工 程 数 学

实变函数与泛函分析

董加礼 编

吉 林 教 育 出 版 社

工 程 数 学

实变函数与泛函分析

董加礼 著

*

吉林教育出版社出版 吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 7.5印张 160,000字

1983年7月第1版 1983年7月第1次印刷

印数：1—1,670册

统一书号：13375·4 定价：1.40元

序　言

从1981年开始，笔者连续为吉林工业大学的工科研究生开设一门工程数学——实变函数与泛函分析。如所周知，这是一门十分抽象的数学理论课，就是在数学系也是一门很难的课。因此，要想在学时少的条件下，为数学基础和素养都很薄弱的工科研究生开设这门课，无疑是困难的。再加上没有教学大纲及合适的教材，就更增加了开课的难度。这就迫使我们不得不自筹讲义。这本教材就是在这几年讲课手稿的基础上，经过加工和修改而完成的。

我们的宗旨是：在六十学时内，为只学过微积分和线性代数的工科研究生或大学生，讲授一些实变函数和泛函分析的基本思想和基本内容。在这个框架之内，形成一个完整的体系，写出一本类似工程数学的通俗讲义。

根据我们的经验，听这门课的人开始总是很多，后来逐渐减少。究其原因不外有两点，一是缺少严格的分析训练，学不下去；二是不真正需要，没有兴趣。针对这种情况，我们不想作大面积的扫盲，而只是对少数需要的人，提高他们的兴趣，扩大他们的知识面，培养他们的能力，训练他们的素养。为此，我们用三分之一左右的篇幅讲授集论（特别是点集）、Lebesgue测度和Lebesgue 积分，以便提高学生的实际分析能力，为学习泛函分析打下牢固的基础，同时也为其他课程提供这方面的数学知识。对于泛函部分，我们主要讲距离空

间的三性（可分性、完备性和列紧性）；Banach空间的算子理论（赋范空间、算子空间、连续线性算子的扩张定理及表现定理、有界线性算子的逆算子定理及共鸣定理、算子序列在各种意义下的收敛等）；Hilbert空间的几何理论（内积、投影定理、完备的就范直交系及广义 Fourier 展开、投影算子及自共轭算子等），最后介绍线性算子谱的基本概念以及自共轭算子的谱分解。全篇贯穿四个主要空间：R^n、$C[a,b]$、L^p、l^p。

从讲法上看，我们强调培养学生的逻辑思维、抽象思维、对错观和分析问题论证问题的能力。因此，凡是问题的引入，我们都力争说清问题的历史背景和来龙去脉；凡是主要概念我们都反复说明它的意义和作用；凡是重要的论证我们都全力阐述它的价值和证明思路。此外全书还贯穿两个想法：凡是有限维空间，尽量用 n 维来讲，而不以三维为例，以便提高学生的抽象思维能力；凡是不证的命题及定理一律声明并指出参考出处，绝不含混地自圆其说，以便培养学生的对错观和敏锐观。此外，在写法上，我们力争简明和通俗。

为了实现上述的宗旨、体系和讲法，对某些问题，自然需要提出我们的看法，或推证一些结论，这就难免产生不妥和错误。此外，有些地方我们还将其他书上的合乎上述要求的论述整段地，甚至是逐字逐句地移植过来，这是我们要特别声明的。

我们应当提到，在本书初稿的编写和复印过程中，曾得到吉林工业大学研究生处、教务处和学术交流科的大力协助和支持。1984年8月，全国第二次应用泛函分析教学和科研讨论会在四川峨嵋西南交通大学召开，作者有幸将本讲义在这次会议上进行了交流，得到很多专家的热情鼓励和指点。

阅后，我的老师徐利治教授曾在百忙中浏览了本讲义，并提出许多带有方向性的意见。所有这一切，对本书的最后诞生和完善都起了关键性的作用，作者在此表示衷心地感谢。

由于我们的水平和经验所限，书中一定存在不少缺点，甚至错误。诚恳地希望有关专家、同行和读者给予批评和指正。

编　者

1985年春节于长春

目　　录

第一篇　实变函数

我们知道，古典微积分在理论上是比较完整的，应用上也有一定的广泛性．这是微积分得以存在和发展的原因．但是，它的严重缺欠也是人所共知的．例如，在 Riemann 积分中，要想逐项积分，一般需要一致收敛来保证．但这一要求，常常或是得不到满足，或是招致繁杂的验证，这就在很大程度上限制了Riemann积分的应用．

Riemann积分之所以有这样的缺点，究其原因，它主要是针对连续函数或“不太间断”的函数而定义的．为了克服Riemann积分的缺点，Lebesgue以点集的测度为基础，引进了一种新的积分，称为Lebesgue积分．这种积分拓广了Riemann积分，使得那些“比较不连续”的所谓可测函数也都可积，应用起来是十分方便的．正因为这样，一部实变函数书总是包括集合、测度、可测函数、最后是 Lebesgue积分．下面将逐步讨论这些内容．

第一章　点集及其测度

§1　集合及其运算

1．概念与记号

我们称具有某种性质的事物的全体为一个集合，简称

集。组成集的事物称为该集的元素。例如，教室中所有的学生组成一个集，它的元素是学生；实数的全体组成一个实数集，它的元素是实数；闭区间〔0，1〕组成一个点集，它的元素是〔0，1〕中的点；〔a，b〕上连续函数的全体组成一个连续函数集，它的元素是〔a，b〕上的连续函数等等。

通常用拉丁文大写字母A，B，C，…，M，N，…，X，Y，Z等表示集；用小写字母a，b，c，…，x，y，z等表示集的元素。不含任何元素的集称为空集，用ϕ或O表示。若x是集A的元素，则说x属于A，记作$x\in A$；否则说x不属于A，记作$x\overline{\in}A$。若集A的元素都是集B的元素，则说A含于B或B包含A，记作$A\subset B$或$B\supset A$。若$A\subset B$，且确有元素$a\in B$，但$a\overline{\in}A$，则说A是B的真子集。显然对任何集A均有$A\subset A$，且若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$。我们规定空集含于任何集。

我们用

$$A=\{x\mid x\text{具有性质}p\}$$

或 $$A=\{x;\ x\text{具有性质}p\}$$

表示A是由具有性质P的元素组成的集。例如

$$\begin{aligned}N&=\{n\mid n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}\\&=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}\end{aligned}$$

表示由自然数1，2，3，…组成的自然数集或正整数集。而

$$X=\{x\mid x^2-1=0\}=\{-1,\ 1\}$$

表示由-1和1组成的集。又如

$$R_2=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant 1\}$$

表示由平面上以原点为中心，边长为2的正方形内的所有点（包括边界上的点）组成的集。

2. 集的运算

我们首先给出集的相等概念，然后再引进集的加、减、乘等运算。

定义1 设A、B为二集，若$A\subset B$且$B\subset A$，则说A与B相等，记作$A=B$。

这个概念是很重要的，很多复杂的集合等式都是用它来验证的。

定义2 设A、B为二集，我们把A、B的元素放在一起作成的集，叫做A与B的和集或并集。简称“和”或“并”。记作$A+B$或$A\cup B$。而把A、B的共同元素作成的集，叫做A与B的乘积集。简称“通”或“交”。记作AB或$A\cap B$。

值得注意的是，在作和$A+B$时，A与B的共同元素只取一次。例如，$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{3, 4, 5, 6\}$，则$A+B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。$AB=\{3, 4\}$。又如，$A=[0, 2]$，$B=(1, 2)$，则$A+B=[0, 2]$，$AB=(1, 2)$。

类似地，可定义任意多个集的并与交。

定义2′ 设M是任意非空集，则$\{A_\alpha|\alpha\in M\}$是由M的所有元素决定的一族集。我们把一切A_α的元素放在一起作成的集，叫做这一族集的和或并，记作$\sum\limits_{\alpha\in M}A_\alpha$或$\bigcup\limits_{\alpha\in M}A_\alpha$，即

$$\sum_{\alpha\in M}A_\alpha=\{x|\text{有}\alpha\in M,\ \text{使}x\in A_\alpha\}.$$

而把一切A_α的共同元素作成的集，叫做这一族集的通或交，记作$\prod\limits_{\alpha\in M}A_\alpha$或$\bigcap\limits_{\alpha\in M}A_\alpha$，即

$$\prod_{\alpha\in M} A_\alpha = \{x \mid 对每个\alpha\in M,\ x\in A_\alpha\}.$$

根据和与通的定义，可以直接推出：

例1 设$A_i=\{x \mid 0\leqslant x<1+\frac{1}{i}\}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$，则

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i=[0,\ 2),\quad \prod_{i=1}^{\infty} A_i=[0,\ 1].$$

例2 设$A_i=\{x \mid -1+\frac{1}{i}<x<1-\frac{1}{i}\}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots)$，则

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i=(-1,\ 1),\quad \prod_{i=1}^{\infty} A_i=\phi.$$

若把A_i换成$A_i=\{x \mid -1+\frac{1}{i}\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{i}\}$ $(i=1,2,\cdots)$，则

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i=\{0\}.$$

注意 $\{0\}\neq\phi$.

和与通具有下述性质：

定理1 1° $A+A=A$，$AA=A$，$A+\phi=A$，

$A\phi=\phi$；

2° 交换律

$A+B=B+A$，$AB=BA$；

3° 结合律

$(A+B)+C=A+(B+C)$，$(AB)C=A(BC)$；

4° 分配律

$$A(B+C)=AB+AC;$$

5° 无限分配律

$$A\left(\sum_{\alpha\in M}A_\alpha\right)=\sum_{\alpha\in M}(AA_\alpha);$$

6° 逐项相加

$$\sum_{\alpha\in M}(A_\alpha+B_\alpha)=\left(\sum_{\alpha\in M}A_\alpha\right)+\left(\sum_{\alpha\in M}B_\alpha\right).$$

证明 只要根据集合相等的定义，便可容易地验证上述诸等式。我们只验证5°，其余留给读者作为练习。

设 $x\in A\left(\sum_{\alpha\in M}A_\alpha\right)$，则 $x\in A$，且存在 $\alpha_0\in M$，使 $x\in A_{\alpha_0}$，所以，$x\in AA_{\alpha_0}$。从而 $x\in\sum_{\alpha\in M}(AA_\alpha)$，即

$$A\left(\sum_{\alpha\in M}A_\alpha\right)\subset\sum_{\alpha\in M}(AA_\alpha).$$

反之，若 $x\in\sum_{\alpha\in M}(AA_\alpha)$，则存在 $\alpha'\in M$，使 $x\in AA_{\alpha'}$，即 $x\in A$，$x\in A_{\alpha'}$，从而 $x\in A$，$x\in\sum_{\alpha\in M}A_\alpha$，所以，$x\in A\left(\sum_{\alpha\in M}A_\alpha\right)$，即

$$\sum_{\alpha\in M}(AA_\alpha)\subset A\left(\sum_{\alpha\in M}A_\alpha\right).$$

于是由定义1便证明了5°。

定理2 1° $AB \subset A \subset A+B$;

2° 若$A_\alpha \subset C$ $(\alpha \in M)$，则 $\sum\limits_{\alpha \in M} A_\alpha \subset C$;

3° 若$A_\alpha \supset C$ $(\alpha \in M)$，则 $\prod\limits_{\alpha \in M} A_\alpha \supset C$;

4° 若$A \subset B$，C为任意集，则$A+C \subset B+C$; $AC \subset BC$.

证明 只证3°，其余留给读者练习．设$x \in C$．由假设，对一切$\alpha \in M$，都有$x \in A_\alpha$，故$x \in \prod\limits_{\alpha \in M} A_\alpha$，这说明$\prod\limits_{\alpha \in M} A_\alpha \supset C$。

定义3 设A、B为二集，我们把属于A而不属于B的所有元素作成的集，叫做A与B的差集．记作$A-B$，或$A \setminus B$。即

$$A-B=\{x \mid x \in A,\ 但x \overline{\in} B\}.$$

注意：这里不要求$A \supset B$ 若$A \supset B$，则称$A-B$为B在A的余集，记作$\mathscr{C}_A B$。在不致引起混乱时，可简记为$\mathscr{C}B$。余集具有下述性质：

定理3 1° $\mathscr{C}_S S=\phi$, $\mathscr{C}_S \phi=S$, $A+\mathscr{C}_S A=S$,

$$\mathscr{C}(\mathscr{C}A)=A;$$

2° 若$A \supset B$，则$\mathscr{C}_S A \subset \mathscr{C}_S B$;

3° 和通关系

$$\mathscr{C}\left(\sum_{\alpha \in M} A_\alpha\right)=\prod_{\alpha \in M} \mathscr{C} A_\alpha,\quad \mathscr{C}\left(\prod_{\alpha \in M} A_\alpha\right)=\sum_{\alpha \in M} \mathscr{C} A_\alpha$$

证明 留作练习。

3．集的分解

设$f(x)$是定义在集E上的实值函数，也就是说，存在

一个对应关系 f，使得对每一$x\in E$，都有唯一一个实数 $f(x)$（记作）与之对应. c为任意给定的实数，记

$$E(f\geqslant c)=\{x\mid x\in E,\ f(x)\geqslant c\},$$

它表示E中使$f(x)\geqslant c$ 的所有元素x作成的集. 类似地可以理解

$$E(f>c);\ E(f\leqslant c);\ E(f<c).$$

利用集合相等的定义，不难验证：

1° $E(f\geqslant c)+E(f<c)=E$;

2° $E(f>c)E(f\leqslant d)=E(c<f\leqslant d)$;

3° $$E(f>c)=\sum_{n=1}^{\infty}E\left(f\geqslant c+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}E\left(f>c+\frac{1}{n}\right),$$

$$E(f\geqslant c)=\prod_{n=1}^{\infty}E\left(f\geqslant c-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}E\left(f>c-\frac{1}{n}\right),$$

$$E(f<c)=\sum_{n=1}^{\infty}E\left(f\leqslant c-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}E\left(f<c-\frac{1}{n}\right),$$

$$E(f\leqslant c)=\prod_{n=1}^{\infty}E\left(f\leqslant c+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}E(f<c+\frac{1}{n}).$$

按照某种意义，将一个集合进行适当的分解是实变函数的一种重要方法。上述一些集合的分解等式今后将常常用到。

习　　题

1. $\{1\}$与$\{\{1\}\}$是否是同一集合？
2. ϕ与$\{\{\phi\}\}$是否是同一集合？
3. $A=\{A\}$是否正确？
4. 从$A+B=C$能否推出$A=C-B$？
5. $\{1,\ 2,\ 3\}+\{1,\ 2,\ \{3\}\}=$？ $\phi+\{\phi\}=$？
6. 若$A\subset B$，则$A+(B-A)=B$。
7. 证明$A-B=A\mathscr{C}B$。

§2　集合的势

通常我们数一数某一种东西的个数，实际上是把这些东西和自然数作一种对应。为了研究集合的元素的“个数”，首先把通常的对应关系，推广到一般集合上去。

1. 映　　射

定义1　设A、B为二集，如果存在一个对应关系φ，使得对于A中的每个元素x，通过φ，在B中有唯一的一个元素y与之对应，则说φ是从A到B的一个映射，或变换，或算子。y称为x在映射φ下的象，而x为y在映射φ下的原象。集

A称为映射的定义集合，而$\varphi(A)=\{\varphi(x)|x\in A\}$为映射的象集合．

当A、B都是普通的实数集时，映射就是普通的函数，因此映射是函数概念的一种推广．从A到B的映射φ记作

$$y=\varphi(x),\quad (x\in A)$$

或 $\varphi: x\mapsto y$,

或 $\varphi: A\to B$.

定义2 设φ是从集A到集B的映射，如果对任意的$y\in B$，都有唯一的$x\in A$，使

$$y=\varphi(x),$$

则说φ是从A到B的一对一的映射．如果A与B之间存在一对一的映射，就说A与B是一一对应的，记作$A\sim B$．

命题 φ是A到B的一对一的映射的$\Longleftrightarrow$*是：$\varphi(A)=B$，且$x_1, x_2\in A$，$x_1\neq x_2$时，$\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$．

显然有$A\sim A$；若$A\sim B$，则$B\sim A$；若$A\sim B$，$B\sim C$，则$A\sim C$．

例1 设$A=\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$，

$$B=\{2, 4, \cdots, 2n, \cdots\}.$$

只要令

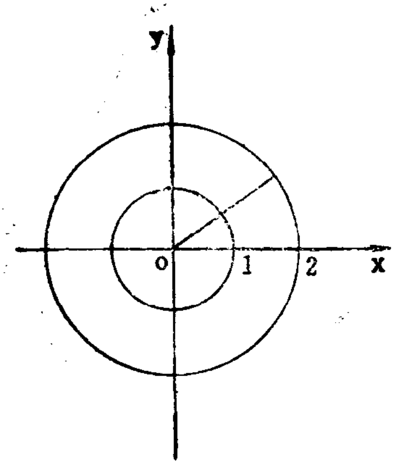
$$\varphi: n\mapsto 2n,\quad (n=1, 2, \cdots)$$

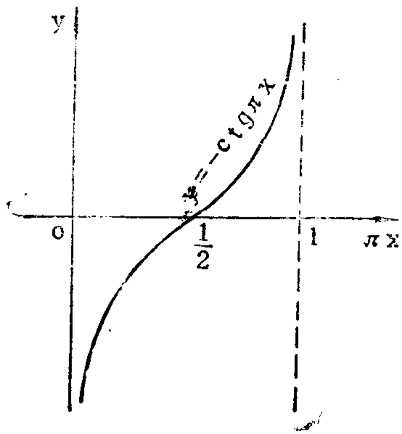
便知$A\sim B$．值得注意的是，B是A的真子集．

例2 设$A=\{(x, y)|x^2+y^2=1\}$，$B=\{(x, y)|x^2+y^2=4\}$．

只要从原点出发引射线（如下页左图），便知$A\sim B$．

*注："$\Longleftrightarrow$"表示充分必要条件，"$\Longrightarrow$"表示必要条件，"$\Longleftarrow$"表示充分条件．





例3 设$A=(0,\ 1)$，$B=(-\infty,\ +\infty)$. 令

$$y=-\operatorname{ctg}\pi x,\quad x\in A,\quad y\in B,$$

则知$A\sim B$（如上右图）.

下面给出一个判别两个集是否一一对应的重要定理，其证明可参看〔1〕的附录.

定理1(Bernstein) 设A、B为二集，如果 A、B 分别存在子集A^*、B^*，使$A\sim B^*$，$B\sim A^*$，则$A\sim B$.

2. 可数集

现在我们利用集的一一对应将集加以分类.

定义3 设n为自然数，令

$$M_n=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\},$$

A为任意非空集. 若 $A\sim M_n$，则说A 是有限集，且n为A 的计数（元素的个数）. 规定空集也是有限集，且计数为 0 . 不是有限集的集叫无限集.