超级奥林匹克教程

北京三高素质教育研究所
奥林匹克学科编辑部
编

小学卷·五年级数学

奥林匹克出版社

超级奥林匹克教程

小学卷·五年级数学

主编 王翠娟 刘金玲 顾秀文

本书编写人员(以姓氏笔划为序)

叶晓宏 许哲玲 陈俊荣

张 莉 赵海霞 郭凤娟

梁有奇

奥林匹克出版社

责任编辑:陈晓清
装帧设计:温白萍

图书在版编目(CIP)数据

超级奥林匹克教程:小学卷/王翠娟等主编.-北京:
奥林匹克出版社,2000.2
ISBN 7-80067-319-7

Ⅰ.超… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课-小学-教学参考资料 Ⅳ.
G624.503
中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第77136号

超级奥林匹克教程·小学卷

北京三高素质教育研究所
奥林匹克学科编辑 编

奥林匹克出版社出版
北京国防印刷厂印刷 新华书店经销
2000年2月第1版 2000年2月第1次印刷
开本:850×1168毫米 1/32 印张:5.875 字数:120千字

ISBN 7-80067-319-7
G·222 定价7.00元

前　言

奥林匹克学科竞赛及奥林匹克教学在我国已推广实施多年。近几年来各地奥校、奥班犹如雨后春笋层出不穷，市场上各类辅导及练习读物名目繁多、良莠不齐。为此，我们约请了潜心于此工作的专家及奥林匹克教练员通力合作，编写了这套《超级奥林匹克教程》及《超级奥林匹克训练》系列丛书。

本丛书遵循科学、规范的原则，按照《九年义务教育教学大纲》要求分年级依次编写，内容既涵盖了教学大纲的基本要求，同时又为学科竞赛安排了一些超出大纲范围而为竞赛需要的内容。

本丛书在体例编排上力求务实、高效，使同学们能用最短的时间提高学习成绩。同时本丛书偏重于开拓解题思路及技巧，使同学们通过精选的习题训练，找到规律性的东西，从而达到举一反三的目的。

本丛书汇集的教学经验和习题是专家和教练员们多年积累的成果，但由于时间仓促，难免会存

在一些缺陷和遗漏，恳请有关专家和读者提出宝贵意见，以使本丛书在素质教育工作中发挥更大作用。

编　者

2000 年 1 月

目　　录

第一节

数的整除(一)

一、训练目标

整除的有关知识,是数学竞赛中经常遇到的问题。通过本节训练,学生能了解整除的一些性质及应用,提高灵活的解题能力和解题技巧。

二、知识要点

下面介绍一些有关整除的性质:

性质 1: 如果数 a、b 都能被数 c 整除,那么$(a+b)$与$(a-b)$也能被数 c 整除,简记为:若 $c|a$、$c|b$,则 $c|(a+b)$、$c|(a-b)$。

性质 2: 如果数 a 能被数 b 整除,c 是整数,那么 ac 的积也能被 b 整除。

性质 3: 如果数 a 能被数 b 整除,b 又能被数 c 整除,那么 a 也能被 c 整除。

性质 4: 如果数 a 能同时被数 b、c 整除,而且 b、c 互质,那么 a 一定能被积 bc 整除。

三、例题选讲

例 1 在□内填上适当的数字,使六位数 43217□能被 4(或 25)整除。

分析与解答:43217□中的个位数字现在不知是几,先假设它为 x,那么 $43217\square = 432100+\overline{7x}$($\overline{7x}$表示十位数字是 7,个位数字为 x 的两位数),而 $432100=4321\times100$,$100=4\times25$,所以 4 和 25 都能整除 100,根据整除的性质,432100 能被 4、25 整除。如果$\overline{43217x}$能被

4(或 25)整除,那么$\overline{7x}$就一定能被 4(或 25)整除;反过来,如果$\overline{7x}$能被 4(或 25)整除。那么$\overline{43217x}$也一定能被 4(或 25)整除。

$\overline{7x}$要能被 4 整除,x 只能是 2 和 6。

$\overline{7x}$要能被 5 整除,x 只能是 5。

因为 72 和 76 都是 4 的倍数,所以六位数:43217 $\boxed{2}$和 43217 $\boxed{6}$能被 4 整除。

因为 75 是 25 的倍数,所以 43217 $\boxed{5}$能被 25 整除。

通过这个例题,我们得到一个数能被 4(或 25)整除的特征是:

如果一个自然数的末两位数能被 4(或 25)整除,那么这个自然数就能被 4(或 25)整除;否则,就不能被 4(或 25)整除。

例 2 在□中填上合适的数字,使七位数 4786□7□能被 125(或 8)整除。

分析与解答:设七位数的百位数字和个位数字分别为 x、y。那么 4786□7□$=4786000+\overline{x7y}$。因为 $4786000=4786\times1000$,$1000=8\times125$,所以 8 和 125 都能整除 1000,即 8 和 125 都能整除 4786000。如果$\overline{4786x7y}$能被 8(或 125)整除,那么$\overline{x7y}$也一定能被 8(或 125)整除;反过来,如果$\overline{x7y}$能被 8(或 125)整除,那么七位数$\overline{4786x7y}$也一定能被 8(或 125)整除。

$\overline{x7y}$要能被 125 整除,$\overline{x7y}$一定是 125 的倍数。125 的倍数末三位只能是 000、125、250、375、500、625、850、975 这八种情况,只有 375、975 满足要求。

当$\overline{x7y}$是 8 的倍数时,末三位只能是 000、008、016、024、032、040、…104、112…176、184…272…376…472…576…672…776…872…976、984、992 这 125 种情况。只有 072、176、272、376、472、576、672、776、872、976 这十个数满足要求。

因为 375、975 是 125 的倍数,所以七位数 4786 $\boxed{3}$ 7 $\boxed{5}$和 4786 $\boxed{9}$ 7 $\boxed{5}$能被 125 整除。

因为 072、176、272、376、472、576、672、776、872、976 是 8 的倍

数，所以 4786 $\boxed{0}$ 7 $\boxed{2}$，4786 $\boxed{1}$ 7 $\boxed{6}$，4786 $\boxed{2}$ 7 $\boxed{2}$，4786 $\boxed{3}$ 7 $\boxed{6}$，4786 $\boxed{4}$ 7 $\boxed{2}$，和 4786 $\boxed{5}$ 7 $\boxed{6}$，4786 $\boxed{6}$ 7 $\boxed{2}$，4786 $\boxed{7}$ 7 $\boxed{6}$，4786 $\boxed{8}$ 7 $\boxed{2}$，4786 $\boxed{9}$ 7 $\boxed{6}$，能被 8 整除。

通过这个实例，我们得到一个数能被 8(或 125)整除的特征是：如果一个自然数的末三位数能被 8(或 125)整除，那么这个自然数就能被 8(或 125)整除，否则这个数就不能被 8(或 125)整除。

例 3 把 1 至 1997 这 1997 个自然数依次写下来，得一多位数 123456789101112…199519961997，试求这个多位数除以 9 的余数。

分析与解答：我们知道：被 9 整除的特征是：一个自然数除以 9 的余数，等于这个自然数各个数位上数字和除以 9 的余数。这样求多位数除以 9 的余数问题，便转化为求 1 至 1997 这 1997 个自然数中所有数字之和的问题。这个问题的求法有很多，下面分别加以介绍。

因为 1 至 9 这 9 个数字之和为 45，所以 10 至 19，20 至 29，30 至 39…80 至 89，90 至 99 这些两位数各数位上数字和分别为：45＋10，45＋20，45＋30，45＋40……45＋80，45＋90。这一来，1 至 99 这 99 个自然数各数位数字和为：

$$45+55+65+75+\cdots\cdots+125+135=900$$

因为 1 至 99 这 99 个自然数各数位上数字和为 900，所以 100 至 199，200 至 299……，800 至 899，900 至 999 这 100 个数各数位上数字和分别为 900＋100，900＋200，……900＋800，900＋900，这一来，1 至 999 这 999 个自然数各位上数字和为：

$$900+1000+1100+\cdots\cdots+1700+1800=13500$$

因为 1 至 999 这 999 个自然数各数上数字和为 13500，所以 1000 至 1999 这 1000 个自然数各数位数字和为：13500＋1000＝14500，这一来 1 至 1999 这 1999 个自然数各数位数字和为：13500＋14500＝28000，1998，1999 这两个数各数位上数字和为：27，28。28000－27－28＝27945，9 能整除 27945，故多位数除以 9 余 0。

另外还有一个较为省事的求和方法，将 0 至 1999 这 2000 个自

然数一头一尾搭配分成如下的1000组：

(0,1999)、(1,1998)(2,1997),(3,1996)(4,1995)……(996,1003)(997,1002)(1998,1001),(999,1000)

以上每一组两数之和都是1999,并且每一组两数相加时都不进位,这样1至1999这1999个自然数的所有数字之和等于：

$$(1+9+9+9)\times1000=28000$$

其余的与上面提到的相同,故略。

本题还有另外一种解法。因为依次写出的任意连续R的9个自然数所组成的多位数,一定能被9整除。而从1至1997一共有1997个数,1997÷9=221……8,1990、1991、1992、1993、1994、1995、1996、1997这8个数所有数位上数字和为19+20+21+22+23+24+25+26=360。360能被9整除,所以多位数除以9余0,与前面讨论的结果相同。

为什么依次写出的任意连续的9个自然数所组成的多位数一定能被9整除呢？这是因为任意连续的9个自然数各数位上的数字和除以9的余数,必定是0,1,2,……7,8这九个数,而这九个数的和为36,36能被9整除,所以任意依次写出的9个连续自然数组成的多位数也一定能被9整除。

四、请你试试

(1) 在□内填上合适的数字,使五位数4□32□能被9整除。

(2) 在□里填上适当的数字，使七位数□1992□□能同时被 9、25、8 整除。

(3) 在□里填上适当的数字，使 78□□既能被 9 整除，又能被 2 整除。

(4) 在 427 后面添三个数字，使它成为一个六位数，且添入的三个数字不能重复，使这个六位数是 9、10 的倍数，而这个六位数的末两位又恰是 3 的倍数，问这个六位数最小是多少？

(5) 有一个自然数乘以 9 后，得到一个仅由数字 1 组成的多位数，求这个自然数最小为多少？

(6) 李佳买了三支铅笔、五支圆珠笔、八个笔记本和 12 块橡皮。已知铅笔 4 分一支，圆珠笔 2 角 8 分一支，其余单价李佳记不清了。售货员要李佳共付 2 元 1 角钱。请问售货员的帐算错没有？为什么？（单价均是整数分）

五、参考答案

(1)我们先设五位数4□32□的千位、个位上□内的数字分别为x、y，那么：$4□32□=40000+x\times1000+300+20+y=4\times(9999+1)+x\times(999+1)+3\times(99+1)+2\times(9+1)+y=4\times9999+999x+3\times99+2\times9+4+x+3+2+y=9\times(1111\times4+111x+11\times3+2\times1)+(4+x+3+2+y)$，不论$x$是什么数字，9一定能整除$9\times(1111\times4+111x+11\times3+1\times2)$。如果$\overline{4x32y}$能被9整除，那么，$(4+x+3+2+y)$一定能被9整除；反过来，如果$(4+x+3+2+y)$能被9整除，那么$\overline{4x32y}$一定能被9整除。$4+x+3+2+y$能被9整除，这个和只能是9、18、27三种情况，依次讨论，得到4$\boxed{0}$32$\boxed{9}$，4$\boxed{0}$32$\boxed{0}$，4$\boxed{1}$32$\boxed{8}$，4$\boxed{2}$32$\boxed{7}$，4$\boxed{3}$32$\boxed{6}$，4$\boxed{4}$32$\boxed{5}$，4$\boxed{5}$32$\boxed{4}$，4$\boxed{6}$32$\boxed{3}$，4$\boxed{7}$32$\boxed{2}$，4$\boxed{8}$32$\boxed{1}$，4$\boxed{9}$32$\boxed{0}$能被9整除。(2)要被25整除，末两位只能为00，25，50，75；又要被8整除，只有末三位为200时可能；要被9整除，因为$1+9+9+2+0+0=21$，所以□内只能填6，这样答案为$\boxed{6}$1992$\boxed{0}\boxed{0}$能同时被9、25、8整除。(3)要使78□□既能被9整除，又能被2整除，所以□+□的和必为3或12，而它的个位必然是偶数。不难发现，当□+□=3时，十位可能填3，个位填0，或十位填1，个位填2；当□+□=12时，十位可能填8，个位填4，十位若填4，个位填8，十位若填6，个位也填6。所以有78$\boxed{3}\boxed{0}$、78$\boxed{1}\boxed{2}$、78$\boxed{8}\boxed{4}$、78$\boxed{4}\boxed{8}$、78$\boxed{6}\boxed{6}$五种答案。(4)要是10的倍数，个位必然添0，而要使这个六位数最小且是9的倍数，百位和十位上的数字和为5，又因末两位数为3的倍数，数字又不能重复，所以，十位上添3，显然百位上则添2。所以这个最小六位数为427230。(5)因为这个自然数是乘以9后得到的新的多位数，新多位数一定是9的倍数，由于它的各位都是1，所以这个新多位数必然为9个1组成(根据被9整除特征)，即111111111。要求原自然数，只要用$111111111\div9=12345679$便得到了。(6)错了。总钱数化为以分为单位的数后，应是

4 的倍数，而 210 不是 4 的倍数。

第二节

数的整除（二）

一、训练目标

这一节，我们将学习数的整除的一些技巧和应用。通过本节学习，培养学生观察、分析、判断、推理的能力，发掘题目中的条件与条件、条件与问题的相互联系，把握题目特点，发现题中隐含条件，选择最佳解题方法。

二、知识要点

性质 1：如果 a 能被 b 整除，b 能被 c 整除，那么 a 能被 c 整除，即 $b|a$，$c|b$，则 $c|a$。

性质 2：如果一个数 c 分别整除另外两个数 b 和 a，那么这个数 c 一定整除 a 和 b 的和或差。

性质 3：如果 b 整除 a，那么 b 整除 a 的任意整数倍。

三、例题选讲

例 1　$\overline{4x97y}$的前两位数是 15 的倍数，末两位数能被 6 整除，求这个五位数是多少？

分析与解答：因为它的前两位数是 15 的倍数，它的前两位必是 3 和 5 的倍数，所以 x 必取 5，而末两位 $7y$ 是 6 的倍数，它必然是 2 和 3 的倍数，而要是 3 的倍数，末位为 2、5、8，要是 2 的倍数，末位为偶数，所以 y 取 2 或 8。即 $15|4x$，$6|7y$，$x=5$，$y=2$ 或 8。

答：这个五位数为 45972 或 45978。

例 2　将自然数 1、2、3……依次写下去组成一个多位数 1234……如果写到某个自然数时，所组成的多位数恰好第一次能被 18 整

除，问这个自然数是多少？

分析与解答：由于要求恰好第一次能被 18 整除，因此，应从前往后地去寻找。

因为所组成的多位数是 18 的倍数，那么它一定为 2 和 9 的倍数，是 2 的倍数，末位必然为偶数，这样的数很多，就要看它们各数位上的数的和是否为 9 的倍数，12 显然不是 9 的倍数，而 1234 的数字和为 10，123456 的数字和为 21，显然都不是 9 的倍数，接下来我们发现 21 再加 15 为 36，就恰为 9 的倍数了，而接下来写的二个数字正好为 7 和 8，符合题目要求，此题得解。但像这种逐步试验的方法较麻烦，且数位较多时会很慢，如若碰到较难的试题，我们应根据数的特征，寻找更巧妙的方法。

因为 $18|12345\cdots$，所以 $2|12345\cdots$，$9|12345\cdots$末位为偶数，且数字和为 9 的倍数，经试验求出此数为 12345678。

答：这个自然数为 12345678。

例 3 一个同学在做一道乘法题时，误将 2^a9^b（a、b 为自然数）写成$\overline{2a9b}$了，而恰好 $2^a9^b=\overline{2a9b}$，求 $a+b$ 的和为多少。

分析与解答：因为 $2^a9^b=\overline{2a9b}$，可以得知 $2|\overline{2a9b}$，$9|\overline{2a9b}$，所以 b 为 0、2、4、6、8。

又因为 9^b 一定小于$\overline{2a9b}$，而 $9^b>\overline{2a9b}$（$b=6$、8，其中 $9^6=531441$），所以 b 只能取 0（注：自然数的 0 次方为 1）、2、4 中的数。

再考虑 $b=0$ 是明显不可能的。所以 $b=2$、4。

由 $9|\overline{2a9b}$，发现，当 $b=2$ 时，a 只能取 5，a 与 b 的和可求；

由 $9|\overline{2a9b}$，发现，当 $b=4$ 时，a 只能取 3，a 与 b 的和可求；

最后应对这两种结果进行验证。

解：因为 $2^a9^b=\overline{2a9b}$，可以得知 $2|\overline{2a9b}$，$9|\overline{2a9b}$，所以 b 为 0、2、4、6、8；

又因为 9^b 一定小于$\overline{2a9b}$，而 $9^b>\overline{2a9b}$，（$b=6$、8，其中 $9^6=531441$），所以 b 只能取 0、2、4 中的数。

由于 2^a9^b 结果的末位数不可能得 0，所以 $b=2$、4。

由于 $9\mid\overline{2a9b}$，发现 $b=2$ 时，a 只能取 5，相应的 $2^a9^b=2^5 9^2=2592$，$\overline{2a9b}=2592$ 符合要求，此时 $a+b=7$；

类似地，当 $b=4$ 时，a 只能取 3，相应的 $2^a9^b=2^3 9^4=52488>2394$，$\overline{2a9b}=2394$ 不符合题目要求。

所以 $a+b=7$，其中，$a=5$，$b=2$。

答：当 $a=5$，$b=2$ 时，$a+b$ 的和是 7。

例 4　已知四位数$\overline{abcd}$是 22 的倍数，且有 $b+c=a$，而 bc 为一个自然数的平方，求此四位数。

分析与解答：在几个已知条件中，$b+c=a$ 说明给出 b 和 c，a 就随之给定，且可推断出 $2\mid d$，又根据 $11\mid\overline{abcd}$，推出 $b+d$ 与 $a+c$ 的差为 11 的倍数，a 又为 b 与 c 的和，推出 d 与 $2c$ 的差为 11 的倍数，而 bc 为完全平方数，只能为 16、25、36、49、64、81 这六种情况，由 $b+c=a$，此时相应的 a 为 7、9、13、10 等，其中 13 和 10 显然不符合要求，只能取 7 或 9，若 a 取 7，则有$\overline{716d}$和$\overline{725d}$，若 a 取 9，则有$\overline{981d}$和$\overline{936d}$这四种可能性，由 $11\mid abcd$，有：

$11\mid d+1-(7+6)$　d 为 1 不符合题意，

$11\mid d-2-(7+5)$　d 不存在，

$11\mid d+8-(9+1)$　d 为 2，

$11\mid d+3-(6+9)$　d 为 1 不符合题意。

所以此四位数为 9812。

解：由于$\overline{bc}$为完全平方数，只能为 16、25、36、49、64、81 六种情况。由 $b+c=a$，此时相应的 a 为 7、9、13、10 这几种情况，而 13、10 不符合题意，故舍去。

在$\overline{716d}$，$\overline{725d}$，$\overline{936d}$，$\overline{981d}$四种可能中，由于 $11\mid\overline{abcd}$，$2\mid d$，可得结果只有一种答案符合题意：即为 9812。

答：此四位数为 9812。

注：$\overline{bc}$为完全平方数，表示$\overline{bc}$是两位整数，因为 $b\neq0$，因此$\overline{bc}$不考

虑 00、01、04、09 这四种情况，否则还应加上 1012,4048 两个四位数。

例 5 有一堆巧克力，要装在 46 个箱子里，其中有 45 个大箱子和一个小箱子。而小箱子装的巧克力只相当于大箱装的数量的一半，现在有$\underbrace{49794979\cdots\cdots4979}_{99个4979}$枚巧克力，如果规定按箱子大小平均分装巧克力数，是否能办到？

分析与解答：由于大小箱子装的数量不一致，不便于研究，不妨我们都统一成小箱子，则应有 $2\times45+1=91$ 个小箱子，那么是否恰好装完，并符合要求，关键是看总巧克力数：$\underbrace{49794979\cdots\cdots4979}_{99个4979}$能否被 91 整除，即考虑 7、13($91=13\times7$)是否能整除总巧克力数；我们发现：$13|4979$，而 $7|497949794979$，那必有：$91|497949794979$，因为 $99\div3=33$，从而不难推出 $91|\underbrace{49794979\cdots\cdots4979}_{99个4979}$，题目的要求可以做到。

因为 $2\times45+1=91$(个)，$91=7\times13$，又因为 $13|4979$，$7|497949794979$，所以 $91|\underbrace{49794979\cdots\cdots4979}_{99个4979}$。

答：按箱子大小平均分装巧克力可以做到。

四、请你试试

(1) 下面是一个多位数$\underbrace{88\cdots8}_{1994个8}\square\underbrace{99\cdots9}_{1994个9}$能被 13 整除，那么中间的□内的数字应该是多少？

(2) 王老师为班上 52 名同学买橡皮，她只记得花了十几元七角几分，并且每块橡皮的单价是 4 的倍数，你能帮她算出每块橡皮的价钱吗？