高等医药院校教材

高等数学

（供中药专业用）

主编 于立芬 副主编 郑世光

上海科学技术出版社

高等医药院校教材

高　等　数　学

(供中药专业用)

主　编　于立芬
副主编　郑世光
编　委　卢国经　林　培
　　　　杨学诚

上海科学技术出版社

高等医药院校教材
高 等 数 学
(供中药专业用)
主编 于立芬 副主编 郑世光
上海科学技术出版社出版、发行
(上海瑞金二路450号 邮政编码200020)
新华书店上海发行所经销 望亭发电厂印刷厂印刷
开本 787×1092 1/16 印张15.5 字数365 000
1985年6月第1版 1999年9月第9次印刷
印数 28 401-31 400
ISBN 7-5323-0478-7/O·43(课)

前　　言

为了提高教材质量，促进高等中医药教育事业的发展，卫生部于1983年8月在上海召开了全国高等中医院校普通课、西医课教材编审会议，成立首届全国高等中医院校普通课、西医课教材编审委员会；组成十七个学科编审小组，根据卫生部1982年10月颁发的中医、针灸、中药各专业教学计划对各科教学大纲作了修订；并组织编写本套教材.

中医学院的普通课和西医课教材主要是为培养中医药高级专门人才服务的．本套教材是根据各专业培养目标对本门学科的要求，按照新的教学大纲，各编审小组制定了编写提纲，在总结二十多年来中医学院普通课、西医课教学经验的基础上编写而成.

在编写过程中，以辩证唯物主义和历史唯物主义为指导，力求从高等中医教育的实际出发，既保证教材内容的科学性、系统性和完整性，又贯彻“少而精”和理论联系实际的原则．在更新教材内容的同时，注意充实近年来运用现代科学技术研究中医药学的新成果，从而使本套教材为培养高级中医药人才编写出新的风格和特点.

本套教材包括《英语》、《日语》、《高等数学》、《数理统计方法》、《医用物理学》、《物理学》、《无机化学》、《有机化学》、《物理化学》、《分析化学》、《正常人体解剖学》、《组织学与胚胎学》、《生理学》、《生物化学》、《微生物与寄生虫学》、《病理学》、《药理学》、《西医内科学基础》和《西医外科学总论》等十九门学科，共二十二种教材．其中部分教材是在原有基础上更新、充实、修改而成.

教材质量的高低，将直接影响培养目标的实现．要使中医学院的普通课、西医课教材适应高等中医教育的需要，还要进行长期的努力．要通过大量实践，不断总结经验，加以提高，才能逐步完善．由于水平有限，经验不足，编写时间仓促，本套教材存在不足之处，恳切期望广大师生和读者随时提供宝贵意见，以便在今后修订时加以改进.

全国高等中医院校普通课、西医课教材编审委员会

一九八四年十月

编　写　说　明

本书是由卫生部高等中医院校普通课、西医课教材编审委员会组织编写和审定的教材，供全国中医院校使用.

根据卫生部1982年制订的高等中医院校中药专业的教学计划要求，编写中注意了结合医药实际、突出重点及与有关学科的联系．讲授约需90学时.

本教材内容与1983年中学执行的数学教学大纲相衔接．考虑到1983年11月教育部颁发的“高中数学教学纲要的基本要求”内容，我们编写了附录Ⅰ：导数与微分，对于未学过导数和微分的班级，可先用附录补课，然后接1·2讲授.

为了培养学生分析问题解决问题的能力和计算能力，书中配备了较多的例题和习题，使用时可根据学生的水平适当取舍.

本教材共八章．第1、2、3章由安徽中医学院卢国经编写；第4、5、6章由广西中医学院杨学诚编写；第7章由山东中医学院于立芬编写；第8章由成都中医学院郑世光编写；附录Ⅰ由湖北中医学院林培编写.

由于编者水平有限，时间匆促，书中不当之处难免．希望各院校在使用过程中提出宝贵意见，以便修订时改进.

编　者

1984年7月

目　　录

1. 导数、微分的应用

求函数的导数或微分的方法叫做微分法．以前，我们已学过了基本初等函数的导数或微分公式，以及函数的和、差、积、商的求导数法则（微分法则）和复合函数的求导数法则（微分法则），所以就能够求出任何一个初等函数的导数或微分了．作为反映函数的变化率的导数，在自然科学及技术科学领域内是一个有力的工具，因此本章将继续介绍导数和微分的应用．

1·1 初等函数与分段函数

在介绍分段函数概念之前，我们先回顾一下有关初等函数的一些内容（概念、求导方法和重要性质）．

1·1·1 初等函数

定义 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这五种函数统称为**基本初等函数**．由基本初等函数及常数经过有限次的四则运算与函数复合步骤所构成的，并用一个式子表示的函数，叫做**初等函数**．

例1 求 $y=\operatorname{tg}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ 的导数．

解： 把 y 看成由 $y=\operatorname{tg} u$ 和 $u=1+\dfrac{1}{x}$ 复合而成的．即令 $y=\operatorname{tg} u$ 和 $u=1+\dfrac{1}{x}$，于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}(\operatorname{tg} u)\cdot\frac{d}{dx}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\sec^2 u\cdot\frac{-1}{x^2}$$

$$=-\frac{\sec^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x^2}.$$

例2 求 $y=\cos\ln x^2$ 的导数．

解： 令 $y=\cos u$、$u=\ln v$、$v=x^2$，于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=-\sin u\cdot\frac{1}{v}\cdot 2x=-\sin\ln x^2\cdot\frac{2x}{x^2}=-\frac{2}{x}\sin\ln x^2.$$

对复合函数求导较熟练之后，可不必再写出中间变量，只要分析清楚函数的复合关系，弄清楚是哪一变量对哪一变量求导，做到心中有数，就可求出复合函数对自变量的导数．

例3 求 $y=(\sin 3x)\cdot\sqrt{1+x^2}$ 的导数．

解：

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1+x^2}\,\frac{d}{dx}(\sin 3x)+\sin 3x\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{1+x^2})$$

$$=3\sqrt{1+x^2}\cos 3x+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin 3x.$$

在中学课本中曾经指出：**基本初等函数在其定义域内的每一点处都是连续的．**在较详

细的数学分析书中给予了证明，并根据连续函数的运算法则，得出**“一切初等函数在它们的定义域内是连续的”**重要结论. 这个结论不但使我们作初等函数的图形有了理论上的根据(以往作初等函数的图形时，一般都是描出满足于方程 $y=f(x)$ 的有限个点，然后将这些点连成一光滑连续曲线.)；并且还提供了求初等函数极限的简捷方法：如果已知一点在某初等函数的定义域内，那么这个函数一定在该点连续，于是欲求自变量趋近于该点时函数的极限，只要把函数解析式中的自变量换成它的极限就行了.

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \ln \operatorname{tg} x$.

解：点 $x=\frac{\pi}{4}$ 是初等函数 $\ln \operatorname{tg} x$ 的定义域内的一个点，所以 $\ln \operatorname{tg} x$ 在点 $x=\frac{\pi}{4}$ 处连续，于是

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \ln \operatorname{tg} x=\ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\ln 1=0.$$

1·1·2 分段函数

定义 一个函数在不同的范围内用不同的解析式表示出来，这样的函数叫做**分段函数**.

例 5 按照地球的中纬度地区平均大气状态，国际上规定了标准大气. 在标准大气的情况下，气温 T°C 与高度 h 公里的变化规律是

$$T=\begin{cases}15-6.5h, & (h<11)\\ -56.5, & (11\leqslant h\leqslant 80)\end{cases}$$

这样，当高度在 11 公里以下时，气温随高度增加而下降；高度在 11 公里到 80 公里之间(同温层)时，气温保持在 -56.5°C. 图 1·1 就是这个函数的图形，在 $h<11$ 的范围内，是一条下降的直线，在 $11\leqslant h\leqslant 80$ 的范围内是一条平行于横轴的直线. 显然，分段函数的图形是由各段结构不同的图形组成的. 要注意：这是一个函数，切不可误认为是两个函数，因此分段函数就不属初等函数的范畴.

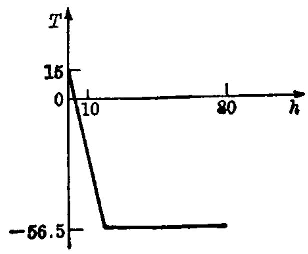

图 1·1

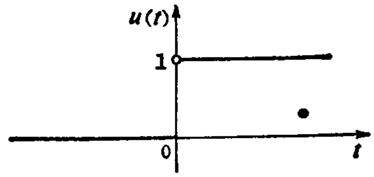

图 1·2

例 6 在电子技术中经常遇到的“单位跳跃函数”的表达式是 $u(t)=\begin{cases}0, & (t\leqslant 0)\\ 1, & (t>0)\end{cases}$，作出它的图形，并求 $u(0)$、$u(1)$、$u(-1)$ 的值.

解：图形如图 1·2 所示.

分段函数求函数值时，不同点的函数值应由相应区间的式子确定. 根据 $u(t)$ 的表达式，$t=0$ 和 $t=-1$ 处的函数值 $u(0)$、$u(-1)$，应由第一个式子确定，因为这两个值都在 $t\leqslant 0$ 的区间内，所以 $u(0)=0$，$u(-1)=0$. $t=1$ 处的函数值 $u(1)$，应由第二个式子确定，因为这个值在 $t>0$ 的区间内，所以 $u(1)=1$.

例7 求函数

$$y=\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}, & (x<-1) \\ \sqrt{1-x^2}, & (-1\leqslant x\leqslant 1) \\ 0, & (x>1) \end{cases}$$

在 $x=-2$, $x=\dfrac{1}{2}$, $x=1$, $x=0$, $x=\dfrac{3}{2}$ 的函数值.

解:

$$y|_{x=-2}=-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2};$$

$$y|_{x=\frac{1}{2}}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$y|_{x=1}=\sqrt{1-1^2}=0;$$

$$y|_{x=0}=\sqrt{1-0^2}=1;$$

$$y|_{x=\frac{3}{2}}=0.$$

例8 求 $y=|x|$ 的导数.

解:

$$y=|x|=\begin{cases} x, & (x>0) \\ 0, & (x=0) \\ -x, & (x<0) \end{cases}$$

当 $x>0$ 时, $y'=1$;

当 $x<0$ 时, $y'=-1$;

当 $x=0$ 时, $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{y|_{x=0+\Delta x}-y|_{x=0}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$,

Δx 由大于零而趋近于零(记作 $\Delta x\to 0^+$)时, $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}\to 1$①, Δx 由小于零而趋近于零(记作 $\Delta x\to 0^-$)时, $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}\to -1$, 因此函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

注意: **如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 那么 $f(x)$ 在点 x_0 处一定连续.** 但逆定理不成立, 例如函数 $y=|x|$ 在点 $x=0$ 处连续, 但在点 $x=0$ 处无导数.

1·2 无穷小量

1·2·1 无穷小量

定义 如果函数 $f(x)$ 当 $x\to a$(或 $x\to\infty$)时以 0 为极限, 则称 $f(x)$ 是当 $x\to a$(或 $x\to\infty$)时的**无穷小量**, 简称**无穷小**.

例如, 当 $x\to 1$ 时, $x-1$ 是一个无穷小量; 又如, 当 $x\to\infty$ 时, $\dfrac{1}{x}$ 是无穷小量.

要注意: 不要把无穷小与很小的数(例如百万万分之一)混为一谈. 一般无穷小是一个变量, 在 $x\to a$(或 $x\to\infty$)时, 它要无限接近于 0. 但是, 唯有零这个数可以看为无穷小, 因为对函数 $f(x)\equiv 0$(当 x 取任意实数值时, 函数 $f(x)$ 的对应值皆为 0)来说, 显然当 $x\to a$(或

① 这里 $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=1$.

$x\to\infty$)时，$f(x)\to 0$，其余无论怎样小的数都不是无穷小.

如果某一个量在变化过程中，它的绝对值无限增大，我们就称它为无穷大量.

很明显，**无穷小量(不等于零的)与无穷大量互为倒数.**

如当 $x\to 2$ 时，$x-2$ 是个无穷小量，而 $\frac{1}{x-2}$ 则是无穷大量，它们互为倒数.

1·2·2　无穷小量的比较

根据无穷小量的定义，引用极限四则运算法则，便得到无穷小量的运算法则，即如果函数 $\alpha(x)$、$\beta(x)$ 是当 $x\to a$(或 $x\to\infty$)时的两个无穷小量，则 $\alpha(x)\pm\beta(x)$、$C\alpha(x)$(C 为常数)、$\alpha(x)\cdot\beta(x)$ 也都是当 $x\to a$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量. 这就是说，**两个无穷小量之和、差、积，以及常数与无穷小量之积也都是无穷小量.** 但是，两个无穷小量之比(即商)却不一定仍是无穷小量，如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\infty$ 等等. 虽然当 $x\to 0$ 时，$\sin x$、$\sin^2 x$、x、x^2 都是无穷小量，但各自趋近于零的快慢却有区别. 这就是无穷小量阶的概念.

定义　设 α、β 是两个无穷小量，即 $\lim\alpha=0$、$\lim\beta=0$(如果是数列，$\lim$ 应理解为 $\lim\limits_{n\to\infty}$；否则理解为 $\lim\limits_{x\to a}$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}$)：

1. 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$(这说明分子 α 趋于零的速度比分母 β 趋于零的速度快得多)，则称 α 是比 β 高阶的无穷小，记作 $\alpha=o(\beta)$；或称 β 是比 α 低阶的无穷小.

2. 若 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=k(k\neq 0)$，则称 α 与 β 是同阶无穷小(这说明 α 与 β 趋于零的速度差不多)；特别当 $k=1$ 时，就称 α 与 β 是等价无穷小(这说明 α 与 β 趋于零的速度一样)，记作 $\alpha\sim\beta$.

因此，由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，得 $\sin x\sim x$(当 $x\to 0$ 时). 故当 $|x|$ 很小时，可以用 x 近似代替 $\sin x$，即 $\sin x\approx x$. 又由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=0$ 可知，当 $x\to 0$ 时，$\sin^2 x=o(x)$，即 $\sin x$ 是比 x 高阶的无穷小，x 是比 $\sin^2 x$ 低阶的无穷小. 再由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x+1}}=2$ 可知，当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 与 $\frac{1}{2x+1}$ 是同阶无穷小.

1·2·3　无穷小量与极限的关系

下面是一个常常引用的关系.

定理　若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，则 $\alpha=f(x)-A$ 当 $x\to a$ 时是无穷小量，即 $f(x)=A+\alpha$，其中 α 是当 $x\to a$ 时的无穷小量.

证明：由定理的条件可得

$$\lim_{x\to a}\alpha=\lim_{x\to a}[f(x)-A]=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}A=A-A=0,$$

所以 $\alpha=f(x)-A$ 是当 $x\to a$ 时的无穷小量.

例　设函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，自变量从 x 改变为 $x+\Delta x$ 时，函数的增量为 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. 我们问，取函数在点 x 处的导数 $f'(x)$ 与自变量的改变量 Δx 的乘积(即函

数 $y=f(x)$ 在点 x 处的微分，记作 $\mathrm{d}y$）作为 Δy 的近似值，即 $\Delta y\approx f'(x)\Delta x$，是否也有良好的精确度？

解：由导数的定义

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

及上面的定理可知 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$（当 $\Delta x\to 0$ 时，$\alpha\to 0$），所以

$$\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x, \tag{1-1}$$

最后一项 $\alpha\cdot\Delta x$ 是较 Δx 高阶的无穷小量.

由此看来，对于可导函数 $f(x)$，近似公式

$$\Delta y\approx f'(x)\Delta x \tag{1-2}$$

具有两方面的优越性：(1) $f'(x)\Delta x$ 是 Δx 的一次函数，便于计算；(2) 当 $|\Delta x|$ 很小时，取 $f'(x)\Delta x$ 作为 Δy 的近似值，误差是 Δx 的高阶无穷小量，即有良好的精确度.

1·3 变化率问题

我们知道，导数（变化率）的概念是由实际问题中概括出来的. 为加深对这一概念的理解，我们来讨论如何用变化率（导数）来描述具体问题中量的相对变化.

例 1 ［体积变化率］若容器中溶液的体积不断变化（增加或减少），则溶液的体积 V 是时刻 t 的函数，记为 $V=f(t)$. 在时间区间 $[t,\ t+\Delta t]$ 内，体积的平均变化率为 $\frac{\Delta V}{\Delta t}$. 令 $\Delta t\to 0$，得体积的变化率为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}.$$

如果不断地向容器中注入溶液，那么在 $[t,\ t+\Delta t]$ 这段时间内，溶液的注入量恰好等于容器中溶液体积的改变量 ΔV，所以溶液的注入速率为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$. 相反，如果溶液从容器中不断流出，那么在 $[t,\ t+\Delta t]$ 这段时间内，溶液的流出量为 $f(t)-f(t+\Delta t)$，它等于 $-\Delta V$（容器中溶液体积的改变量 ΔV 是负的），所以溶液的流出速率为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{-\Delta V}{\Delta t}=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ $\left(\text{显然 }\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<0\text{，因为 }V\text{ 是减函数}\right)$.

例 2 ［浓度变化率］ 在恒容化学反应中，生成物的浓度不断地变化，其浓度 x 是时刻 t 的函数. 由于在 $[t,\ t+\Delta t]$ 这段时间内，浓度的平均变化率为 $\frac{\Delta x}{\Delta t}$，所以在时刻 t 的浓度变化率为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

在恒容化学反应中，化学反应速度可用生成物浓度的增加率来表示，所以反应速度为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. 也可用反应物浓度的减少率来表示，设在反应过程的某一时刻 t，反应物的浓度为 $c=c(t)$. 生成物的浓度为 $x=x(t)$，两者的关系为 $x(t)=c_0-c(t)$，其中 c_0 为反应物的初始浓度，所以反应速度 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c_0-c)=-\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}$.

例 3　某物质在化学分解中，开始时的质量是 m_0，经过时间 t 后，所剩下的质量是 m，它们之间的关系式为 $m=m_0e^{-kt}$，其中 k 是正的常数. 试求这物质的分解速度.

解：由于在 $[t, t+\Delta t]$ 这段时间内，平均分解速度为 $\dfrac{m(t)-m(t+\Delta t)}{\Delta t}$，所以分解速度 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{-\Delta m}{\Delta t}=-\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=-m_0e^{-kt}\cdot(-k)=km_0e^{-kt}=km$. 这结果表明物质分解的速度与该物质本身的质量成正比例.

这类变化过程在自然界中是常见的，例如放射性元素镭的蜕变、微生物的增殖、物体的传热等现象都是这种过程.

例 4　一块金属圆板受热膨胀，膨胀过程中始终保持圆形. 已知当半径为 2 厘米时，半径的增加率为 0.01 厘米/秒，求该时刻面积的增加率.

解：圆板的半径 R 和面积 S 都是时刻 t 的函数，本题要求从已知的半径增加率 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ 确定未知的面积增加率 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$.

由 $S=\pi R^2$，使用复合函数求导方法，得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R}\cdot\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=2\pi R\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}.$$

这就是说，任何时刻圆板面积的增加率是半径增加率的 $2\pi R$ 倍. 将 $R=2$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=0.01$ 代入上式，得到该时刻面积的增加率

$$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{R=2}=2\pi\times 2\times 0.01=0.04\pi\approx 0.13(\text{厘米}^2/\text{秒}).$$

在这个问题中，两个变量 S 和 R 都是时间 t 的函数，我们先找出这两个变量间的函数关系，再利用复合函数的导数公式，得到这两个变量对时间的变化率之间的关系，即 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ 间的关系，这时就可从一个变量的变化率求出另一个变量的变化率.

在许多实际问题里，常有好几个变量参加变化，而每一个变量都是时间的函数，这时，根据问题的条件可以建立这些变量之间的关系式，把这个式子对时间求导数，再将已知的变化率代入求导数后的式子里，便可求得未知的变化率. 这就是所谓**相关变化率问题的解法**.

例 5　在储存器内，理想气体的体积为 1000 立方厘米时，压力为每平方厘米 5 公斤，如果温度不变，压力以每小时 0.05 公斤的速率减少，问体积的增加率是多少？

解：已知压力变化率，要求出体积的变化率，这是一个相关变化率问题. 由物理学知道，在温度不变的条件下，理想气体体积 V 与压力 P 有如下关系

$$V=\frac{C}{P}\quad(C\text{ 是常数}).$$

因为 $P=1000$ 时 $V=5$，所以 $C=1000\times 5=5000$，

从而
$$V=\frac{5000}{P}.$$

上式两端对时间 t 求导数

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\frac{5000}{P^2}\cdot\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}.$$

因为压力 P 以每小时 0.05 公斤的速率减小，即

$$\frac{dP}{dt}=-0.05,$$

所以
$$\frac{dV}{dt}=-\frac{5000}{P^2}(-0.05)=\frac{250}{P^2}.$$

这就是所求的体积变化(增加)率，它与压力的平方成反比．当 $P=5$ 公斤时，

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{P=5}=\frac{250}{5^2}=10,$$

即在压力为 5 公斤时，体积 V 以每小时 10 立方厘米的速率增加．

例 6 从盛满溶液的锥形漏斗中按匀速 v_0 米^3/分流出溶液，若漏斗的高度为 H 米，顶径为 D 米，求液面达一半高度时液面的下降速率．

解：首先选择变量，并确定它们之间的关系．如图 1·3，设经过 t 分钟后，液面高度为 x 米，溶液体积为 V 米^3，液面半径为 r 米，则 $\frac{r}{x}=\frac{\frac{D}{2}}{H}$，得 $r=\frac{D}{2H}x$，故 $V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{D}{2H}x\right)^2\cdot x=\frac{\pi D^2}{12H^2}x^3$.

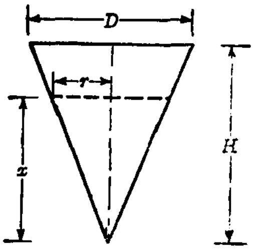

图 1·3

其次是决定变化率之间的关系．两边对于时间 t 求导，得

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi D^2}{12H^2}\cdot 3x^2\cdot\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi D^2x^2}{4H^2}\cdot\frac{dx}{dt},$$

其中 $\frac{dx}{dt}$ 是液面高度的变化率，溶液的流出速率是 $-\frac{dV}{dt}$.

最后，代入已知数据算出结果．已知 $\frac{dV}{dt}=-v_0$ 米^3/分、$x=\frac{H}{2}$ 米，

由
$$\frac{dx}{dt}=\frac{4H^2}{\pi D^2x^2}\cdot\frac{dV}{dt},$$

得
$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\frac{H}{2}}=\frac{4H^2}{\pi D^2\cdot\left(\frac{H}{2}\right)^2}\cdot(-v_0)=-\frac{16v_0}{\pi D^2}\text{(米/分)},$$

所以此时液面的下降速率为 $\frac{16v_0}{\pi D^2}$ 米/分．

1·4 函数图形的描绘

1·4·1 曲线的凹凸和拐点

为了正确地作出函数的图象，就要研究曲线的弯曲方向以及曲线在哪些点改变了弯曲方向．曲线的弯曲方向是用曲线与其切线的相对位置来描述的，在图 1·4 中曲线位于切线的上方，我们把这一段曲线叫做凹的，在图 1·5 中，曲线位于切线的下方，我们把这一段曲线叫做凸的．

如果曲线的方程 $y=f(x)$ 的二阶导数存在，在它是凹的情况下，当切点 $M(x, y)$ 按照它的横坐标 x 增大而变动时，切线的斜角(锐角或钝角)就增大，因而切线的斜率 $\operatorname{tg}\alpha$ 也随

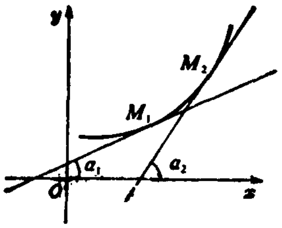

图 1·4

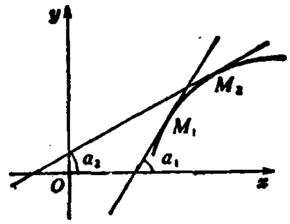

图 1·5

着 x 增大而增大. 但 $\operatorname{tg}\alpha=f'(x)$, 所以 $f'(x)$ 是递增的, 因而 $f''(x)\geqslant0$, 同样道理, 在曲线 $y=f(x)$ 是凸的情况下 $f''(x)\leqslant0$.

另一方面, 如果 $f''(x)>0$, 则 $f'(x)$ 是递增的, 即 $y=f(x)$ 的切线斜率是递增的, 这就是图 1·4 的情形, 所以曲线是凹的. 同样可得: 如果 $f''(x)<0$, 则曲线 $y=f(x)$ 是凸的.

例如, 对于正弦曲线 $y=\sin x$ 来说, $y''=-\sin x$, 在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时, $y''\leqslant0$; 在 $\pi\leqslant x\leqslant2\pi$ 时, $y''\geqslant0$. 即正弦曲线在区间 $[0, \pi]$ 上是凸的, 在区间 $[\pi, 2\pi]$ 上是凹的, 如图 1·6 所示.

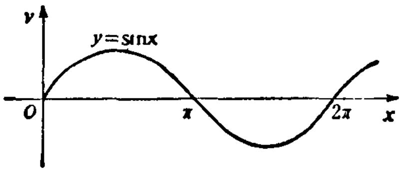

图 1·6

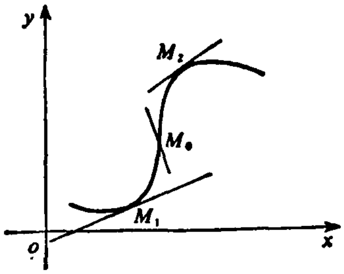

图 1·7

有时一条曲线有凹的部分也有凸的部分, 这两部分的分界点叫拐点, 如图 1·7 中的点 M_0 就是拐点, 注意在拐点 M_0 的左侧, 曲线位于切线的上方, 在拐点右侧曲线位于切线的下方, 这样, 我们就容易理解在拐点处切线是穿过曲线的.

若曲线 $y=f(x)$ 有拐点, 则当曲线从凹的部分过拐点后变为凸的部分, 二阶导数就由大于零变为小于零, 所以只要 $f''(x)$ 是连续的, 则在拐点处 $f''(x)$ 必须等于零. 当曲线从凸的部分变到凹的部分时, 也能得出同样的结论.

这样, 我们就得出求曲线 $y=f(x)$ 的拐点的方法:

1) 求出二阶导数.

2) 求出使二阶导数等于零的 x 值, 即解方程 $f''(x)=0$.

3) 检查在上面解得的 x 值左右, $f''(x)$ 的符号是否改变, 如果改变就是拐点, 不改变则不是拐点.

例 1　求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点, 并讨论其凹凸性.

解:

$$y'=12x^3-12x^2,$$

$$y''=36x^2-24x,$$

令

$$y''=36x^2-24x=0,$$

得

$$x_1=0;\ x_2=\frac{2}{3}.$$

列表讨论如下: