组合数学

算法与分析

上册

卢开澄

清华大学出版社

组 合 数 学

算法与分析

上 册

卢 开 澄

清华大学出版社

内容简介

全书分上下两册，共十一章。上册六章：排列组合，母函数与递推关系，容斥原理与鸽子巢原理，Pólya 定理，线性规划，区组设计。下册五章：搜索技术与整数规划，优先策略分治策略与快速算法，分类与查找，NP 理论与近似算法。

本书以研究算法与算法分析为中心内容，理论联系实际，适合于计算机科学系、数学系、以及经济管理系运筹学专业师生作为教材或参考书。

组合数学——算法与分析（上册）

卢开澄　编著

★

清华大学出版社出版

北京·清华园

清华大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

★

开本：850×1168　1/32　印张　13 1/4　字数　342 千字

1983 年 9 月第一版　1983 年 9 月第一次印刷

印数：1～35000

统一书号：15235·84　定价：1.70 元

目　　录

前　　言

快速电子计算机的出现是本世纪的大事。它的蓬勃发展改变了这个世界的面貌，也促进了数学的研究。比如从五十年代初期以来，在它的影响下计算数学所取得的成就，使得许多困难问题有了有效的解决工具。

计算机科学是研究算法的科学。本书的主要目的在于讨论不同于“计算方法”的一类算法，称之为“组合算法”。问题来源于计算机、数学、运筹学等方面的离散对象，近年来发展迅速，其态势颇类似于五十年代的计算方法。

计算方法研究的是连续变量的离散化，从而引起了对差分格式的收敛性和稳定性研究。与之相应的，组合算法除了讨论算法之外，还要研究算法的复杂性，即对算法所需的时间和存储单元作出估计（也就是所谓的“时间复杂性”和“空间复杂性”）。

本书的第一部分是讨论“组合分析”，它是基础理论。组合分析和组合算法的关系十分类似于“数学分析”之与“计算方法”。

当然，组合算法还很年轻。随着它的发展，许多带有普遍性的规律将逐步形成。本书仅就组合数学研究些什么问题作个介绍。大致可分为以下几部份：

(1) 组合分析（第 1—4 章），这一部份是全书的基础，为后面的讨论作准备。主要研究计数与枚举。

(2) 组合优化(第 5 、 7 章)，讨论线性规划及整数规划问题。

(3) 组合设计（第 6 章），这一部份内容不仅在科学的实验中有重大的意义，还和编码理论有密切关系。

(4) 算法与算法分析（第 7—11 章）第 7 章介绍搜索法，特别

是 DFS 算法与分支定界法，并结合整数规划深入讨论。第 8 章动态规划，它实际上是算法的一种，这一点与线性规划和整数规划不同。第 9 章优先策略与分治策略。第 10 章分类与查找，重点在于算法的分析。第 11 章讨论 NP 理论及近似算法。

“图论”本是“组合数学”这个“家族”的一个主要成员，但它已成长壮大，独立出去，故这里不再重复。

本书是作者在清华大学计算机工程与科学系，先后对研究生及本科生讲授该课的基础上写成的。由于作者水平有限，错误在所难免，望读者指正。

第一章 排列组合

§1 加法法则与乘法法则

(1) 引论

什么是“组合数学”？要给它下个确切的定义是不容易的．正如前言中所说的那样，它还年轻，还在发展中．本书采用告诉读者“组合数学主要研究哪些问题？”来回答这问题．因此真正了解这问题是在读完全书的终了，而不是现在．

组合分析研究的主要内容是计数和枚举．即计算具有某种特性的对象有多少？或进而把它完全列举出来．

“计数”在许多方面有其重大作用，比如概率论，要计算发生具有某种性质的事件的概率等于多少？往往首先要计算出具有该性质的事件的数目．又如物理学家要研究物质的物理性质，就要计算电子被分配在不同能级的不同状态数有多少？对于计算机科学工作者，计数还有其特殊的意义；计算机科学是研究算法的一门科学，必须要对算法所需要的计算量和存储单元作出估计．读者将发现前面的计数讨论，许多是为后面的复杂性估计作准备．就计数而言，排列和组合是最常见到的基本问题．

(2) 加法法则与乘法法则

加法法则与乘法法则是在计数研究中最常用也是最基本的两个法则．以下设事件 A 与事件 B 是不同的两类事件。

(*a*) 加法法则：

设事件 A 有 m 种产生方式， 事件 B 有 n 种产生方式， 则

“事件 A 或事件 B”有 $m+n$ 种产生方式。

例如大于零而比 10 小的偶数有 4，即（2，4，6，8）；大于零而小于 10 的奇数有 5，即（1，3，5，7，9）；则大于零小于 10 的整数有 $9=4+5$，即（1，2，3，4，5，6，7，8，9）。这里事件 A 指的是大于零小于 10 的偶数；事件 B 指的是大于零小于 10 的奇数。大于零小于 10 的整数，不外乎或为偶数或为奇数两种可能，即属于 A 或属于 B。

（b）乘法法则：

若事件 A 有 m 种产生方式，事件 B 有 n 种产生方式，则“事件 A 与事件 B”有 mn 种产生方式。

例 1. 设一个符号由两个字符组成，第 1 个字符有 a、b、c、d、e 五种方式，第 2 个字符有 1、2、3 三种方式。则根据乘法法则，该符号具有 $5\times3=15$ 种方式。即

$$\begin{array}{ccccc} a1, & b1, & c1, & d1, & e1, \\ a2, & b2, & c2, & d2, & e2, \\ a3, & b3, & c3, & d3, & e3. \end{array}$$

例 2. 从 A 到 B 有 3 条不同的道路，从 B 到 C 有 2 条不同的道路，则从 A 经 B 到 C 的道路数

$$n=3\times2=6.$$

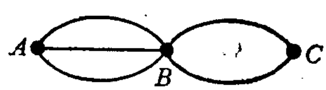

图 1—1—1

例 3. 求比 10000 小的正整数中含有数字 1 的数的个数。

解： 先求所有 4 位数中不含有数字 1 的个数，即求由 {0，2，3，4，5，6，7，8，9} 9 个数字组成的 4 位数的个数。每一位都有 9 种出现方式，根据乘法法则，由 9 个数字组成的 4 位数个数 $=9\times9\times9\times9=81^2=6561$，其中包含一个 0000 不属于正整数。故比 10000 小不含数字 1 的 4 位正整数个数 $=6561-1=6560$。

所以小于10000含有数字1的4位数个数$=9999-6560=3439$。

§2 排列与组合

定义：从n个不同的元素中，取r个按次序排列，称为从n中取r个排列，其排列数记以$P(n,r)$。

定义：从n个不同元素中，取出r个而不考虑其次序时，称为从n个中取r个组合，其组合数记以$C(n, r)$，或记以$\binom{n}{r}$。

例如从100个成员中选出20人编成一小组，不必考虑先后次序，所以是一个组合问题，共有$C(100, 20)$种方案。如若考虑100名选手中选出20名依顺序排成一个队，则有考虑次序的必要，故是排列问题，共有$P(100, 20)$种方案。

例：从A、B、C、D中取3个组合，则有以下几种组合形式：$\{A,B,C\}$，$\{A,B,D\}$，$\{A,C,D\}$，$\{B,C,D\}$。若从A、B、C、D中取3个排列，则上面所得到的4组，再加以排列，得

$$ABC,\ ACB,\ BAC,\ BCA,\ CAB,\ CBA,$$

$$ABD,\ ADB,\ BAD,\ BDA,\ DAB,\ DBA,$$

$$ACD,\ ADC,\ CAD,\ CDA,\ DAC,\ DCA,$$

$$BCD,\ BDC,\ CBD,\ CDB,\ DBC,\ DCB.$$

从n个中取r个排列的典型模型是把n个有标志的球，取r个放到r个有区别的盒子里，每盒一个，如

$\boxed{(1)}$　　$\boxed{(2)}$　…………　$\boxed{(r)}$

供选取球数：　n个　　$n-1$个　　$n-r+1$个

如上图所示，第一个盒子有n个球可供选取，第2个盒子仅有$(n-1)$个球可供选取，…，最后一个盒子则只有$n-r+1$个球可供选择。根据乘法法则，应有

$$P(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}. \tag{1—2—1}$$

（1—2—1）是 $P(n,r)$ 的计算公式，当 $r=n$ 时有

$$P(n,n)=n!.$$

如果球是有标志，盒子是完全一样的，而且不考虑其次序，则得从 n 个取 r 个的组合问题。即组合的典型问题是把 n 个有标志的球，取 r 个放到 r 个无区别的盒子里，每盒一个。自然也可以看作是取 r 个无标志的球，放到 n 个有区别的盒子，每盒一球的方案数（不考虑次序）。对每一个方案再考虑盒子的排列次序，可得 $P(n,\ r)$ 与 $C(n,\ r)$ 的关系：

$$P(n,r)=r!C(n,r),$$

$$\therefore\quad C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}. \tag{1—2—2}$$

下而举出若干例子，通过它使能熟练灵活而且正确地掌握排列组合，以及加法法则乘法法则等概念。

例 1. 有 5 本日文书，7 本英文书，10 本中文书，(1) 从中取两本不同文字的书，问有多少种方案？ (2) 若取两本相同文字的，又有多少种方案？ (3) 任取两本，不问是否相同文字，有多少种方案？

解： ① 取两本不同文字，可以有日英，中日，中英三种不同的组合法。根据乘法法则有：

日、英各一本的方案数 $=5\times7=35$ 种，

中、日各一本的方案数 $=10\times5=50$ 种，

中、英各一本的方案数 $=10\times7=70$ 种。

依据加法法则可得：

取两本不同文字的方案数 $N_1=35+50+70=155$ 种。

② 取两本相同文字的，可有两本日文，两本英文，和两本中文三种，根据加法法则得

$$N_2=C(5,2)+C(7,2)+C(10,2)=$$

$$=10+21+45=76 \text{ 种。}$$

③ 因为不问是什么文字，相当于从 22 本书中取 2 本组合，故有方案数为

$$N_3=C(22,2)=\frac{22\times 21}{2}=231 \text{ 种。}$$

或根据加法法则得 $N_3=N_1+N_2=155+76=231$ 种。

例 2. 从 1～300 之间任取 3 个不同的数，使得这 3 个数的和正好被 3 除尽，问共有几种方案？

解： 被 3 除的余数不外乎 ① 余 0，即被 3 除尽；② 余 1；③ 余 2。故 1～300 的 300 个数可分成 3 组：

$$A=\{1,\ 4,\ 7,\cdots,298\};$$

$$B=\{2,\ 5,\ 8,\cdots,299\};$$

$$C=\{3,\ 6,\ 9,\cdots,300\}.$$

显然，集合 A 的数被 3 除余 1，集合 B 的数被 3 除余 2，集合 C 的数被 3 除尽。

任取三个数其和正好被 3 除尽的有如下四种情况：

① 三个数同属于集合 A，应有 $C(100,\ 3)$ 种方案；

② 三个数同属于集合 B，应有 $C(100,\ 3)$ 种方案；

③ 三个数同属于集合 C，应有 $C(100,\ 3)$ 种方案；

④ 三个数分别属于集合 A、B、C，根据乘法法则应有 100^3 种方案。

根据加法法则，任取三个不同的数，它的和正好被 3 除尽的方

案数应为

$$N = 3C(100,3) + 100^3 = 3 \times \frac{100 \times 99 \times 98}{3 \times 2 \times 1} + 1000000 =$$

$$= 3 \times 161700 + 1000000 = 485100 + 1000000 =$$

$$= 1485100 .$$

例 3. 某车站有 1 到 6 六个入口处，每个入口处每次只能进一个人，问一小组 9 个人进站的方案数有多少？

解法 1： 若把从第 1 入口处到第 6 入口处依入口顺序排列，可得 9 个人的一种排列，可是哪几个人从哪个入口处入口的讯息消失了.为此相邻两个入口的人员之间加入一个标志，当然标志是没有区别的，关键在于标志所在的位置．故问题导至若 14 个元素中有 5 个元素无区别，9 个不相同，求其不相同的排列数.例如从 1—14 的 14 个数中任取 5 个，设为(3,5,9,11,13)，对应一种入口顺序示意图：

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \times & \times & \bigcirc & \times & \bigcirc & \times & \times & \times & \bigcirc & \times & \bigcirc & \times & \bigcirc & \times \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & & 3 & & 5 & & & & 9 & & 11 & & 13 & \end{array}$$

其中 ○ 为标志，× 为 9 个人的一种排列，可见排列的前两个人从第 1 入口处入口，第 3 个人从第 2 个入口处入口，….

故进站的方案数 $N = 9!C(14,\ 5) = \dfrac{14!}{5!9!}9! =$

$$= \frac{14!}{5!} = 726485760 .$$

解法 2： 和解法 1 相同，在相邻两入口处入口的人员之间加一个标志，问题导至 14 个对象的全排列中，由于其中 5 个标志是无区别的，故其重复度为 5!。于是得：

进站的方案数 $N = 14!/5!$.

解法 3：第 1 个人有 6 种选择方案，即可从六个入口处中的一个入口。第 2 个人则有 7 种选择方案，因为他选择和第 1 个人相同的入口处时，还有在第 1 人的前面进站还是在第 1 个人的后面进站之分。同样的道理，第 3 个人则有 8 种选择，…。依此类推，第 9 个人有 14 种选择方案。根据乘法法则可得：

进站的方案数 $N=9\times10\times11\times12\times13\times14$.

例 4. 求能除尽 1400 的正整数数目（1除外）.

解：$1400=2^3 5^2 7$.

故除尽 1400 的数应为

$$2^l 5^m 7^n,$$

其中 $0\leqslant l\leqslant3$，$0\leqslant m\leqslant2$，$0\leqslant n\leqslant1$；但排除 $l=m=n=0$。根据乘法法则可得，除尽 1400 的数的数目应为

$$N=(3+1)\times(2+1)\times(1+1)-1=$$

$$=4\times3\times2-1=23 .$$

例 5。求 5 位数中至少出现一个 6，而被 3 整除的数的个数。

因 k 位十进制数 $p_1p_2\cdots p_k$ 被 3 整除的充要条件是 $p_1+p_2+\cdots+p_k$ 被 3 整除，根据这个道理分别讨论如下：

解法 1：

① 从左向右计，最后一个 6 出现在第 5 位，即 $p_5=6$。第 2、3、4位数可以是 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 十数字之一。但第 1 位数不能任意，为了保证 5 位数之和被 3 整除，p_1 只有 3 种可能。根据乘法法则，5 位数中最后一位是 6，而被 3 整除的数有 $3\times10^3=3000$ 个。

② 最后一个 6 出现在第 4 位，即 $p_4=6$。第 5 位数 p_5 只有 9 种可能；第 2、3 位各有 10 种可能，为了保证被 3 整除，第 1 位数 p_1 有 3 种方案。根据乘法法则可得，属于这一类的 5 位数有

$3\times10^2\times9=2700$ 个。

③ 最后一个6出现在第3位，即 $p_3=6$。被3整除的数应有 $3\times10\times9^2=2430$ 个。

④ 最后一个6出现在第2位，被3整除的数应有 $3\times9^3=2187$ 个。

⑤ 第1位 $p_1=6$，而被3整除的数应有 $3\times9^3=2187$ 个.

根据加法法则，5位数中至少出现一个6而被3整除的数应有 $3000+2700+2430+2187+2187=12504$ 个。

解法 2：

5位数共 90000 个，其中被3整除的有 30000 个。

30000 个被3整除的数中不出现6的数，第1位有 1、2、3、4、5、7、8、9 八种可能；第 2、3、4 位则有9种可能；最后一位有3种可能。故5位数中被3整除而不出现6的数应有

$$3\times8\times9^3=17496 \text{ 个。}$$

因此5位数中至少出现一个6而被3整除的数应有

$$30000-17496=12504 \text{ 个。}$$

例 6. 求 1000! 的末尾有几个零。

$1000!=1000\times999\times998\times\cdots\times3\times2\times1$，故问题在于求把 1000! 分解成素数的乘积时，2和5的幂是多少？末尾的零的个数等于2和5的幂中较小的一个。故问题导至对从1到 1000 的整数中求是 2^k和 5^l 型数倍数的数的个数。

不超过 1000 的正整数中是5的倍数的数共 200 个，其中有 40 个是 $25=5^2$ 的倍数，40 个中又有8个是 5^3 的倍数，8个中还有1个是 5^4 的倍数。

故若乘积 1000! 分解成素数的乘积，其中5的幂应为 $200+40+8+1=249$。

不难判定其中2的幂必然超过 249，故 1000! 的末尾有 249

个零。

§3 一一对应

"一一对应"概念在数学研究中经常见到。组合数学在研究计数问题时，更是常用这种办法来简化我们的计算。比如已知事件 A 和事件 B 一一对应，要对事件 A 计数时，可改为对事件 B 计数，假如事件 B 的计数比 A 容易，则比较困难的事件 A 的计数从而获得解决。下面先举几个例子，在以后的讨论中还将不止一次地用到类似的办法。

例 1. 设某地的街道把城市分割成矩形方格，每个方格叫它做块。某甲从家里出发上班，向东要走过 m 块，向北要走过 n 块。问某甲上班的路径有多少种？

问题可化成图 1—3—1 的方格图，每格一单位，求从 (0, 0) 点到 (m, n) 点的路径数。

这里所谓"路径"指的是不允许向后退，即不允许逆着 x、y 的正向走。

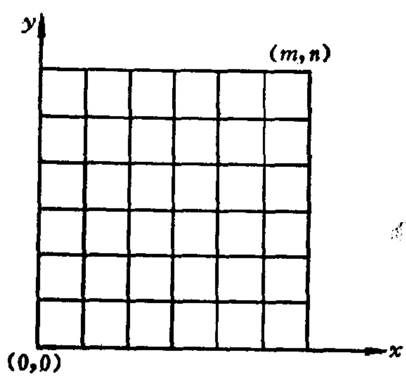

图 1—3—1

设从 (0, 0) 点开始向水平方向前进一步为 x，垂直方向上升一步为 y。于是从 (0, 0) 到 (m, n) 点，水平方向要走 m 步，垂直方向要走 n 步，总和为 $m+n$ 步。一条到达 (m, n) 点的路径对应一由 m 个 x，n 个 y 组成的一个排列：