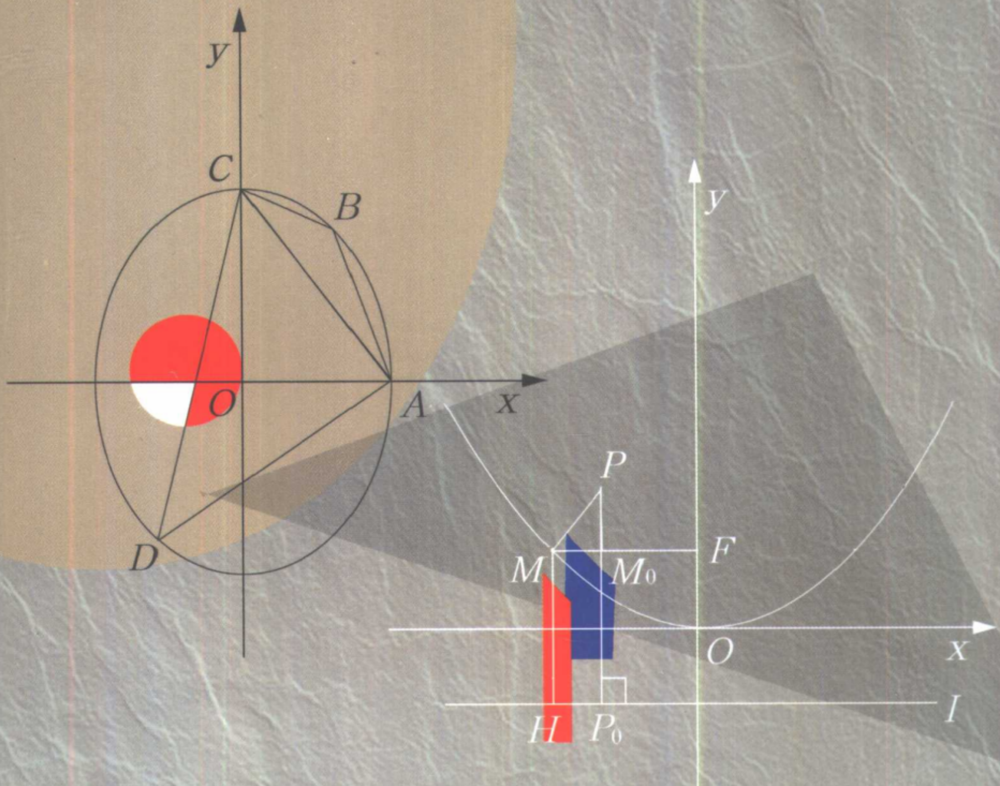
名师推荐　名校使用

高中数学
解题策略

李正兴／著



上海人民出版社

李正兴／著

高中数学
解题策略

上海人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中数学解题策略/李正兴著.
—上海：上海人民出版社，2002
ISBN 7-208-04044-3

Ⅰ. 高... Ⅱ. 李... Ⅲ. 数学课-高中-解题
Ⅳ. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 097788 号

责任编辑　苏贻鸣　吴书勇
封面装帧　甘晓培

高中数学解题策略

李正兴　著

世纪出版集团
上海人民出版社出版、发行
(200001　上海福建中路 193 号　www.ewen.cc)
新华书店上海发行所经销
商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷
开本 850×1168　1/32　印张 17.75　插页 2　字数 411,000
2002 年 1 月第 1 版　2002 年 1 月第 1 次印刷
印数 1-6,000
ISBN 7-208-04044-3/G·776
定价 28.00 元

序

李正兴老师是上南中学一位资深高级教师，浦东新区数学学科带头人。近三十年来，他始终活跃在高中数学教学第一线，执教了十四届高三毕业班，积累了丰富的高考数学复习经验，教学效果显著。他积三十年教学经验与解题窍门编著成《高中数学解题策略》，这本书是很有特色的，它不是通常意义上的高考辅导书，而是另辟蹊径，打破了以教材中的章节为条线这一框框，把高中数学的重要内容划分为十四条块，编织知识网络，所以本书的框架是立体的，这里既有纵向对基础知识的梳理，又有横向对各类知识的综合，把整个高中数学的重要知识点都蕴涵其中，所以本书有以下三个十分适合高考复习阶段学生的显著特点：

一、精选典型例题，点击解题策略

为了准备高考，学生们在复习过程中不得不做大量的习题，面对茫茫题海，学生既苦恼又不得不为之。也有不少教师教法陈旧，除了用大量习题给学生加压外缺乏良策。学生花在解题上的时间太多，而复习效果又不明显，更不要说提高学生的解题能力和数学素养了，所以如何改进教学方法，引导学生理清教材各部分之间的内在逻辑关系，摆脱题海的束缚非常重要。本书所选例题题型丰富新颖，分类科学规范，重点放在解题方法的分析上，对绝大部分例题给出了策略点击，也就

是从解题的思路与方法上进行点拨，为学生创造了思考问题、解决问题的情景。

二、突出能力立意，培养创新意识

“数学是最容易培养创造力的学科”，每个学生的心灵深处都蕴藏着使自己成为发明者、研究者的动力，都蕴藏着强烈的求知欲和勇于探索世界的热情，编写高考教辅书也要努力创造有利于促进学生主动探索、求异创新的情境，有利于学生思维灵感的诱发。作者精选了近年来涌现出的立意鲜明、背景新颖、设问灵活的好题，加大了探索性、开放性、应用性题型的研究，前八讲偏重于从知识体系上揭示典型，后六讲在数学思想方法上做文章，旨在培养学生的思维能力、运算能力和空间想象力，培养学生以数学知识为载体，将知识迁移到不同情景的能力。

三、倡导研究性复习

作者在前言中倡导学生能在教师的指导下独自对高三数学的全部内容分层划块进行梳理和研究，这无疑是非常正确的，我建议读者在阅读此书时不妨在读了“策略点击”之后先思索一下自己有没有能力来解决这一问题，再看“解答”与“评析”，在一讲看完后也可以试试寻找一些更新颖的题型加以补充，这样做复习效果将会更好。教学策略集中到一点就是让学生学会学习、学会探索，“学为主体”是一种不以人的意志为转移的客观存在，引导学生在掌握学习方法的基础上逐步培养科学研究能力，这应当是教育改革的主攻方向，编写高考辅导书也应体现这一精神。

当今，高考数学命题对能力的要求越来越高，新世纪对高中学生要求也越来越高，本书的出版将帮助高考复习生走上新台阶，帮助考生提高掌握复习数学知识的能力，使其事半功倍，也

有利于学生数学素质教育的全面提高，愿本书能够成为广大学生的良师益友。

余致甫
上海师范大学教授
上海市教育考试院数学
高考命题专家组成员
2002年1月10日

前　言

本书是笔者从事高三数学复习经验的结晶，是根据多年来在进行第二轮复习教案的基础上加以总结而编著的，试图给学生寻找一条学好高中数学，并能在高考中击破综合题之路．所选例题的题型丰富新颖，分类科学规范，归纳分析力求详细，对绝大部分例题给出了策略点击，即对解题的思路与方法进行点拨，给学生提供思考问题的方法和解决问题的策略．在给出了解题过程之后，部分例题还给出了评析，在解题策略上进一步加以引申．高中数学复习不仅仅是引导学生对旧知识进行纵向的梳理，更有必要让学生对旧知识进行横向的综合，也就是说第二轮复习光做练习卷是不够的，应当在第一轮复习的基础上对高中数学的解题方法加以总结．同一道习题，可以用这种方法解，也可以用另一种方法解，甚至有好几种方法，但必有一种方法是最佳方法．比如立体几何中的许多习题用传统的几何方法解起来比较抽象，一旦引进了向量，几何问题转化为代数运算就容易多了．可见解题策略的研究是让学生掌握行之有效的数学思想方法．在第二轮复习中若能引导学生独自进行这一工作，即进行带有研究性的高三复习，效果将会更好．

本人在 30 年的教学实践中，注意对高考数学命题改革进行一些探索，比较注意捕捉学生在数学学习过程中思维的闪光点，激发他们学习数学的热情，教学效果一直比较显著．

数学教育的改革包括多方面的内容，而教材的改革和教学

方法的改革是其中的两个重要环节.教材的改革正在不断深入,教学方法改革的航程仍然漫长,既要减轻学生负担,又要提高教学效果是时代赋予我们数学教育工作者的任务.本人力图在这方面做一些工作.本书比较注意知识之间的联系、基本方法的掌握和应用,有利于提高学生的学习能力、应用能力、探索能力和创新能力;本书也可供高三数学教师作为教学的参考.

限于本人水平,书中内容难免有差错,欢迎读者批评指正.

目　录

第一讲　函数的性质及应用

函数是高中数学重要的基础知识，应用十分广泛，函数的思想方法贯穿于整个高中数学，对分析和解决各种数学问题和实际应用问题具有重要的作用.

二次函数、幂函数、指数函数与对数函数是四种基本初等函数. 它们的定义、图象和性质内容丰富，应用广泛，而函数与方程的思想方法则是其内在的核心. 掌握函数的性质和应用，关键是：

(1) 准确、深刻理解函数的有关概念　概念是数学的基础. 概念性强又是函数理论的一个显著特点. 集合、函数的三要素（定义域、值域、对应法则）、反函数、函数的四大性质（单调性、奇偶性、周期性、极值）是函数有关概念的重点内容，只有对概念做到准确、深刻的理解，才能正确、灵活地加以应用.

(2) 认识函数与其他数学知识的内在联系　函数是变量数学的基础，与高中数学的其他知识之间有着广泛而密切的联系. 揭示并认识这种内在联系，对提高分析问题和解决问题的能力具有重要的意义.

变量数学是通过函数来研究的. 利用函数观点可以从较高的角度处理式、方程、不等式、数列、曲线与方程（隐函数）等内容. 在利用函数和方程的思想进行思维中，动与静、变量与常量是生动又辩证统一. 函数思维实际上是辩证思维的一种特殊表现形式.

(3) 把握数形结合的特征和方法　借助于图象研究函数的

性质是一种常用的方法.函数图象的几何特征与函数性质的数量特征紧密结合,有效地揭示了各类函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性等基本属性,体现了数形结合的特征与方法.在解决多种数学问题时,利用图形的直观有助于理解题意,探求解题思路,检验解题结果.为此,既要从定形、定性、定理、定位多方面精确地观察图形、绘制图形,又要熟练地掌握函数图象的平移变换、对称变换、翻折变换.

(4) 认识函数思想的实质,强化应用意识　函数是用以描述客观世界中量的依存关系的数学概念.函数思想的实质就是用联系与变化的观点提出数学对象、抽象数量特征、建立函数关系、求得问题的解决.

一、一般函数问题的解题策略是抓住对应法则,充分利用函数的性质

例 1　求下列函数的定义域和值域:

(1) $y=\sqrt{4-2^{x^2-4x+5}}$;　　　(2) $y=\dfrac{1}{5^{\frac{x}{x-1}}-1}$.

策略点击　求复合函数的定义域应从基本函数着手,每一环节都考虑到,如分式中分母不能为零,偶次根式中被开方部分应大于或等于零,对数中真数大于零、底数大于零且不等于 1,三角函数和反三角函数的定义域,实际问题中的条件限制等等.求函数的值域方法很多,常用的有配方法、反函数法、基本不等式法、判别式法、三角代换法、函数单调性法、数形结合法等等,有时还可把几种方法结合起来使用.

解　(1) 由 $4-2^{x^2-4x+5}\geqslant 0$,即 $2^{x^2-4x+5}\leqslant 2^2$,

$\therefore x^2-4x+5\leqslant 2.$

解不等式,得 $1\leqslant x\leqslant 3$. 故定义域为[1, 3].

又　$\because x^2-4x+5=(x-2)^2+1\geqslant 1$,

$\therefore\ 2^{x^2-4x+5}\geqslant 2$，$\therefore\ 4-2^{x^2-4x+5}\leqslant 2$，$\therefore\ y\in[0,\sqrt{2}]$，即值域为$[0,\sqrt{2}]$.

(2) 由 $5^{\frac{x}{x-1}}-1\neq 0$，且$\frac{x}{x-1}\neq 1$，即 $x\neq 0$ 且 $x\neq 1$（一个分式为零的充要条件是分子为零且分母不为零）.

由原函数解得　　$5^{\frac{x}{x-1}}=\frac{y+1}{y}$.

$\because\ 5^{\frac{x}{x-1}}>0$，且$\frac{x}{x-1}\neq 1$，$\therefore\ \frac{y+1}{y}>0$ 且$\frac{y+1}{y}\neq 5$.

即 $y<-1$ 或 $y>0$ 且 $y\neq\frac{1}{4}$.

故函数定义域为$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$，值域为$(-\infty,-1)\cup\left(0,\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$.

例 2　已知 a 为实数，对一切实数 x，$y=x^2-4ax+2a+6$ 的值均为非负数，求函数 $f(a)=2-a\,|\,a+3\,|$ 的值域.

策略点击　本题是在特定条件下的函数值域问题，先由二次函数的值非负求出 a 的取值范围，在此范围制约下再利用函数单调性求新函数的值域.

解　$\because$ 对一切实数 x 均有 $y\geqslant 0$，

$\therefore\ \Delta=(-4a)^2-4(2a+6)=8(a+1)(2a-3)\leqslant 0$.

即$-1\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$，于是 $a+3>0$.

函数 $a-\frac{2}{2^x+1}+a-\frac{2^{x+1}}{2^x+1}=0\Rightarrow 2a-\frac{2(2^x+1)}{2^x+1}=0$.

$\because\ -\frac{3}{2}\notin\left[-1,\frac{3}{2}\right]$，$\therefore\ f(a)$在$\left[-1,\frac{3}{2}\right]$上是减函数，

$f(a)_{\min}=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{19}{4}$，$f(a)_{\max}=f(-1)=4$，

故 $f(a)$的值域是$\left[-\frac{19}{4},4\right]$.

例3 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，且当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)=2^x+\frac{1}{5}$，求 $f(\log_2 20)$ 的值.

策略点击 由于 $\log_2 20\notin(-1,0)$，显然，解决本题的关键是确定函数 $f(x)$ 的周期，则必须抓住 $f(x)$ 为奇函数以及所给 $f(1+x)=f(1-x)$ 的条件进行变形.

解 $\because$ $f(x)$ 是奇函数，故对一切 $x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=-f(x)$.

又 $\because$ $f(1+x)=f(1-x)$，

$\therefore$ $f(2+x)=f[1+(1+x)]=f[1-(1+x)]=f(-x)$.

$$\therefore\ f(4+x)=f[2+(2+x)]=f[-(2+x)]$$
$$=-f(2+x)=-f(-x)$$
$$=-[-f(x)]=f(x),$$

$\therefore$ 4 为 $f(x)$ 的周期.

又 $\because$ $20\in(16,32)$，$\therefore$ $\log_2 20\in(4,5)$.

$\therefore$ $\log_2 20-4\in(0,1)$，$\therefore$ $4-\log_2 20\in(-1,0)$.

$$\therefore\ f(\log_2 20)=-f(-\log_2 20)=-f(4-\log_2 20)$$
$$=-\left(2^{4-\log_2 20}+\frac{1}{5}\right)=-\left(16\div 20+\frac{1}{5}\right)$$
$$=-1.$$

例4 已知函数 $f(x)=\lg(ax^2+2x+1)$，

(1) 若 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围及 $f(x)$ 的值域；

(2) 若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围及 $f(x)$ 的定义域.

策略点击 函数的三要素中，对应法则是核心，正是由于对应法则实现了定义域与值域两数集之间的对应，所以解此类习题的关键是紧紧抓住对应法则.

解 (1) $\because$ $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$，$\therefore$ $ax^2+2x+1>0$ 对 $x\in\mathbf{R}$

成立，

由此得 $\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = 4 - 4x < 0. \end{cases}$

解不等式组，得 $a > 1$.

又 $\because ax^2 + 2x + 1 = a\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + 1 - \frac{1}{a} \geqslant 1 - \frac{1}{a}$,

$\therefore f(x) = \lg(ax^2 + 2x + 1) \geqslant \lg\left(1 - \frac{1}{a}\right)$,

故得 $a \in (1, +\infty)$, $f(x) \in \left[\lg\left(1 - \frac{1}{a}\right), +\infty\right)$.

(2) $\because$ $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, $\therefore$ $ax^2 + 2x + 1$ 的值域是 $(0, +\infty)$ 的子集，

显然 $a < 0$ 是不可能的；

当 $a = 0$ 时，有 $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$;

当 $a > 0$ 时，$a\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + 1 - \frac{1}{a} \geqslant 1 - \frac{1}{a}$.

由题意，得 $1 - \frac{1}{a} \leqslant 0$，即 $0 < a \leqslant 1$.

这时由 $ax^2 + 2x + 1 > 0$，解不等式，得

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1 + \sqrt{1 - a}}{a}\right) \cup \left(-\frac{1 - \sqrt{1 - a}}{a}, +\infty\right).$$

综上所述，当 $a = 0$ 时，$x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$;

当 $0 < a \leqslant 1$ 时，

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1 + \sqrt{1 - a}}{a}\right) \cup \left(-\frac{1 - \sqrt{1 - a}}{a}, +\infty\right).$$

例 5 设 $f(x) = x^2 + px + q$, $A = \{x \mid x = f(x)\}$, $B = \{x \mid f[f(x)] = x\}$.

(1) 求证 $A \subseteq B$；(2) 如果 $A = \{-1, 3\}$，求 B.

策略点击 解本题的关键是脱去集合符号和抽象函数符号的"外衣"，显出最本质的数量关系，不断实施解题语言的转换.

解 (1) 设 x_0 是集合 A 中的任一元素，即有 $x_0 \in A$，有 $f[f(x_0)] = f(x_0) = x_0$，$\therefore x_0 \in B$，故 $A \subseteq B$.

(2) $\because A = \{-1, 3\} = \{x \mid x^2 + px + q = x\}$，$\therefore$ 方程 $x^2 + (p-1)x + q = 0$ 有两根 -1 和 3.

由韦达定理，得 $\begin{cases} -1 + 3 = -(p-1), \\ (-1) \times 3 = q. \end{cases}$

解方程组，得 $\begin{cases} p = -1 \\ q = -3 \end{cases}$，$\therefore f(x) = x^2 - x - 3$.

于是集合 B 的元素是方程 $f[f(x)] = x$，也即 $(x^2 - x - 3)^2 - (x^2 - x - 3) - 3 = x$ 的根.

变形得 $(x^2 - x - 3)^2 - x^2 = 0$，即 $(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 3) = 0$.

解方程，得 $x = -1, 3, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$，

故 $B = \{-1, 3, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

例 6 已知 $f(x) = x^2 + \log_a(x + \sqrt{1 + x^2})$，$f(2) = m$，求 $f(-2)$.

策略点击 利用 $f(2) = m$ 求 a，然后再计算 $f(-2)$，其过程繁琐. 容易发现 $\log_a(x + \sqrt{1 + x^2})$ 是奇函数，利用函数的奇偶性则较容易求出 $f(-2)$，而不必求出 a，过程就简化了.

解 设 $f(x) = x^2 + \log_a(x + \sqrt{1 + x^2}) = x^2 + g(x)$，则

$$g(x) = f(x) - x^2 = \log_a(x + \sqrt{1 + x^2}),$$

而 $$g(-x) = \log_a(\sqrt{1 + x^2} - x)$$

$$= \log_a \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} = -g(x),$$

$\therefore g(x)$是奇函数，由 $g(2)=f(2)-2^2=m-4$，得 $g(-2)=-(m-4)$，

$\therefore f(-2)=g(-2)+4=4-m+4=8-m$.

二、用函数思想解决方程或不等式问题，用方程或不等式解决函数问题是一种极其有效的解题策略

例1 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x}$，$x\in[1,+\infty)$，

(1) 当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，求函数 $f(x)$的最小值；

(2) 若对任意 $x\in[1,+\infty)$，$f(x)>0$ 恒成立，试求实数 a 的取值范围.

策略点击 本例是 2000 年上海市高考题，是一道运用函数思想解决不等式问题的典型好题. 通过对函数最小值问题的讨论，欲使 $f(x)>0$ 恒成立，当且仅当 $f(x)_{\min}>0$ 时，从而求出 a 的取值范围. 下面提供的解法一，用二次函数配方法求 $f(x)$的最小值；解法二，用的是对基本函数单调性的讨论，当你用其他方法求最值不能见效时，就应想到研究函数的单调性，这是一种解题的通法，务请重视.

解 (1) 当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=x+\dfrac{1}{2x}+2$，

$\because f(x)$在区间$[1,+\infty)$上为增函数，$\therefore f(x)$在区间$[1,+\infty)$上的最小值为 $f(1)=\dfrac{7}{2}$.

(2) **解法一** 在区间$[1,+\infty)$上，$f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x}>0$ 恒成立$\Leftrightarrow x^2+2x+a>0$ 恒成立.

设 $y=x^2+2x+a$，$x\in[1,+\infty)$，$y=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$ 递增，

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$y_{\min}=3+a$.

于是当且仅当 $y_{\min}=3+a>0$ 时，函数 $f(x)>0$ 恒成立，故 $a>-3$.

解法二 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}+2,\ x\in[1,+\infty)$.

当 $a\geqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 的值恒为正；当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 递增.

故当 $x=1$ 时，$y_{\min}=3+a$.

于是当且仅当 $y_{\min}=3+a>0$ 时，函数 $f(x)>0$ 恒成立，故 $a>-3$.

例 2 已知集合 $M=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-3}{x-2}=a+1\right.\right\}$，$T=\{(x,y)\mid(a^2-1)x+(a-1)y=15\}$，若 $M\cap T=\varnothing$，求 a.

策略点击 从解方程组角度看，方程组无解，增根的情况是必须排除的，这点不要忽略.

解 由联立方程组 $\begin{cases}y-3=(x-2)(a+1),\\(a^2-1)x+(a-1)y=15\end{cases}$ 消去 y，得

$$2(a^2-1)x=2a^2-3a+16.$$

所以当 $a=\pm 1$ 时，方程组无解，即 $M\cap T=\varnothing$.

若 $a\neq\pm 1$，则 $x=\dfrac{2a^2-3a+16}{2(a^2-1)}=2$ 时为增根.

解方程，得 $a=-4$ 或 $a=\dfrac{5}{2}$. 此时同样满足 $M\cap T=\varnothing$.

综上所述，当 $M\cap T=\varnothing$ 时，a 为 $1,\ -1,\ -4,\ \dfrac{5}{2}$.

评析 本题也可以通过几何意义求解，要 $M\cap T=\varnothing$，或者两直线平行，此时 $a=-1$，或者至少有一无轨迹，此时 $a=1$，或者两直线交于点 $(2,3)$，此时 $a=-4$ 或 $a=\dfrac{5}{2}$.

例 3 集合 $A=\{y\mid y^2-(a^2+a-2)y+a(a^2-2)<0,$