

高等数学复习资料

胡钦训 陈文灯 合编
葛渭高 陆玉其



電子工業出版社

前 言

本资料是在我院举办的“报考硕士研究生辅导班”上的讲稿经加工整理而成的。全书共分十一章，对基本概念和重要理论进行了剖析，一些重要的公式和问题的类型以图表形式给出。通过典型例题的分析，归纳总结出解题的方法和技巧。书中例题选自历年各高校研究生试题（用“*”表示），国际奥林匹克竞赛题（用“**”表示），吉米多维奇《数学分析习题集》，吉林大学编《数学分析》，以及我院的竞赛题、期中期末试题。

本资料虽然是针对报考工科研究生者编写的，但对于电大、夜大的学员以及广大自学者也很有参考价值。

本资料在编写过程中得到孙树本教授，鲍伟、杨维奇付教授的帮助和指导，谨表示感谢。由于水平有限，时间仓促，缺点和错误一定不少，敬请同志们指正。

编者于北京工业学院

《高等数学复习资料》

目 录

第一章 函数概念

§ 1. 一元函数	1
§ 1.1 函数定义	1
§ 1.2 定义域的求法	3
§ 1.3 反函数	4
§ 1.4 复合函数	5
§ 2. 多元函数	7

第二章 极限

§ 1. 极限的概念及其运算性质	11
§ 2. 求极限的方法种种	12
(1) 利用极限定义求极限	12
(2) 利用极限运算性质求极限	12
(3) 利用两个重要极限求极限	13
(4) 利用罗彼塔法则求极限	16
(5) 利用等价无穷小求极限	21
(6) 利用定积分概念求极限	22
(7) 用其它方法求极限	25
§ 3. 二元函数的极限	31

第三章 函数的连续性

§ 1. 一元函数的连续性	36
§ 1.1 定义	36
§ 1.2 四则运算及复合运算	36
§ 1.3 闭区间连续函数的性质	36
§ 1.4 间断点的分类	37
§ 1.5 典型例题	37
§ 2. 多元函数的连续性	42
§ 2.1 定义	42
§ 2.2 性质	42

第四章 导数与微分

§ 1. 一元函数微分法	46
§ 1.1 导数概念	46

§ 1.2	求导的基本法则	46
§ 1.3	若干类型函数导数的简便求法	47
§ 1.4	分段函数导数的求法	49
§ 1.5	高阶导数的求法	52
§ 1.6	微分	57
§ 1.7	参数方程求导	58
§ 1.8	杂例	60
§ 2.	多元函数微分法	70
§ 2.1	偏导数定义及几何意义	70
§ 2.2	全微分	71
§ 2.3	方向导数	72
§ 2.4	复合函数微分法	73
§ 2.5	隐函数微分法	80
§ 2.6	杂例	83
第五章	中值定理与台劳公式	
§ 1.	微分中值定理	95
§ 2.	台劳公式	104
§ 3.	积分中值定理	109
第六章	不等式	
§ 1.	介绍不等式的一种简便解法	118
§ 2.	不等式的证明	120
§ 2.1	利用数学归纳法及已知不等式证明	120
§ 2.2	利用微分中值定理	123
§ 2.3	利用函数增减性	126
§ 2.4	利用函数极值(或最值)的性质	129
§ 2.5	利用定积分的有关性质	132
§ 2.6	杂例	137
第七章	极值和最值	
§ 1.	一元函数的极值和最值	145
§ 1.1	函数的增大与减小	145
§ 1.2	凹凸性与拐点	147
§ 1.3	极值	150
§ 1.4	最大值与最小值	156
§ 2.	多元函数极值(最值)	166
第八章	积分与广义积分	
§ 1.	不定积分	182

§ 1.1 概念及基本性质 基本积分表	182
§ 1.2 不定积分的计算	184
I) 第一换元法	184
(Ⅰ) 第二换元法	185
(Ⅱ) 分部积分法	188
§ 1.3 各类函数积分法	191
(I) 有理函数积分法	191
(Ⅰ) 无理函数积分法	196
(Ⅱ) 三角函数积分法	199
§ 2. 定积分	208
§ 2.1 定义及可积函数类	208
§ 2.2 性质及几个常用公式	210
§ 2.3 定积分算法	212
(I) 利用牛顿——莱布尼兹公式	212
(Ⅰ) 利用留数定理	216
(Ⅱ) 利用含参变量积分的方法	218
§ 2.4 证题思路分析举例	223
§ 3. 广义积分	228
§ 3.1 概念及判敛法则	228
§ 3.2 广义积分的计算	230
§ 3.3 判敛举例	235
§ 3.4 杂例	237
第九章 重积分与线面积分	
§ 1. 二重积分	246
§ 1.1 定义及其性质	246
§ 1.2 算法(坐标系的选择及定限方法)	247
§ 1.3 二重积分中的变量替换	263
§ 2. 三重积分	266
§ 3. 曲线积分	276
§ 4. 曲面积分	292
第十章 无穷级数	
§ 1. 数项级数	306
§ 1.1 数项级数的概念及基本性质	306
§ 1.2 判敛法及判敛程序	306
§ 2. 函数项级数及一致收敛的概念	318
§ 3. 幂级数	324
§ 4. 级数求和方法种种	338

§ 5. 付里叶级数.....	347
第十一章 常微分方程	
§ 1. 基本概念.....	366
§ 2. 一阶方程“可积”的类型及解法(表格).....	368
§ 3. 高阶方程的几种可积类型.....	377
§ 4. 变系数微分方程的解法.....	380
§ 5. 常系数线性方程的解法.....	389
(A) 常数变易法.....	390
(B) 待定系数法.....	390
(C) 微分算子法.....	391
(D) 拉氏变换法.....	395

第一章 函数概念

§.1 一元函数

§ 1.1 函数概念

函数定义：在某一变化过程中有两个变量 x 和 y ，如果对于 x 在其变化范围内取得的每一个值， y 按照一定的法则有一个或多个确定的值与之对应，则变量 y 称为变量 x 的函数。记作：

$$y=f(x) \quad x\text{——自变量}, \quad y\text{——因变量}.$$

该定义包含三部分内容：

① 定义域（自变量取值范围）——使函数 y 有确定值的自变量 x 的所有值的集合。注意：在实数范围内。

② 对应律（对应关系）——因变量 y 依赖于自变量的变化规律，用符号 $f(\)$ 表示。

③ 值域——函数所能取得值的集合。

这三部分内容主要取决于①、②两部分，故①、②也称为函数的两要素。

注意 1°：两个函数当（仅当）①②部分完全相同时才恒等，否则就是两个不同的函数。

例 1 $y=\sin x$ 与 $y=\frac{x\sin x}{x}$ 是两个不同的函数。因为前者定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，后者为 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ ，后者与

$$y=\begin{cases} \sin x & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时} \\ \text{无定义, 当 } x=0 \text{ 时} \end{cases} \quad \text{恒等}$$

例 2 $y=\sqrt{\log^2_{\frac{1}{3}}x - 2\log_{\frac{1}{3}}x \log_3x + \log_3^2x}$ 与

$$y=\log_{\frac{1}{3}}x - \log_3x$$

在 $0 < x \leq 1$ 内表示相同的函数。

注意 2°：函数关系仅与①②有关而与自变量和因变量用什么字母表示无关。

例 3 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$ ($x>0$)，求 $f(x)$

解： 令 $\frac{1}{x}=t$ 则 $x=\frac{1}{t}$ ($\because x>0, \therefore t>0$)

由 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2} \quad (x > 0)$

可得 $f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2} = \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$

由于函数关系与字母表示法无关,

$$\therefore f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

例 4* 设 $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = \cos x + 1$, 求 $f\left(\cos \frac{x}{2}\right) = ?$

解: $f\left(\sin \frac{x}{2}\right) = \cos x + 1 = 2 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$

令 $\sin \frac{x}{2} = t$

则 $f(x) = 2 - 2t^2$

由于函数关系与字母表示法无关,

$$\therefore f\left(\cos \frac{x}{2}\right) = 2 - 2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

例 5 若 $Z = \sqrt{y} + f(\sqrt[3]{x} - 1)$, 并且已知 $y=1$ 时有 $Z=x$, 试求函数 $f(x)$ 的分析表达式及 Z 的分析表达式。

解: 把 $y=1$ 时 $Z=x$ 代入

$$Z = \sqrt{y} + f(\sqrt[3]{x} - 1) \quad (1)$$

得 $x = 1 + f(\sqrt[3]{x} - 1) \quad (2)$

令 $\sqrt[3]{x} - 1 = t$, 则 $x = (1+t)^3$ 代入 (2)

得 $f(t) = (1+t)^3 - 1 = t^3 + 3t^2 + 3t$

$$\therefore f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x \quad (3)$$

由①②得

$$Z = \sqrt{y} + (x-1) = \sqrt{y} + x - 1$$

例 6 证明对于指数函数 $f(x) = a^x (a > 0)$, 若自变量 $x = x_n (n=1, 2, \dots)$ 的值组成一个等差级数, 则对应的函数值 $y = f(x_n) (n=1, 2, \dots)$ 组成一个等比级数。

证: $\because x_n (n=1, 2, \dots)$ 组成等差级数,

$$\therefore 2x_n = x_{n+1} + x_{n-1}$$

$$\text{又} \because f(x) = a^x$$

$$\therefore f(x_n) = a^{x_n}, f(x_{n+1}) = a^{x_{n+1}}, f(x_{n-1}) = a^{x_{n-1}},$$

$$f(x_{n+1}) \cdot f(x_{n-1}) = a^{x_{n+1}} \cdot a^{x_{n-1}} = a^{x_{n+1} + x_{n-1}} = a^{2x_n} = (a^{x_n})^2 = f^2(x_n)$$

故 $y = f(x_n) (n=1, 2, \dots)$ 组成等比级数。

§ 1.2 定义域

如果函数关系用解析式子表示，则定义域就是使运算有意义的自变量值的全体，一般用区间表示。要熟悉如下几个简单函数的定义域：

$$1^\circ y = \frac{1}{x}, \text{ 定义域: 即 } (-\infty, 0) \text{ 和 } (0, +\infty);$$

$$2^\circ y = \sqrt{x}, \text{ 定义域: } x \geq 0, \text{ 即 } [0, +\infty);$$

$$3^\circ y = \log_a x (a > 0), \text{ 定义域: } x > 0, \text{ 即 } (0, +\infty);$$

$$4^\circ y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} y = \arcsin x \\ y = \arccos x \end{matrix}} \right\} \text{ 定义域: } |x| \leq 1, \text{ 即 } [-1, 1];$$

$$5^\circ x!, \text{ 定义域: } 1, 2, 3, \dots;$$

$$6^\circ [x], x \text{ 的最大整数部分, 定义域: } (-\infty, +\infty).$$

比较复杂的函数定义域的求法：

① 分解成若干个简单函数，分别写出它们的定义域；

② 解联立不等式组。

例1 求 $y = \frac{\lg|x-1|}{\sqrt{2x+1}}$ 的定义域

解：lg|x-1| 的定义域为 $|x-1| > 0$,

$\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ 的定义域为 $2x+1 > 0$,

$$\therefore y \text{ 的定义域为 } \begin{cases} |x-1| > 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (-\frac{1}{2}, 1) \text{ 和 } (1, +\infty),$$

例2 求 $y = \arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right)$ 的定义域

$$\text{解: } \begin{cases} \frac{x}{10} > 0 \\ \left| \lg \frac{x}{10} \right| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq \lg \frac{x}{10} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 10^{-1} \leq \frac{x}{10} \leq 10 \end{cases}$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 100$$

例3 求 $y = (x - |x|)\sqrt{-\sin^2 \pi x}$ 的定义域

解: $\sqrt{-\sin^2 \pi x} \Rightarrow -\sin^2 \pi x \geq 0,$

又 $\because \sin^2 \pi x \geq 0 \Rightarrow -\sin^2 \pi x \leq 0,$

$\therefore \sin^2 \pi x = 0 \Rightarrow x = K (K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

但是当 $x - |x| = 0$ 时, 即 $x \geq 0$ 时, 即使 $\sqrt{-\sin^2 \pi x}$ 不属于实数范围, 但运算仍有意义 (乘积为 0. 因为任何数乘以零等于 0),

故其解为 $\begin{cases} x = K(0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0 \text{ 及负整数.}$

例4 设函数 $f(u)$ 的定义域为 $0 < u < 1$, 求下列函数的定义域:

① $f(\sin x)$; ② $f(\ln x)$; ③ $f\left(\frac{x}{x}\right)$; ④ $f(u+a) + f(u-a), (a > 0).$

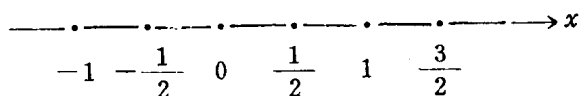
解: ① $0 < \sin x < 1 \Rightarrow \begin{cases} 2K\pi < x < 2K\pi + \pi \\ x \neq 2K\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} (K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$

② $0 < \ln x < 1 \Rightarrow 1 < x < e$, 即 $(1, e)$

③ $0 < \frac{x}{x} < 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq K (K = 2, 3, 4, \dots) \end{cases}$

④ $\begin{cases} 0 < u + a < 1 \\ 0 < u - a < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a < u < 1 - a & (1) \\ a < u < 1 + a & (2) \end{cases}$

i) 当 $1 - a < a$, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, (1)(2) 没有公共部分, 无解.



ii) 当 $1 - a \geq a$, 即 $a \leq \frac{1}{2}$ 时,

$a < u < 1 - a$, 定义域: $(a, 1 - a)$

§ 1.3 反函数

定义: 设给定一个函数 $y = f(x)$, 其值域为 R , 如果对于 R 中每一个 y 值, 都可从

$y=f(x)$ (把它看作关于 x 的一个方程) 中确定唯一的一个 x 值, 则得到一个定义于 R 中以 y 为自变量, x 为因变量的新函数: $x=\varphi(y)$, 称之为函数 $y=f(x)$ 的反函数。通常把 $x=\varphi(y)$ 记作 $x=f^{-1}(y)$ 。

注意:

1° 通常用 x 表示自变量, 用 y 表示因变量, 因此把 $x=\varphi(y)$ 改为 $y=\varphi(x)$, 亦称 $y=\varphi(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数, 记为 $y=f^{-1}(x)$ 。

2° $y=f(x)$ 的图形与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于 I、III 象限角平分线为轴的对称图形。

3° 并非任何函数 $y=f(x)$ 都有反函数。有反函数的条件是: 在一定范围内, y 与 x 一一对应。

两个主要恒等式:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}.$$

例1 求下列函数的反函数

$$(1) \quad f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (bc-ad \neq 0);$$

$$(2) \quad f(x) = (1+x^2)\operatorname{sgn} x.$$

解: (1) 令 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = y \Rightarrow cxy + dy = ax + b, (cy-a)x = b-dy \Rightarrow x = \frac{b-dy}{cy-a}$ 即为所求,

$$\text{或} \quad f^{-1}(x) = \frac{b-dx}{cx-a}.$$

$$(2) \quad \text{令 } f(x) = (1+x^2)\operatorname{sgn} x = y.$$

$$\operatorname{sgn} x \text{ 即为 } \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad \text{符号函数}$$

$$y = \begin{cases} 1+x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(1+x^2), & x < 0 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \sqrt{y-1}, & y > 1 \\ 0, & y = 0 \\ -\sqrt{-(y+1)}, & y < -1 \end{cases}$$

§ 1.4 复合函数

定义: 如果函数 $y=f(x)$ 的定义域为 X , 值域为 Y ; 又函数 $Z=\varphi(y)$ 的定义域为 U , 且 $U \supset Y$, 则称变量 Z 是变量 x 的复合函数, 记为 $Z=\varphi[f(x)]$ 。

注意: 中间变量的值域不应超过因变量的定义域, 否则就出现谬误。

例如: $Z = \arcsin(x^2+2)$

$$\begin{array}{ccc} \text{令} & Z = \arcsin y, & y = x^2 + 2 \text{ 故没有意义!} \\ & \downarrow & \downarrow \\ & -1 \leq y \leq 1 & 2 \leq y < +\infty \end{array}$$

例 1* 设 $f(x) = \sin(x^2 + 1)$, 求 $f(f(x))$

解: $f(f(x)) = \sin(f^2(x) + 1) = \sin(\sin^2(x^2 + 1) + 1)$.

例 2 设 $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$ 及 $\psi(x) = \frac{1}{x}$.

求 $\varphi(\varphi(x)), \psi(\psi(x)), \varphi(\psi(x)), \psi(\varphi(x))$.

解: $\varphi(\varphi(x)) = \operatorname{sgn} \varphi(x) = \operatorname{sgn}\{\operatorname{sgn} x\} = \operatorname{sgn} x,$

$$\psi(\psi(x)) = \frac{1}{\psi(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \quad (x \neq 0),$$

$$\varphi(\psi(x)) = \operatorname{sgn}\left\{\frac{1}{x}\right\} = \begin{cases} 1, & \frac{1}{x} > 0 \\ -1, & \frac{1}{x} < 0 \end{cases} = \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0),$$

$$\psi(\varphi(x)) = \frac{1}{\operatorname{sgn} x} = \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0).$$

例 3 设 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{n \text{ 次}}$, 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

求 $f_n(x)$

解: $f_2(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}$

$$= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x) = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+2x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

设 $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}},$

$$\text{则 } f_{n+1}(x) = \frac{f_n(x)}{\sqrt{1+f_n^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+nx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}$$

由数学归纳法可知 $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

§2 多元函数

二元函数定义：设有三个变量 x, y 和 Z ，如果对于 x, y 值所能取的每一对值， Z 按一定法则有一个或多个确定的值与之对应，则称 Z 是 x, y 的函数记作： $Z = f(x, y)$ 或 $Z = Z(x, y)$ ， x, y 称为自变量， Z 为因变量， Z 为 x, y 的二元函数。

定义域——自变量 x, y 所能取的各对值的全体。如果函数关系用解析式子表示，则定义域就是使运算有意义的（即能确定出对应函数值）自变量值的全体。

例 1* 求 $Z = \arcsin(x - y^2) + \ln[\ln(10 - x^2 - 4y^2)]$ 的定义域。

解： $\arcsin(x - y^2)$ 的定义域： $|x - y^2| \leq 1$ ，

$\ln[\ln(10 - x^2 - 4y^2)]$ 的定义域： $10 - x^2 - 4y^2 > 1$ ，

$\therefore$ 所求解为：

$$\begin{cases} |x - y^2| \leq 1 \\ 10 - x^2 - 4y^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 1 \leq x \leq 1 + y^2 \\ \frac{x^2}{3^2} + \left(\frac{y^2}{2}\right)^2 < 1 \end{cases} \quad \text{见图 0}$$

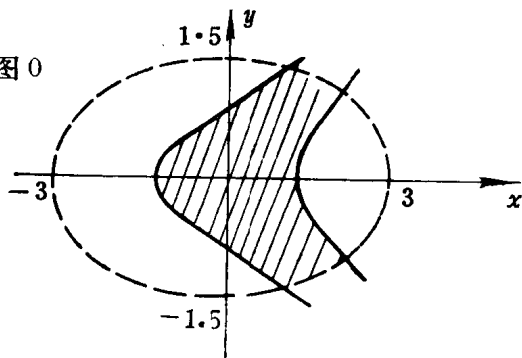


图 0

例 2 求 $Z = \ln(y - x) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

的定义域。

解： $\ln(y - x)$ 的定义域为： $y - x > 0$

$\sqrt{x}$ 的定义为： $x \geq 0$

$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ 的定义域为 $1 - x^2 - y^2 > 0$

$$\therefore Z \text{ 的定义域为：} \begin{cases} y - x > 0 \\ x \geq 0 \\ 1 - x^2 - y^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > x \\ x \geq 0 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases}, \text{ 见图 1}$$

例3 求 $Z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$ 的定义域

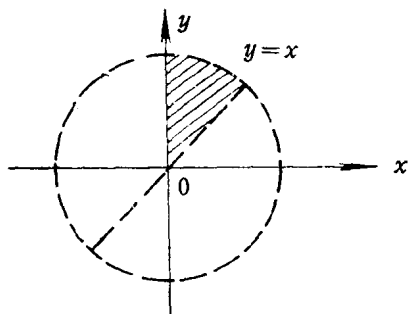


图1

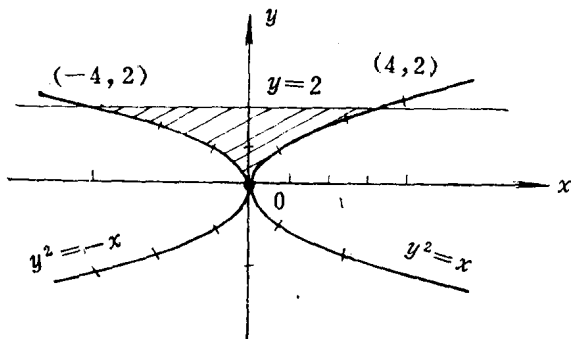


图2

解: $\arcsin \frac{x}{y^2}$ 的定义域为: $\left| \frac{x}{y^2} \right| \leq 1$

$\frac{1}{y^2}$ 的定义域为: $y \neq 0$

$\arcsin(1-y)$ 的定义域为: $|1-y| \leq 1$

$\therefore Z$ 的定义域为:

$$\begin{cases} \left| \frac{x}{y^2} \right| \leq 1 \\ y \neq 0 \\ |1-y| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y^2 \leq x \leq y^2 \\ y \neq 0 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y^2 \leq x \leq y^2 \\ 0 < y \leq 2 \end{cases}$$

二元函数的表示法也只与对应关系和定义域有关, 而与自变量和因变量各用什么字母表示无关。

例4 设函数 $f(x, y) = x^3 - 2xy + 3y^2$, 试求:

(1) $f\left(\frac{1}{x}, \frac{2}{y}\right)$, (2) $f\left(\frac{x}{y}, \sqrt{xy}\right)$.

解: (1) $\because f(x, y) = x^3 - 2xy + 3y^2$

$$\therefore f(u, v) = u^3 - 2uv + 3v^2$$

$$\text{令 } u = \frac{1}{x}, v = \frac{2}{y}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{x}, \frac{2}{y}\right) = \frac{1}{x^3} - \frac{4}{xy} + \frac{12}{y^2}$$

$$(2) \quad f(u, v) = u^3 - 2uv + 3v^2$$

$$\text{令 } u = \frac{x}{y}, \quad v = \sqrt{xy}$$

$$\begin{aligned} \therefore f\left(\frac{x}{y}, \sqrt{xy}\right) &= \left(\frac{x}{y}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{xy} + 3(\sqrt{xy})^2 \\ &= \frac{x^3}{y^3} - \frac{2x\sqrt{xy}}{y} + 3xy \end{aligned}$$

$$\text{例5} \quad \text{设 } f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2, \text{ 求 } f(x, y)$$

$$\text{解:} \quad \text{令 } u = x+y, \quad v = \frac{y}{x},$$

$$\text{得 } x = \frac{u}{1+v}, \quad y = \frac{uv}{1+v}$$

$$\therefore f(u, v) = \left(\frac{u}{1+v}\right)^2 - \left(\frac{uv}{1+v}\right)^2 = \frac{u^2(1-v^2)}{(1+v)^2} = \frac{u^2(1-v)}{1+v}$$

$$\text{故 } f(x, y) = \frac{x^2(1-y)}{1+y}, \quad (v \neq -1, y \neq -1)$$

习 题 一

1. 下列函数是否恒等, 为什么?

$$(1) \quad f(x) = \frac{x}{x}, \quad \varphi(x) = 1$$

$$(2) \quad f(x) = 1, \quad \varphi(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$(3) \quad y = \operatorname{sgn} x, \quad y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

2. 求下列函数的定义域:

$$(1) \quad y = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad (2) \quad y = \arccos(2\sin x)$$

$$(3) \quad y = \log\left(\sin \frac{\pi}{x}\right), \quad (4) \quad y = (\sqrt{x})^x$$

$$(5) \quad y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{x-3}-2)}, \quad (6) \quad y = \sqrt{\lg \sqrt{\lg \sqrt{\lg \sqrt{\lg x}}}}$$

3. 已知

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x+|x|), \quad \psi(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x < 0 \\ x^2, & \text{当 } x \geq 0 \end{cases}$$

求: $\varphi(\varphi(x)), \varphi(\psi(x)), \psi(\varphi(x)), \psi(\psi(x))$

4. 已知: $\varphi(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$, 证明: $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

5. 已知: $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 求 $f\{f(f(x))\}$

6. 求下列函数的反函数及反函数的定义域:

$$(1) \quad y = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 0)$$

$$(2) \quad y = \begin{cases} x, & \text{当 } -\infty < x < 1 \text{ 时} \\ x^2, & \text{当 } 1 \leq x \leq 4 \text{ 时} \\ 2x, & \text{当 } 4 < x < +\infty \text{ 时,} \end{cases}$$

7. 求下列函数的定义域:

$$(1) \quad Z = \sqrt{\frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}} \quad (2) \quad Z = \arccos \frac{x}{x+y}$$

$$(3) \quad Z = \ln[16-x^2-y^2](x^2+y^2-4)$$

8. 设 $Z = x+y+f(x-y)$, 若当 $y=0$ 时, $Z=x^2$, 求函数 f 及 Z .

第二章 极限

§ 1 极限的概念及运算性质

§ 1.1 概 念

序列 $\{a_n\}$ 的极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 是指对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N(\varepsilon)$, 使当 $n > N(\varepsilon)$ 时, $|a_n - A| < \varepsilon$ 总成立。

当 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 时, $\{a_n\}$ 称为无穷小量。

一个序列 $\{a_n\}$ 存在极限的充要条件是:

对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N(\varepsilon)$, 使当 $m, n > N(\varepsilon)$ 时, $|a_m - a_n| < \varepsilon$ 总成立。

常用的判别序列极限存在的准则有:

1. 单调上升 (或单调下降) 的有界数列有极限;
2. 如果 $a_n \leq b_n \leq c_n$, 而且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$,

函数 $f(x)$ 的极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 是指对于任何 $\varepsilon > 0$, 都存在一个数 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得一切满足 $0 < |x - a| < \delta$, 不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 总成立。

说明: 对于多元函数, 上述定义仍然适用, 只是 x, a 应理解为向量, $|x - a|$ 应理解为两个向量所代表的点之间的距离。

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在的充要条件是:

对于每一个极限为 a 的序列 $\{x_n\}$ (x_n 使 $f(x)$ 有意义), $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 总成立。

两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

§ 1.2 运算性质

1. 如果 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, 则:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = B \cdot A.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = A^B \quad (A > 0)$$