

● 董学朱 编著

齿轮啮合 理论基础

机械工业出版社

132.4

目前国内虽已出版了一些齿轮啮合原理方面的著作，但大多篇幅浩繁不易为读者掌握。本书是作者经过长期研究实践，集各家之长而写成的一本非常精炼的齿轮啮合理论著作。它将重点集中于齿轮啮合的基本理论方面，而以少量具体传动作为例题来帮助读者掌握解决问题的方法和步骤，以加深读者对理论的理解，使读者能用较少的时间达到学习的目的，这是本书的一大特色。因此特别适于各工科院校研究生、本科生及从事齿轮研究的科技人员作教材及参考之用。本书第一、二章论述齿轮啮合的基本理论；第三、四章为点接触齿面及以给定参考点为基础的啮合理论，有较大的实用价值，是作者的新尝试。

齿轮啮合理论基础

董学朱 编著

封面设计：姚毅 责任校对：江新建
责任印刷：张俊民 版式设计：张世琴

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄明远一号）

（北京市书刊出版业营业登记证出字第117号）

中国农业机械出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

开本 $787 \times 1092^{1/32}$ · 印张 $4^{3/4}$ · 字数 100 千字

1989年9月北京第一版·1989年9月北京第一次印刷

印数 0,001—8,670 · 定价：4.20元

ISBN 7-111-01598-3/TH·272

前 言

在机械和仪器设计制造中，不论研究新的啮合传动形式和评价齿轮啮合质量，或是开拓齿轮加工新方法和分析啮合精度，都要用到齿轮啮合理论方面的知识。在机械设计及制造学科的某些专业中，《齿轮啮合原理》是硕士研究生的一门学位课，也是本科大学生的一门选修课。

国内外先后出版了一些齿轮啮合原理方面的专著，内容十分丰富，各有特色。由于作者们采用不同的解决问题方法，各书自成体系，往往解决同一问题（例如，推导共轭齿面诱导法曲率公式），得到的公式形式上差别很大。此外，书中除研究齿轮啮合基本理论之外，还对各种传动进行具体分析，篇幅浩繁。这些给初学者造成一定困难，首先是不易掌握重点，再则需要花费很多时间去弄清楚各个学派所得到结果的真谛。

对各种齿轮啮合原理书籍进行研究，不难发现，作者们立论的依据基本相同，差别仅在于解决问题的方法不同，尽管得到的公式形式不同，但本质应该是一样的。因此，有可能把不同的学派统一起来（例如，推导出统一的诱导法曲率公式，然后再写出它们的各种不同形式，指出每一种形式的特点和用途）。如果把重点集中到齿轮啮合的基本理论方面，只以少量具体传动作为例题，帮助读者掌握解决问题的方法和步骤，加深对基本理论的理解，那么篇幅也是可以压缩的。目前已广泛应用电子计算机，向量方程一般不必展开，坐标变换矩阵运算等烦琐计算工作，可以留给计算机去完成，这

样可使公式简练，也可以压缩篇幅。

为了满足教学需要，笔者以较少的篇幅写成这本书，综合地反映出齿轮啮合理论的基本内容，目的在于使读者学习书中内容之后，能够顺利地阅读齿轮啮合原理方面的文献。

本书一、二章为齿轮啮合的基本理论。三、四两章有较大的实用价值：点接触齿面啮合理论一章，可直接用于各种啮合传动的齿面接触分析；以给定参考点为基础的啮合理论一章，可用于锥蜗杆传动、弧齿锥齿轮和准双曲面齿轮传动的几何参数计算和切齿调整计算。本书中不包括多自由度啮合理论和二次包络理论，因为这属于专门问题，可参考有关专著。

本书吸取了齿轮啮合理论各学派著作中的精华，形成一个具有统一理论基础的有机整体。其中也渗入了笔者多年从事齿轮啮合原理方面科研和教学工作的一些体会。例如，第一章中的球向量函数；坐标变换单位向量法。第二章中利用式(2-3.4)计算诱导法曲率的方法；临界法曲率的概念；齿面接触点曲率干涉的研究；两种界线引起齿面根切原因的分析。第三章中以双产形面用范成法形成共轭齿面的条件等。此外，第三、四两章的编写也是一种新的尝试。

本书可作为硕士研究生《齿轮啮合原理》课程的教学参考书，在40学时内讲授完。作为大学本科生选修课参考书，可删去三、四两章。本书还可供从事齿轮研究、设计和制造的工程技术人员自学。

阅读本书之前，读者应掌握微分几何基础知识，可参考由高等教育出版社出版，吴从炘、唐余勇编《微分几何讲义》。

由于笔者水平所限，书中会有许多错误和缺点，恳请读者提出批评指正。

丁淳同志审阅了本书手稿，并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

董学朱

1987年3月

目 录

前言

第一章 预备知识	1
§ 1.1 圆向量函数和球向量函数	1
§ 1.2 向量的回转	6
§ 1.3 坐标变换	10
§ 1.4 Rodrigues方程的推广	15
§ 1.5 Euler公式和Bertrand公式的推广	18
§ 1.6 刚体的相对运动	23
§ 1.7 相对微分和相对导数	28
§ 1.8 相对微导的应用——求轨迹曲面的法曲率和 短程挠率	30
第二章 线接触共轭齿面啮合理论	35
§ 2.1 共轭齿面	35
§ 2.2 齿面接触点邻域的共轭条件	39
§ 2.3 齿面上的界线和界点	42
§ 2.4 线接触共轭齿面的诱导法曲率	51
§ 2.5 线接触共轭齿面的诱导短程挠率	56
§ 2.6 诱导主曲率和诱导主方向	59
§ 2.7 相对速度方向的诱导法曲率和诱导短程挠率	61
§ 2.8 界点处两齿面的诱导法曲率	63
§ 2.9 齿面接触点处的曲率干涉	63
§ 2.10 线接触共轭齿面啮合分析举例	66
§ 2.11 范成齿面的根切	71
§ 2.12 等距共轭曲面	75
第三章 点接触齿面啮合理论	82

§ 3.1 以双产形面用范成法形成共轭齿面的条件82

§ 3.2 被加工齿轮的齿面和曲率参数87

§ 3.3 齿面的接触点和传动比88

§ 3.4 齿面避免曲率干涉的条件和瞬时接触面94

§ 3.5 齿面上接触迹线的方向97

§ 3.6 传动比的导数.....100

§ 3.7 弧齿锥齿轮与准双曲面齿轮的齿面接触分析102

第四章 以给定参考点为基础的啮合理论113

§ 4.1 瞬轴面和分度锥面.....113

§ 4.2 分度锥面几何参数计算.....116

§ 4.3 分度锥面几何参数间的关系.....122

§ 4.4 极限压力角126

§ 4.5 临界法曲率和极限法曲率129

§ 4.6 诱导法曲率和滑动角131

§ 4.7 准双曲面齿轮传动的基本公式135

参考文献.....141

第一章 预备知识

§ 1.1 圆向量函数和球向量函数

圆向量函数和球向量函数便于列常用曲面的向量方程，便于运算和用于坐标变换，这里作一简单介绍。

一、圆向量函数和球向量函数

图 1-1 所示，选原点重合的右旋直角静坐标系 $\sigma(O; i, j, k)$ 和动坐标系 $\sigma_1(O; i_1, j_1, k_1)$ ，在初始位置 σ_1 与 σ 重合，即 $i_1=i, j_1=j, k_1=k$ 。动坐标系 σ_1 绕 k 轴转过 ϑ 角之后，其单位向量 i_1, j_1 和 k_1 在静坐标系 σ 里分别表示为：

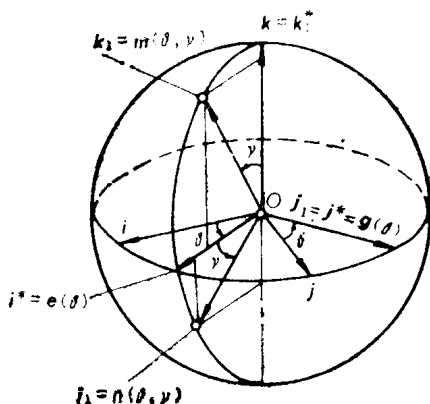


图 1-1

$$\begin{cases} i_1 = e(\vartheta) = \cos \vartheta i + \sin \vartheta j \\ j_1 = g(\vartheta) = e(90^\circ + \vartheta) = -\sin \vartheta i + \cos \vartheta j \\ k_1 = k \end{cases}$$

(1-1.1)

式中 ϑ —— 动坐标系 σ_1 绕 k 轴转过的有向角，转角的符号按右手旋进时拇指的指向与 k 的指向相同或相反确定为正或负。

$e(\vartheta)$ 和 $g(\vartheta)$ 是两个相垂直的单位向量,与 i 和 j 共面。由 i 至 $e(\vartheta)$ 、 j 至 $g(\vartheta)$ 的有向角为 ϑ 。当 ϑ 变化时, $e(\vartheta)$ 和 $g(\vartheta)$ 端点的轨迹是半径为1的圆周,故称 $e(\vartheta)$ 和 $g(\vartheta)$ 为圆向量函数。

当动坐标系 σ_1 先绕 k 轴转过 ϑ 角,再绕 $g(\vartheta)$ 轴转过 γ 角(或先绕 j 转过 γ 角,再绕 k 轴转过 ϑ 角)时,其单位向量 i_1 , j_1 和 k_1 在静坐标系 σ 里分别表示为:

$$\left\{ \begin{aligned} i_1 &= n(\vartheta, \gamma) = m(\vartheta, 90^\circ + \gamma) \\ &= \cos \gamma e(\vartheta) - \sin \gamma k \\ &= \cos \gamma \cos \vartheta i + \cos \gamma \sin \vartheta j - \sin \gamma k \\ j_1 &= g(\vartheta) = -\sin \vartheta i + \cos \vartheta j \\ k_1 &= m(\vartheta, \gamma) = \sin \gamma e(\vartheta) + \cos \gamma k \\ &= \sin \gamma \cos \vartheta i + \sin \gamma \sin \vartheta j + \cos \gamma k \end{aligned} \right. \quad (1-1.2)$$

式中 γ ——动坐标系 σ_1 绕 $g(\vartheta)$ 轴转过的有向角, γ 的符号按右手旋进时拇指的指向与 $g(\vartheta)$ 的指向相同或相反确定为正或负。

$m(\vartheta, \gamma)$ 和 $n(\vartheta, \gamma)$ 是两个互相垂直的单位向量。由 i 到 $m(\vartheta, \gamma)$ 和 $n(\vartheta, \gamma)$ 在 $(O; i, j)$ 面上的投影方向—— $e(\vartheta)$ 方向的有向角为 ϑ ;由 k 到 $m(\vartheta, \gamma)$ 、由 $e(\vartheta)$ 到 $n(\vartheta, \gamma)$ 的有向角为 γ 。当 ϑ 和 γ 变化时, $m(\vartheta, \gamma)$ 和 $n(\vartheta, \gamma)$ 端点的轨迹是半径为1的球面,故称 $m(\vartheta, \gamma)$ 和 $n(\vartheta, \gamma)$ 为球向量函数。

二、圆向量函数和球向量函数的运算规则

1. 两角和的圆向量函数

$$e(\vartheta + \varphi) = \cos \varphi e(\vartheta) + \sin \varphi g(\vartheta)$$

$$g(\vartheta + \varphi) = -\sin \varphi e(\vartheta) + \cos \varphi g(\vartheta)$$

2. 圆向量函数的导数

$$\frac{d\mathbf{e}(\vartheta)}{d\vartheta} = \mathbf{g}(\vartheta)$$

$$\frac{d\mathbf{g}(\vartheta)}{d\vartheta} = -\mathbf{e}(\vartheta)$$

3. 球向量函数的偏导数

$$\frac{\partial \mathbf{m}(\vartheta, \gamma)}{\partial \vartheta} = \sin \gamma \mathbf{g}(\vartheta)$$

$$\frac{\partial \mathbf{m}(\vartheta, \gamma)}{\partial \gamma} = \mathbf{n}(\vartheta, \gamma)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}(\vartheta, \gamma)}{\partial \vartheta} = \cos \gamma \mathbf{g}(\vartheta)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}(\vartheta, \gamma)}{\partial \gamma} = -\mathbf{m}(\vartheta, \gamma)$$

4. 数积

$$\mathbf{e}(\vartheta) \cdot \mathbf{e}(\varphi) = \cos(\vartheta - \varphi)$$

$$\mathbf{m}(\vartheta, \gamma) \cdot \mathbf{m}(\varphi, \lambda) = \sin \gamma \sin \lambda \cos(\vartheta - \varphi) + \cos \gamma \cos \lambda$$

5. 向量积

$$\mathbf{e}(\vartheta) \times \mathbf{e}(\varphi) = -\sin(\vartheta - \varphi) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{m}(\vartheta, \gamma) \times \mathbf{m}(\varphi, \lambda) = -\sin \gamma \cos \lambda \mathbf{g}(\vartheta)$$

$$+ \cos \gamma \sin \lambda \mathbf{g}(\varphi) - \sin \gamma \sin \lambda \sin(\vartheta - \varphi) \mathbf{k}$$

三、运算及应用举例

例1 $\mathbf{m}(\vartheta, \gamma) \cdot \mathbf{n}(\varphi, \lambda) = ?$

解: $\mathbf{m}(\vartheta, \gamma) \cdot \mathbf{n}(\varphi, \lambda)$

$$= \mathbf{m}(\vartheta, \gamma) \cdot \mathbf{m}(\varphi, 90^\circ + \lambda)$$

$$= \sin \gamma \sin(90^\circ + \lambda) \cos(\vartheta - \varphi) + \cos \gamma \cos(90^\circ + \lambda)$$

$$= \sin \gamma \cos \lambda \cos(\vartheta - \varphi) - \cos \gamma \sin \lambda$$

例2 $m(\vartheta, \gamma) \times g(\varphi)$

解: $m(\vartheta, \gamma) \times g(\varphi)$

$$= m(\vartheta, \gamma) \times m(90^\circ + \varphi, 90^\circ)$$

$$= -\sin \gamma \cos 90^\circ g(\vartheta) + \cos \gamma \sin 90^\circ g(90^\circ + \varphi)$$

$$- \sin \gamma \sin 90^\circ \sin[\vartheta - (90^\circ + \varphi)]k$$

$$= -\cos \gamma e(\varphi) + \sin \gamma \cos(\vartheta - \varphi)k$$

例3 $n(\vartheta, \gamma) \times n(\varphi, \lambda) = ?$

解: $n(\vartheta, \gamma) \times n(\varphi, \lambda)$

$$= m(\vartheta, 90^\circ + \gamma) \times m(\varphi, 90^\circ + \lambda)$$

$$= -\sin(90^\circ + \gamma) \cos(90^\circ + \lambda) g(\vartheta) + \cos(90^\circ + \gamma)$$

$$\sin(90^\circ + \lambda) g(\varphi) - \sin(90^\circ + \gamma) \sin(90^\circ + \lambda)$$

$$\sin(\vartheta - \varphi)k$$

$$= \cos \gamma \sin \lambda g(\vartheta) - \sin \gamma \cos \lambda g(\varphi) - \cos \gamma \cos \lambda$$

$$\sin(\vartheta - \varphi)k$$

例4 渐开线 Γ 的基圆半径为 r_b , 发生线在初始位置与基圆相切于 A 点, 当发生线在基圆上作纯滚动时, 其上 M 点形成渐开线。试列出渐开线的向量方程, 并求出渐开线上任一点处的压力角 α 。

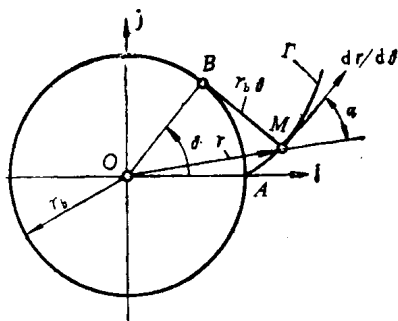


图 1-2

解: 取坐标系 σ ($O; i, j$), 原点 O

与基圆中心重合, i 轴通过 A 点。设发生线转过 ϑ 角时, 在 B 点与基圆相切 (见图 1-2)。

由图可得到

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{B} + \mathbf{B}M = r_0 [\mathbf{e}(\vartheta) - \vartheta \mathbf{g}(\vartheta)] \quad (1-1.3)$$

此即为渐开线 Γ 在坐标系 σ 里的向量方程。

式 (1-1.3) 对 ϑ 求导, 可得到渐开线上 M 点处的切向量

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\vartheta} = r_0 \vartheta \mathbf{e}(\vartheta) \quad (1-1.4)$$

M 点处的压力角 α 可由下式求得

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\vartheta}}{|\mathbf{r}| \cdot \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\vartheta} \right|}$$

由式 (1-1.3) 和 (1-1.4) 得

$$|\mathbf{r}| = r_0 \sqrt{1 + \vartheta^2}$$

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{d\vartheta} \right| = r_0 \vartheta$$

$$\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\vartheta} = r_0^2 \vartheta$$

最后得到

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \vartheta^2}}$$

例5 图1-3所示法向直廓螺旋面 Σ 由直母线形成。在初始位置, 直母线与 $(O; \mathbf{i}, \mathbf{k})$ 平面平行, 并于 A 点与 \mathbf{j} 轴相交; 与半径为 r_0 的导圆柱相切; 与 $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$ 平面的夹角为 α 。试列出该曲面 Σ 在坐标系 σ 里的方程, 并求该曲面上任一点处的单位法向量。

解: 设法向直廓螺旋面 Σ 的螺旋参数为 p , 直母线绕 \mathbf{k} 转过 ϑ 角时沿 \mathbf{k} 方向移动 $\overline{BC} = p\vartheta$, M 为直母线上任一点, 它的位置由参数 u 确定, 即 $\overline{CM} = u$ 。

法向直廓螺旋面 Σ 的向量方程为

$$r = OB + BC + CM$$

由图1-3得

$$OB = r_0 g(\vartheta)$$

$$BC = p\delta k$$

$$\overrightarrow{CM} = um(\vartheta, 90^\circ - a)$$

代入上式之后得到

$$r = r_0 g(\vartheta) + p\delta k + um(\vartheta, 90^\circ - a)$$

u 和 δ 为法向直廓螺旋面 Σ 的参数。

r 对参数 ϑ 和 u 的一阶偏导数为

$$r_\vartheta = -r_0 e(\vartheta) + p\delta k + u \cos a g(\vartheta)$$

$$r_u = m(\vartheta, 90^\circ - a)$$

曲面 Σ 上任一点处的法向量为

$$r_\vartheta \times r_u = (r_0 \sin a + p \cos a) g(\vartheta) + u \cos a n(\vartheta, 90^\circ - a)$$

$$|r_\vartheta \times r_u| = \cos a \sqrt{(r_0 \operatorname{tg} a + p)^2 + u^2}$$

单位法向量

$$n = \frac{r_\vartheta \times r_u}{|r_\vartheta \times r_u|} = \frac{(r_0 \operatorname{tg} a + p) g(\vartheta) + u n(\vartheta, 90^\circ - a)}{\sqrt{(r_0 \operatorname{tg} a + p)^2 + u^2}}$$

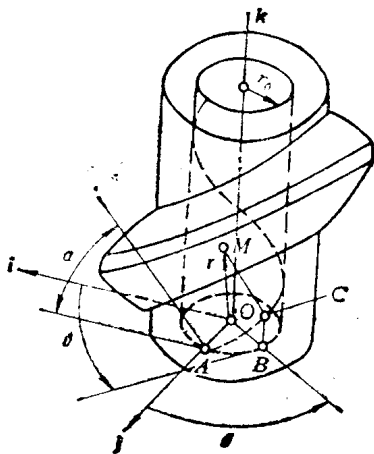


图 1-3

§ 1.2 向量的回转

一、向量的回转

向量 A 绕单位向量 e 转过 φ 角得到向量 A^* , 可记为

$$\mathbf{A}^* = R(\mathbf{e}, \varphi) \mathbf{A} \quad (1-2.1)$$

图1-4所示, 取坐标系 $\sigma(O; i, j, k)$, $k = \mathbf{e}$, i 与 \mathbf{A} 的夹角为 \mathbf{A} 与 \mathbf{e} 的夹角 γ 的余角。

\mathbf{A}^* 可以分解到 \mathbf{e} 、 \mathbf{A} 和 $\mathbf{e} \times \mathbf{A}$ 三个向量的方向。由图1-4可得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^* &= |\mathbf{b}| \mathbf{e}(\varphi) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} \\ &= |\mathbf{b}| (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) \\ &\quad + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} \end{aligned}$$

上式中代入

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{1}{|\mathbf{b}|} [\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}]$$

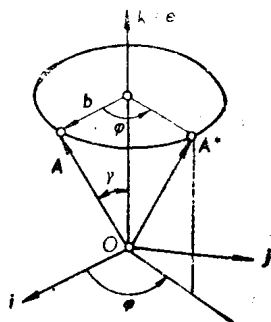


图 1-4

$$\mathbf{j} = \frac{1}{|\mathbf{A}| \sin \gamma} (\mathbf{e} \times \mathbf{A}) = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{A}}{|\mathbf{b}|}$$

可得到

$$\mathbf{A}^* = \cos \varphi \mathbf{A} + (1 - \cos \varphi) (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} + \sin \varphi (\mathbf{e} \times \mathbf{A}) \quad (1-2.2)$$

二、回转矩阵

以列矩阵 $\langle \mathbf{A}^* \rangle$ 、 $\langle \mathbf{A} \rangle$ 和 $\langle \mathbf{e} \rangle$ 分别表示向量 \mathbf{A}^* 、 \mathbf{A} 和 \mathbf{e} 在 σ 坐标系里的三个分量, 即

$$\langle \mathbf{A}^* \rangle = [A_1^*, A_2^*, A_3^*]^T$$

$$\langle \mathbf{A} \rangle = [A_1, A_2, A_3]^T$$

$$\langle \mathbf{e} \rangle = [e_1, e_2, e_3]^T$$

将式 (1-2.2) 展开成 σ 坐标系沿坐标轴的三个分量, 可得到

$$\langle \mathbf{A}^* \rangle = R(\mathbf{e}, \varphi) \langle \mathbf{A} \rangle \quad (1-2.3)$$

$R(\mathbf{e}, \varphi)$ 称为回转矩阵

$$R(\mathbf{e}, \varphi) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

式中 $a_{11} = 1 - C(e_y^2 + e_z^2)$

$$a_{12} = C e_x e_y - S e_z$$

$$a_{13} = C e_x e_z + S e_y$$

$$a_{21} = C e_x e_y + S e_z$$

$$a_{22} = 1 - C(e_y^2 + e_z^2)$$

$$a_{23} = C e_y e_z - S e_x$$

$$a_{31} = C e_x e_z - S e_y$$

$$a_{32} = C e_y e_z + S e_x$$

$$a_{33} = 1 - C(e_y^2 + e_z^2)$$

$$C = 1 - \cos \varphi$$

$$S = \sin \varphi$$

当 \mathbf{e} 为坐标轴的单位向量时, 可得到绕坐标轴回转的回转矩阵。

1. 绕 i 轴回转

$$\langle \mathbf{e} \rangle = [1, 0, 0]^T$$

$$R(\mathbf{i}, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

2. 绕 j 轴回转

$$\langle \mathbf{e} \rangle = [0, 1, 0]^T$$

$$R(\mathbf{j}, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

3. 绕 k 轴回转

$$\{e\} = [0, 0, 1]^T$$

$$R[k, \varphi] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三、向量回转的一些特性

特性 1 至 6 的证明较简单，这里直接写出结论。

1. $R[e, \varphi]e = e$
2. $R[e, \varphi](CA) = C\{R[e, \varphi]A\}$
3. $R[e, \varphi](A \pm B) = R[e, \varphi]A \pm R[e, \varphi]B$
4. $R[e, \varphi_1]\{R[e, \varphi_2]A\} = R[e, \varphi_1 + \varphi_2]A$
5. $e \times \{R[e, \varphi]A\} = R[e, \varphi](e \times A)$
6. $R[e, \varphi]A \cdot R[e, \varphi]B = A \cdot B$
7. $R[e, d\varphi]A = (e \times A)d\varphi + A$

证明：由式 (1-2.2) 可得

$$R[e, d\varphi]A = \cos(d\varphi)A + [1 - \cos(d\varphi)](A \cdot e)e + \sin(d\varphi)(e \times A)$$

$d\varphi$ 很小时可取 $\cos(d\varphi) \approx 1$, $\sin(d\varphi) \approx d\varphi$, 于是得到

$$R[e, d\varphi]A = (e \times A)d\varphi + A$$

$$8. d\{R[e, \varphi]A\} = \{R[e, \varphi](e \times A)\}d\varphi + R[e, \varphi]dA$$

证明，由微分的定义可得

$$d\{R[e, \varphi]A\} = R[e, \varphi + d\varphi](A + dA) - R[e, \varphi]A$$

利用特性 4 得到

$$d\{R[e, \varphi]A\} = R[e, d\varphi]\{R[e, \varphi](A + dA)\} - R[e, \varphi]A$$

利用特性 7 得到

$$d\{R[e, \varphi]A\} = e \times \{R[e, \varphi](A + dA)\}d\varphi + R[e, \varphi]dA$$

略去二次微量并利用特性 5，可得到

$$d\{R(\mathbf{e}, \varphi)\mathbf{A}\} = \{R(\mathbf{e}, \varphi)(\mathbf{e} \times \mathbf{A})\}d\varphi + R(\mathbf{e}, \varphi)d\mathbf{A}$$

§ 1.3 坐标变换

进行啮合分析时，一般选用与机架固连的静坐标系和分别与两齿轮固连的两个动坐标系。为了在不同的坐标系里研究曲面和曲线，而在同一坐标系里进行运算，常需要进行向量的坐标变换和点的坐标变换。

一、向量的坐标变换

如图1-5所示，取坐标系 $\sigma_1(O_1; i_1, j_1, k_1)$ 和 $\sigma_2(O_2; i_2, j_2, k_2)$ 。向量 \mathbf{r}_1 在坐标系 σ_1 和 σ_2 里分别表示为

$$(\mathbf{r}_1)_1 = x_1 i_1 + y_1 j_1 + z_1 k_1, \quad (1-3.1)$$

$$(\mathbf{r}_1)_2 = x_2 i_2 + y_2 j_2 + z_2 k_2, \quad (1-3.2)$$

向量 \mathbf{r}_1 在坐标系 σ_1 （或 σ_2 ）里的分量称为向量 \mathbf{r}_1 在 σ_1 （或 σ_2 ）里的坐标。由向量 \mathbf{r}_1 在 σ_1 （或 σ_2 ）里的坐标，求向量 \mathbf{r}_1 在 σ_2 （或 σ_1 ）

里的坐标，称为向量 \mathbf{r}_1 由 σ_1 （或 σ_2 ）到 σ_2 （或 σ_1 ）的坐标变换。

1. 坐标变换的单位向量法

由式(1-3.1)变换成式(1-3.2)，须将 σ_1 坐标轴的三个单位向量变换到 σ_2 里，即

$$(\mathbf{r}_1)_2 = x_2 i_2 + y_2 j_2 + z_2 k_2 = x_1 (i_1)_2 + y_1 (j_1)_2 + z_1 (k_1)_2, \quad (1-3.3)$$

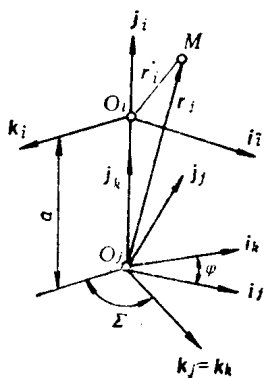


图 1-5