LM
朗曼专题

北京朗曼教学与研究中心教研成果

• 学科专题研究系列丛书 •

主编 张志朝

数学专题研究

ShuXueZhuanTiYanJiu

总主编 宋伯涛

向量

中国青年出版社

北京朗曼教学与研究中心资料

向　量

主编　张志朝

中国青年出版社

责任编辑:李 培 广
封面设计:Paul Song

向量
主编 张志朝
*
中国青年出版社出版 发行
社址:北京东四12条21号 邮政编码:100708
三河欣欣印刷有限公司印刷 新华书店总经销
*
850×1168 1/32 6.875印张 193千字
2001年8月北京第1版 2001年8月北京第1次印刷
定价:8.00元
ISBN 7-5006-4551-1/O·32

敬告读者

《学科专题研究》系列丛书为作者精心之作，作者值此出版之际向全国千百万热心读者深表谢意。

本书读者如有疑难问题，可来信与我们联系，本中心将本着为读者服务及负责的精神，及时帮助你排忧解难，与你共同切磋，共同研究，携手共勉，建立友谊。

作者声明：《学科专题研究》系列丛书为北京朗曼教学与研究中心专项研究成果，请读者认准封面上“朗曼专题”、“北京朗曼教学与研究中心教研成果”等字样，以防假冒。凡以《朗曼专题》及“宋伯涛总主编”名誉出版的任何其它版本均为侵权行为。

作者声明：凡与本书内容雷同的任何其它版本，均为盗版物。保护正版是每个真正尊重知识的忠诚读者的义务。如发现盗版，请及时来信告诉我们，我们将根据有关法律及规定对盗版者和非法买卖盗版书的个人及单位作出严肃处理。本书在全国各地均有销售，也可来信与我们联系。

来信请寄：北京市朝阳区亚运村邮局100101－89号信箱北京朗曼教学与研究中心宋伯涛收，邮编100101。
本中心 E-mail：SPTJWLSQ@163bj.com

出 版 前 言

展望二十一世纪教育发展的未来，必将是以学生素质全面发展为前提，通过减轻学生过重的学业负担，还学生一个宽松的、有更多自由选择、自主学习的发展空间。从而做到有效地培养学生的创新意识和实践能力。这将是教育改革的一种必然趋势。为此，国家教委进行高考课程改革，推广试用新教材。在这种情况下，我们的助学用书如何适应这一变化，并与素质教育的要求相匹配呢？基于这样的思考与愿望，我们按照新教材的体系，将新教材中有关章节的内容有机组合，编写一套既相互联系，又自成体系的《数学专题研究》系列丛书。

本丛书共13分册，分别为：1.集合与简易逻辑；2.函数及其性质；3.数列、极限、数学归纳法；4.三角函数；5.向量；6.方程与不等式；7.排列、组合和概率；8.直线、平面、简单几何体；9.直线与二次曲线；10.怎样解高中数学选择题；11.怎样解高中数学应用题；12.高中数学解题方法集锦；13.高中数学重点问题详析。

本丛书在编写过程中，始终坚持以高中新教材为基础、以高考的内容和要求为主线、还兼顾拓展学生视野和进行强化训练，并有意识地引导学生亲历"做数学"的过程，并且最终得出结论。因为，与具体的知识、技能相比，探索知识的过程有利于开发学生的潜能。也可以这样说，本丛书在数学教学《大纲》的基础上，本着源于教材且高于教材的要求进行编写，并以典型常规题、创新开放题及实践应用题为线索，进行精析和指导，并且坚持了以学生为主体，以学生能力发展为根本的理念，便于学生展开自学和自练。

本丛书使用的数学符号以新教材为准，在知识点的归类讲解与拓展方面兼顾了两套教材，并在书后附上新教材与统编教材中相异数学符号对照表，供读者对照使用。

由于作者水平有限，且时间仓促，书中难免存有不尽人意之处，敬请广大读者不吝指教。

宋伯涛

2001年8月于北师大

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　录

第一章　平面向量

一、向量及其运算

§1　数量与向量

什么是向量？为什么要引进向量？向量有些什么用处？数量与向量有什么不同？向量又是如何表示的？这些问题无疑是我们每一个向量初学者在思想上首先盘旋着的几个问题.针对这一情况,下面我们将逐一回答以上各问题.

1.1　向量的概念

在自然界中,我们常常会遇到两种不同类型的量,一类是较简单的量,在选定了单位量后,凡可以用一个实数(正数、负数或零)完全确定下来的量,我们称之为数量.例如,长度、面积、体积、时间、温度、密度、质量,……等都是数量.数量可以是正,也可以是负或零.例如温度高于零度是正,而低于零度则是负,等于零度就是零.数量之间可以施行各种代数运算,例如加、减、乘、除、乘方等.

然而在客观世界中,还有另外一种量,例如空间一质点在力的作用下运动,那么在这一运动过程中,在每一个特定时刻,该质点所受的力,以及它的速度和加速度,所有这些量仅凭数值的大小是不能完全决定的,还必须指出它们的方向.例如说5千克的力是不明确的,还必须指出力的作用方向.又如位移、电场等等,它们虽有不同的物理意义,但它们都是既有大小又有方向的量,于是就应该把它们的共同点抽象出来,作为统一研究的对象.于是我们称凡是需要由数值大小及其方向才能确定的量为**向量**.

例1　对下列各命题的真假作出判断

(1)物理学中的作用力与反作用力是一对方向相反,大小相等的向量.

(2)温度有零上温度和零下温度,所以温度是向量.

(3)直角坐标系中的 x 轴和 y 轴都是向量.

(4)线段不是向量,而有向线段是向量.

分析:以上四个命题均为向量的判断问题,因此需严格对照向量的定义逐个作出判断.

解:(1)真命题.因为作用力与反作用力是作用于同一点,且大小相等方向相反的两个力,故(1)是真命题.

(2)假命题.虽然温度有零上和零下,但这并不是方向,故温度不是向量.

(3)假命题.由于 x 轴和 y 轴虽然有方向,但是无大小,故 x 轴和 y 轴都不是向量.

(4)真命题.由于线段无方向,故它不是向量;而有向线段既有大小,又有方向,故有向线段是向量.

向量是客观存在着的东西,为了表达向量,仅用以往的数(正数、负数和零)是已经无法表达了,这就向我们提出了一个任务,那就是应当怎样来表示向量?怎样来研究向量?

1.2 向量的表示

为了对客观存在着的向量,诸如力、速度、加速度以及质点的位移等等,作为数学上的研究,我们必须采用适当的方法将客观存在着的向量表示出来.

从向量的定义看,向量具有两个特征,即大小和方向.而具备这两个特征的最简单的几何图形是有向线段,于是向量就可以用有向线段来表示:有向线段$\overline{AB}$的长度表示向量的大小,有向线段两个端点的顺序,例如由 A 到 B 表示向量的方向.为了避免向量与有向线段表示方法相混,我们用上面带有箭头的有向线段表示向量.例如图 1.1 中的向量记作$\overrightarrow{AB}$,且 A 叫做向量$\overrightarrow{AB}$的始点,而 B 叫做向量$\overrightarrow{AB}$的终点.为了应用上的方便,我们也常用黑体字母 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$… 来表示向量.这种用有向线段表示向量的方法称为几何表示法(简称几何法).我们可以感受得到这种利用有向线段表示向量的方法是既简单、具体又形象直观,也是使人一目了然的方法.

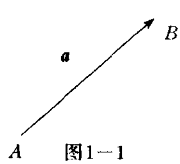

图1—1

1.3　几种特定条件的向量

(1)向量的长度(或称模):向量的大小也叫向量的长度或模.向量$\overrightarrow{AB}$的长度记作$|\overrightarrow{AB}|$,向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度记作$|\boldsymbol{a}|$

(2)零向量:长度为 0 的向量叫做零向量,记作 $\mathbf{0}$. 由于零向量的始点与终点相重合,所以它没有确定的方向.

(3)单位向量:长度等于 1 个单位长度的向量,叫做单位向量.在统一的单位长度下,所有的单位向量的长度均相等,但方向不一定相同.

例 2　$|\boldsymbol{a}|=0$ 是 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 的　(　　)

(A)充分不必要条件　　(B)必要不充分条件

(C)充要条件　　(D)既不充分也不必要条件

解:由零向量的定义知:$|\boldsymbol{a}|=0 \Rightarrow \boldsymbol{a}=\mathbf{0}$,反之,也只有零向量的模为 0,故$|\boldsymbol{a}|=0$ 是 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ 的充要条件,所以应选择(C).

例 3　判断下列各命题是否正确

(1)若向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BA}$,则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$;

(2)若 $\boldsymbol{a}$ 是单位向量,$\boldsymbol{b}$ 也是单位向量,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反.

(3)若向量$\overrightarrow{AB}$是单位向量,则$\overrightarrow{BA}$也是单位向量.

(4)以坐标平面上的定点 A 为始点,所有单位向量的终点 P 的集合是以 A 为圆心的单位圆.

解:(1)真命题,由于$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{AB}|=|AB|$,$|\boldsymbol{b}|=|\overrightarrow{BA}|=|BA|=|AB|$. 因此有$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

(2)假命题,由单位向量的定义知,凡长度为 1 的向量均称为单位向量,但是对方向没有任何要求,因此命题(2)不正确.

(3)真命题,因为$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BA}|$,所以当$\overrightarrow{AB}$是单位向量时,$\overrightarrow{BA}$也是单位向量.

(4)真命题,由于向量$\overrightarrow{AP}$是单位向量,故$|\overrightarrow{AP}|=1$. 所以点 P 是以 A 为圆心的单位圆上的一点. 反过来,若点 P 是以 A 为圆心,1 为半径的单位圆上的任一点,则由于$|\overrightarrow{AP}|=1$,所以向量$\overrightarrow{AP}$是单位向量,因此命题(4)是真命题.

1.4　平行向量(或称共线向量)

(1)方向相同或相反的非零向量叫做**平行向量**.如图 1－2 中的向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$.其中 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是一对平行向量,"$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$"和"$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$"也是平行向量,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$ 及 $\boldsymbol{c}/\!/\boldsymbol{a}$,而称 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是一组平行向量,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$.

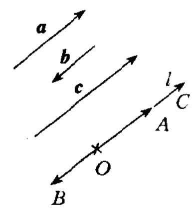

图1－2

一组平行向量它们必与一定直线平行(或在该直线上).

如图 1－3 中,A、B、C 是直线 l 上的三点,则由于向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{CB}$的方向相同或相反,所以它们也是一组平行向量,即$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}/\!/\overrightarrow{CB}$.

图1－3

因此方向相同或相反的非零向量也可能是共线的.

另外,我们可在图中任作一条与 $\boldsymbol{a}$ 所在直线平行的直线 l,在 l 上任取一点 O,则可在 l 上分别作出$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$.这就是说,任一组平行向量都可移到同一直线上.

所以平行向量也叫做**共线向量**.

例 4　已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两非零向量,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向是 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的　　(　　)

(A)充分不必要条件　　　(B)必要不充分条件

(C)充要条件　　　(D)既不充分也不必要条件

解:因为当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时,$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.所以当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时必有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,但反过来,$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时未必一定有 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向,(因为也可能是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向).故 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向是 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分不必要条件,所以应选择(A).

(2)我们规定零向量与任一向量平行.由此可知,零向量与零向量也是平行的.

(3)相等向量:长度相等且方向相同的向量叫做相等的向量,若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等,则记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.我们还规定:所有零向量均相等.在数学上要引入两元素相等的定义,它必须满足下述三公理:①自反性 $\alpha=\alpha$;②对称性 $\alpha=\beta\Rightarrow\beta=\alpha$;③传递性 $\alpha=\beta,\beta=\gamma\Rightarrow\alpha=$

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

γ.

两个向量的长度可以比较大小，但是方向就不能比较大小. 所以“大于”和“小于”的概念对于向量就无意义. 例如 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ 就没有意义，而 $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$ 则有意义.

例 5　试判定命题：“若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$”的真假，若该命题为真，则给出证明；若该命题为假，则举出反例.

解：该命题是假命题. 例如，当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{c}$ 为两非零向量，且 $\boldsymbol{a}\not/\!/\boldsymbol{c}$，而 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，由于零向量与任何向量均平行，以当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，但推不出 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$.

说明：(1)如果我们在本例的条件中增加条件：向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为非零向量，则命题：“若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$”为真命题.

(2)若向量 $\boldsymbol{a}$ 对任何向量 $\boldsymbol{b}$，均有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则必有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

例 6　已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个向量，则 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$ 是 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$ 的　(　　)

(A)充分不必要条件　　(B)必要不充分条件

(C)充要条件　　(D)既不充分又不必要条件

解：由 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$ 可推出 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，但是反过来，由 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$ 可知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 或者它们的模不相等，或者是它们的方向不同，因此由 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$ 推不出 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$，故 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$ 是 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$ 的充分不必要条件，应选择(A).

说明：本例我们也可以采用“逆否命题判别法”进行判定，即考虑它的逆否命题：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 是 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 的什么条件. 显然是充分不必要条件，故 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$ 也是 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$ 的充分不必要条件.

例 7　判断下列各命题是否正确？并说明理由.

(1)若点 O 是正三角形 ABC 的中心，则向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 均相等.

(2)在四边形 $ABCD$ 中，若 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线且 $|\overrightarrow{AD}|\neq|\overrightarrow{BC}|$，则四边形 $ABCD$ 是梯形；

(3)在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于 O，若 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$，则该四边形是平行四边形.

(4)在四边形 $ABCD$ 中，“$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ 且 $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$”是四边形 $ABCD$ 为矩形的充要条件.

分析：在以上四个命题中，都涉及到了相等向量的概念，当两

向量的模相等且方向相同时，这两个向量相等，反过来，若两个非零向量相等，则它们的模相等且方向相同，应用上述结论就可以对这四个命题的真假作出正确的判断.

解：(1)不正确. 这里虽然有三向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$的模都相等，但是由于它们的方向各不相同，所以它们各不相等.

(2)正确. 由于$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线，即$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$，故四边形 $ABCD$ 的一组对边 AB 与 CD 互相平行，再由于$|\overrightarrow{AD}|\neq|\overrightarrow{BC}|$，所以另一组对边 AD 与 BC 不平行，故四边形 $ABCD$ 是梯形.

(3)正确. 由条件$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$知四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 互相平分，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

(4)正确. 由条件$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$可知：$AB \underline{//} DC$，∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形，又∵$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$，即▱$ABCD$ 的对角线相等，所以四边形 $ABCD$ 是矩形，反过来，若四边形 $ABCD$ 是矩形，则它的对边平行且相等，对角线长也相等，所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$且$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$. 因此结论(4)正确.

说明：向量$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow$“$A$、$B$、$C$、$D$ 四点构成平行四边形”或“A、B、C、D 四点共线且 $|AB|=|DC|$，及由 A 至 B 与由 D 至 C 的方向相同”，因此，由$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow A$、$B$、$C$、$D$ 四点构成平行四边形这个结论要正确，就必需添加 A、B、C、D 四点不共线这一条件.

【强化训练】

一、判断题

1. 若向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都是单位向量，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 必相等 (　　)
2. 在温度中，零下 5 度与零上 5 度都是向量，而且是模相等、方向相反的一对向量 (　　)
3. 若 $\boldsymbol{a}$ 为零向量，而 $\boldsymbol{b}$ 是一任意向量，则 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ (　　)
4. 若向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 满足：$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$ (　　)
5. 若向量$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，则当点 A 与 C 重合时，点 B 与 D 也重合 (　　)

6. 若向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，而 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BA}$，则 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是模相等且平行的两向量　(　　)

7. 向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都是单位向量，若它们有相同的起点，则它们的终点也相同.　(　　)

8. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，而 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 同向，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 也同向.　(　　)

二、选择题

1. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$ 是 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的　(　　)

(A)充分不必要条件　(B)必要不充分条件

(C)充要条件　(D)既不充分也不必要条件

2. $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$ 是 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$ 的　(　　)

(A)充分不必要条件　(B)必要不充分条件

(C)充要条件　(D)既不充分也不必要条件

3. 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是三非零向量，则在下列各命题中，不正确的命题为　(　　)

(A)若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$ 则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$

(B)若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$

(C)若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$

(D)若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 也反向，且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$

4. 已知 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是三个向量，在下列各命题中，正确命题的个数为　(　　)

(1)若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，则必要 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$；

(2)若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$；

(3)若 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{CD}$，且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则 A 与 C 重合、B 与 D 重合；

(4)若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 是模相等且同向或反向的两个向量.

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{DC}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AD}$，$\boldsymbol{d}=\overrightarrow{BC}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ 的　(　　)

(A)充分不必要条件　(B)必要不充分条件

(C)充要条件　(D)既不充分也不必要条件

6. 如图 1—4 中，已知四边形 $ABCD$ 是梯形，且向量$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$共

线，E、F 分别是 AB、CD 的中点，则在下列各结论中，正确的为 (　　)

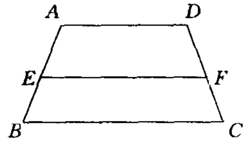

图1—4

(A) $|\overrightarrow{EF}|=\frac{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{CD}|}{2}$

(B) $|\overrightarrow{EF}|=\frac{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AD}|}{2}$

(C) $|\overrightarrow{EF}|=\frac{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|}{2}$

(D) $|\overrightarrow{EF}|=\frac{|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{BC}|}{2}$

7. 如图 1—5 中，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则在以 A、B、C、D、O 五点中任意两点为始点和终点的所有向量中，与向量$\overrightarrow{AB}$及$\overrightarrow{AD}$都不共线的向量共有 (　　)

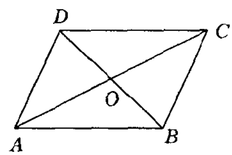

图1—5

(A)4 个　　(B)6 个

(C)8 个　　(D)12 个

8. 如图 1—6 中，已知五边形 $ABCDE$ 是边长为 1 的正五边形，在以 A、B、C、D、E 五点中的任意两点为始点和终点的所有向量中，模等于 $2\cos36°$的向量个数为 (　　)

(A)5　　(B)10　　(C)15　　(D)20

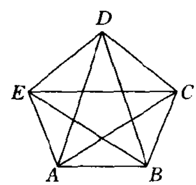

图1—6

三、填充题

1. 在客观世界中的量：速度、力、功、重量、电场、面积、位移七个量中，为向量的是____________.

2. 向量 $\boldsymbol{a}$ 满足：对任何向量 $\boldsymbol{b}$ 均有：$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}=$______.

3. 如图 1—7 中，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，E、F 分别是 AD 与 BC 的中点，则在以 A、B、C、D 四点中的任意两点为始点和终点的所有向量中，与

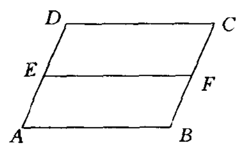

图1—7

向量$\overrightarrow{EF}$方向相反的向量为__________.

4. 如图 1－8 中，E_1、E_2，F_1、F_2，G_1、G_2，H_1、H_2 分别是矩形 $ABCD$ 所在边上的三等分点，若 $|\overrightarrow{AB}|=6$，$|\overrightarrow{AD}|=3$，则在以 A、B、C、D、E_1、E_2、F_1、F_2、G_1、G_2、H_1、H_2、I、J、K、L 十六个点中任意两点为始点与终点的所有向量中，模等于 2 且与$\overrightarrow{AB}$平行的向量有____个，模等于 1 的向量有____个.

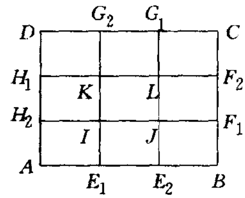

图1－8

四、解答题

1. 作出长度是 $2\sqrt{3}$，方向是北偏东 30°的向量，再作出方向与它相反但长度与它相等的向量.

2. 如图 1－9 中，E、F、G、H 是边长为 2 的正方形 $ABCD$ 各边上的中点，O 是正方形的中心. 在以 A、B、C、D、E、F、G、H、O 九点中任意两点为始点和终点的所有向量中，(1)试写出与$\overrightarrow{OA}$共线且长度相等的所有向量；(2)求出模为 1 的向量的个数.

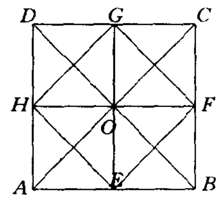

图1－9

3. 如图 1－10 中，A_1，A_2，A_3，…，A_6 是半径为 1 的圆 O，圆周上均匀分布的六个点，在以 A_1、A_2、…，A_6 及 O 七点中任意两点为始点和终点的所有向量中，(1)试写出所有与$\overrightarrow{OA_1}$共线，且模为 2 的向量；(2)试写出模等于$\sqrt{3}$的所有向量.

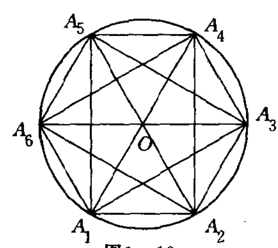

图1－10

§2　向量的加法

从物理学中我们知道，若有一个质点连续作两次移动（直线移

动），先从点 P_1 移动到点 P_2，就得到一个向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$，再从点 P_2 移动到点 P_3，又得到一个向量 $\overrightarrow{P_2P_3}$，而两次移动的实际效果就相当于从点 P_1 直接移动到点 P_3，即向量 $\overrightarrow{P_1P_3}$. 如图 2－1 中，这一事实就让我们感受到了应该有等式：$\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_3}=\overrightarrow{P_1P_3}$. 这样，我们就能很自然地引出下列关于两个向量和的定义.

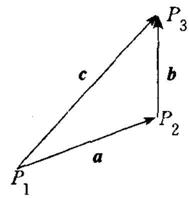

图2－1

2.1 **向量加法的定义**

定义 1：已知两个向量，由第一个向量的终点作出第二个向量，则以第一个向量的始点为始点，以第二个向量的终点为终点所成的向量叫做已知二向量的和，向量的这种运算叫做向量的加法，且称它为向量加法的三角形规则.

已知两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，在图 2－1 中，设 $\overrightarrow{P_1P_2}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{P_2P_3}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{P_1P_3}=\boldsymbol{c}$ 即为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，向量进行加法运算所用的符号仍采用实数加法的记号，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

由此规则容易得到：

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

向量加法的这个定义不论 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是不是零，也不论它们是否共线均能适用. 特别注意当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，也可用下面的方法来定义它们的和.

定义 2：为了要得到向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，我们可将向量 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 的始点放在同一点 O，然后以 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 为边作一平行四边形，则此平行四边形以 O 点为始点的对角线向量即为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和.

在图 2－2 中，有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，这种可得两个不共线的非零向量和的运算为向量加法的平行四边形规则.

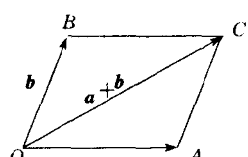

图2－2

以上向量加法的两个定义是相容的，运算的结果是一致的.

上面的加法运算是由几何作图来完成

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com