组(1-9)在代入边界条件后，经解算可求得所有未知的结点位移.

5. 计算单元中的应变和应力

依据求得的结点位移，由式(1-8)可求出单元中任一点的应变和应力.